高等学校工科电子类教材

电磁场理论基础

钟顺时 钮茂德

西安电子科技大学出版社

高等学校教材

电磁场理论基础

钟顺时　钮茂德

西安电子科技大学出版社
1995

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

本书系高等学校工科电子类专业规划教材之一，系统地阐述了宏观电磁场和电磁波的基本规律、基本计算方法及其应用。

全书分八章：矢量分析、电磁场基本方程、静电场、恒定电流的电场和磁场、静态场边值问题的解法、时变电磁场和平面电磁波、平面波的反、折射和导行波、电磁波的辐射与散射等。

本书力求内容精练，注重实践性和新颖性，物理概念清晰，文字易懂，便于自学。书中例题多达 100 道，每章都有小结与习题，书末备有材料丰富的附录。可供大学本科有关专业作电磁场课程的教科书，也可作科技人员的自学读本或参考书。

高等学校教材
电磁场理论基础
钟顺时　钮茂德
责任编辑　马乐惠

西安电子科技大学出版社出版发行
地址：西安市太白南路 2 号　邮编：710071
西安电子科技大学印刷厂印刷
陕西省新华书店发行　各地新华书店经售
开本 787×1092　1/16　印张 20　字数　471　千字
1995 年 6 月第 1 版　1995 年 6 月第 1 次印刷　印数 1－5 000

ISBN 7－5606－0355－6/TN・0091(课)　定价：13.60 元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定，我部承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从1978～1990年已编审、出版了三个轮次教材，及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要，贯彻国家教委《高等教育“八五”期间教材建设规划纲要》的精神，“以全面提高教材质量水平为中心，保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套”，作为“八五”期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想，组织我部所属的九个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会，在总结前三轮教材工作的基础上，根据教育形势的发展和教学改革的需要，制订了1991～1995年的“八五”（第四轮）教材编审出版规划。列入规划的、以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约300多种。这批教材的评选推荐和编审工作，由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿，其一是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会（小组）评选择优产生出来的，其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的，其三是经过质量调查在前几轮组织编定出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会（小组）、教学指导委员会和有关出版社，为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评和建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

机械电子工业部电子类专业教材办公室

前言

现代电子技术如通信、广播、电视、雷达、导航、遥感、测控和电子对抗等，都离不开电磁波的发射、控制、传输和接收；而从家用电器、工业自动化到地质勘探，从电力、交通、轻纺、食品等工业、农业到医疗卫生等国民经济领域，几乎全都涉及电磁场理论的应用。不仅如此，电磁学一直是、将来仍将是新学科和交叉学科的孕育点；并且它对培养学生谨严的科学学风、科学的方法论及抽象思维能力、创新精神等，都起着十分重要的作用。因此，我国和世界先进工业国家一样，各高等学校都把它列为电子类专业必修的技术基础课。

本书系按电子工业部工科电子类专业教材1991～1995年编审出版规划，由电磁场与微波技术教材编审委员会电磁场理论教材编审组征稿、评审并推荐出版的。这个教本的主要特色有三：一是与大多现有电磁场教材不同，采用了先引出麦克斯韦方程，由一般到特殊的体系；二是加强了理论与实际的联系(包括一些应用举例和习题)；三是作了某些简化或较新颖的处理(如§1.5.3、§3.5.2、§5.2、§6.4.2、§7.3、§7.5、§7.7和§8.1.3等)。我们的出发点是让本教材有助于激发学生学习的兴趣，便于自学和提高能力，尽管还做得很不够。

为便于学习，第一章先复习矢量分析知识，力求简明实用，并在最后引出亥姆霍兹定理，作为本书公理化论述的基础。第二章阐述麦克斯韦方程组，并通过实例来说明电路方程是这些场方程的特殊化。第三、四、五章讨论静态场，论述了静电场、恒定电流的电场和磁场的基本概念和计算方法及其应用(如静电分离、霍尔效应等)，并在第五章中专门研究静态场边值问题的解法，以加强基础，学会场问题的基本处理方法。第六、七、八章研究时变电磁场的基本理论和有关应用，包括无界媒质中的平面波(第六章)、反射和折射、导行波(第七章)，辐射与散射(第八章)等。其中第六章增加了等离子体中传播的简化分析，以示范如何推广应用所学理论。第七章增加了多层介质反折射问题的处理，引入了等效阻抗，并讨论了电磁波在电离层的反折射、光纤传输、矩形波导和谐振腔等。由于有些专业不另开天线课程，因而在第八章中补充了天线电参数与传输方程的内容；最后还首次增加了散射问题的介绍，因为它与现代无线传播、遥感、雷达和隐身技术是密切相关的。以上增加的内容都可根据课程时数和因材施教的原则灵活取舍。还值得说明的是，第六、七、八章(时变场)也可放在第三、四、五章(静态场)前面讲解。这样一般不会有明显困难，却可避免与“大学物理”中次序相同的“老面孔”。我们在原上海科技大学(今上海大学)自89级班次以来都是这样实施的，颇受学生欢迎。

本教材适用于学过“大学物理”、“高等数学”和“工程数学”的电子与通信类专业(包括电磁场与微波技术专业)的本科生，可供60～80学时教学之用。

钟顺时担任本书主编。钮茂德编写了第三、四、五章，其余各章及附录等均由钟顺时编写。它是在二位作者同名讲义的基础上根据评审意见改写而成的。此次修改获得了北京理工大学楼仁海教授、电子科技大学全泽松教授及编审组其他老师的大力支持和亲切指导，特别是责任编委兼主审人全泽松教授给予了具体而又深入的指导。同时我们也得到了原上海科学技术大学和该校无线电电子学系有关领导及电磁场与微波技术教研室同事们的

热情支持和帮助。在此谨向他们表示诚挚的感谢！并向本书引用的参考文献的作者们致以敬意。我们谨以此书纪念敬爱的老师、中国科学院前学部委员毕德显教授。

因学识和经验有限，书中不妥或错误之处在所难免，恳请读者不吝指正。

钟顺时　钮茂德

1994年5月于上海大学

目 录

第一章 矢量分析

电场和磁场都是矢量场，因此矢量分析是研究电磁场特性的主要数学工具之一。本章将对“工程数学”课中学习的矢量分析知识作一复习，重点是讨论矢量场的散度、旋度和标量场的梯度及相关的重要定理。工欲善其事，必先利其器。掌握矢量分析工具将为学习本书奠定必要的基础。

§1.1 矢量表示法和代数运算

1.1.1 矢量表示法及其和差

数学上称只有大小的量为标量，如时间、体积、能量等。既有大小又有方向的量称为矢量，如力、风速、电场强度等。习惯上用黑体符号或在符号上加横线来表示矢量，如 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 或 $\overline{A}$、$\overline{B}$。本书的所有矢量均采用黑体表示。模值为 1 的矢量称为单位矢量，由符号上加“ ^ ”来表示，如 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$（分别表示直角坐标系中 x、y、z 方向上的单位矢量）。

若三个相互垂直的坐标轴上的分量已知，一个矢量就确定了。例如在直角坐标系中，矢量 $\mathbf{A}$ 的三个分量模值分别是 A_x、A_y、A_z，则 $\mathbf{A}$ 可表示为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \tag{1-1}$$

该矢量的模为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1-2}$$

$\mathbf{A}$ 的单位矢量为

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{\mathbf{A}}{A} = \hat{x}\frac{A_x}{A} + \hat{y}\frac{A_y}{A} + \hat{z}\frac{A_z}{A} \\ &= \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma\end{aligned} \tag{1-3}$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为 $\mathbf{A}$ 的方向余弦。α、β、γ 分别是 $\mathbf{A}$ 与 x、y、z 轴正向的夹角。这不难由图 1-1 看出，例如，应用三垂线定理知，$A_x = A\cos\alpha$。

把两个矢量的对应分量相加或相减，就得到它们的和或差。设

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$$

则

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \hat{x}(A_x \pm B_x) + \hat{y}(A_y \pm B_y) + \hat{z}(A_z \pm B_z) \tag{1-4}$$

$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的和或差也可用几何作图得出，如图 1-2 所示。

1.1.2 标量积和矢量积

矢量的相乘有两种定义：标量积（点乘）和矢量积（叉乘）。标量积 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 是一标量，其大小等于两个矢量模值相乘，再乘以它们夹角 α_{AB}（取小角，即 $\alpha_{AB}\leqslant\pi$）的余弦：

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\alpha_{AB} \tag{1-5}$$

它就是一个矢量的模与另一矢量在该矢量上的投影的乘积（参看图 1-3）。它符合交换律：

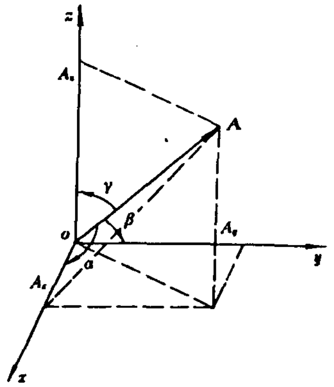

图 1-1　直角坐标系中矢量的分解

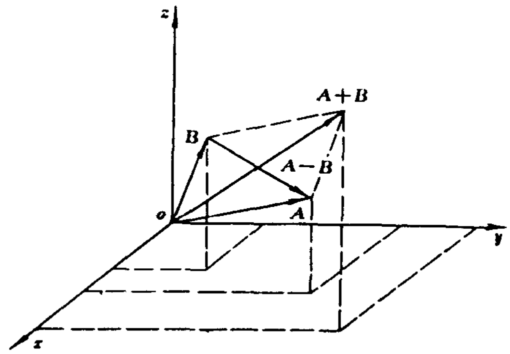

图 1-2　矢量的相加和相减

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (1-6)$$

并有

$$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=0 \qquad (1-7)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}=1 \qquad (1-8)$$

因而得

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \qquad (1-9a)$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A_x^2+A_y^2+A_z^2=A^2 \qquad (1-9b)$$

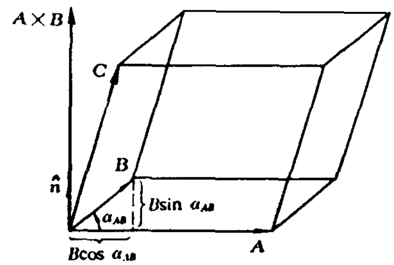

图 1-3　矢量乘积的说明

矢量积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 是一个矢量，其大小等于两个矢量的模值相乘，再乘以它们夹角 $\alpha_{AB}(\leqslant\pi)$ 的正弦，其方向与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 成右手螺旋关系，为 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 所在平面的右手法向 $\hat{\boldsymbol{n}}$：

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{n}}\,AB\sin\alpha_{AB} \qquad (1-10)$$

它不符合交换律。由定义知，

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}) \qquad (1-11)$$

并有

$$\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=0 \qquad (1-12)$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}\times\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{z}},\ \hat{\boldsymbol{y}}\times\hat{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{x}},\ \hat{\boldsymbol{z}}\times\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}} \qquad (1-13)$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{z}}A_z)\times(\hat{\boldsymbol{x}}B_x+\hat{\boldsymbol{y}}B_y+\hat{\boldsymbol{z}}B_z)\\&=\hat{\boldsymbol{x}}(A_yB_z-A_zB_y)+\hat{\boldsymbol{y}}(A_zB_x-A_xB_z)+\hat{\boldsymbol{z}}(A_xB_y-A_yB_x)\end{aligned} \qquad (1-14)$$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 各分量的下标次序具有规律性。例如，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 分量第一项是 $y\to z$，其第二项下标则次序对调：$z\to y$，依次类推。并有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

1.1.3　三重积

矢量的三连乘也有两种。标量三重积为

$$A\cdot(B\times C)=B\cdot(C\times A)=C\cdot(A\times B) \tag{1-15}$$

注意，$A\times B$ 的模就是 A 与 B 所形成的平行四边形的面积(参看图 1-3)，因此 $C\cdot(A\times B)$就是该平行四边形与 C 所构成的平行六面体的体积。$A\cdot(B\times C)$和 $B\cdot(C\times A)$也都等于 A、B、C 所构成的平行六面体的体积。

矢量三重积为

$$A\times(B\times C)=B(A\cdot C)-C(A\cdot B) \tag{1-16}$$

公式右边为“$BAC-CAB$”，故称为“Back - Cab”法则，以便记忆。

§1.2 通量与散度，散度定理

1.2.1 通量

在描绘矢量场的特性时，矢量场穿过一个曲面的通量是一个很有用的概念。在矢量分析中，将曲面的一个面元用矢量 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 来表示，其方向取为面元的法线方向，其大小为 $\mathrm{d}s$，即

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\hat{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-17}$$

$\hat{n}$ 是面元的法线方向单位矢量。$\hat{n}$ 的取法(指向)有两种情形：对开曲面上的面元，设这个开曲面是由封闭曲线 l 所围成的，则当选定绕行 l 的方向后，沿绕行方向按右手螺旋的姆指方向就是 $\hat{n}$ 的方向，如图 1-4 所示；对封闭曲面上的面元，$\hat{n}$ 取为封闭面的外法线方向。

若面元 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 位于矢量场 A 中，因为 $\mathrm{d}s$ 很小，其各点上的 A 值可视为是相同的。A 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的标量积 $A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 便称为 A 穿过 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的通量。例如在水流中，水流的速度 v 是一个矢量，$v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 就是每秒通过 $\mathrm{d}s$ 的水流量。通量是一个标量。

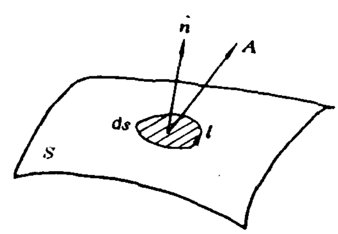

图 1-4 开曲面上的面元

将曲面 S 各面元上的 $A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 相加，它表示 A 穿过整个曲面 S 的通量，也称为 A 在曲面 S 上的面积分：

$$\Psi=\int_S A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_S A\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}s \tag{1-18}$$

如果 S 是一个封闭面，则

$$\Psi=\oint_S A\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

表示 A 穿过封闭面的通量。若 $\Psi>0$，表示有净通量流出，这说明 S 内必定有矢量场的源；若 $\Psi<0$，表示有净通量流入，说明 S 内有洞(负的源)。在“大学物理”中我们已知，通过封闭面的电通量 Ψ_e 等于该封闭面所包围的自由电荷 Q。若 Q 为正电荷，Ψ_e 为正，有电通量流出；反之，若 Q 为负电荷，则 Ψ_e 为负，有电通量流入。

1.2.2 散度，哈密顿算子

上述封闭面的通量反映了封闭面中源的总特性，但它没有反映源的分布特性。如果使包围某点的封闭面向该点无限收缩，则可表示该点处的源特性。为此，定义如下极限为矢量 A 在某点的散度(divergence)，记为 $\mathrm{div}A$：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta V} \tag{1-19}$$

式中 ΔV 为封闭面 S 所包围的体积。此式表明，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度是标量，它是 $\boldsymbol{A}$ 通过某点处单位体积的通量(即通量体密度)。它反映 $\boldsymbol{A}$ 在该点的通量源强度。显然，在无源区中，$\boldsymbol{A}$ 在各点的散度为零。这个区域中的矢量场称为无散场或管形场。

哈密顿(W. R. Hamilton)引入倒三角算符 ∇(读作"del(德尔)"或"nabla(那勒拉)")表示下述矢量形式的微分算子：

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1-20}$$

它兼有矢量和微分运算双重作用，因而与普通矢量有所不同：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{A} \cdot \nabla; \qquad \nabla \times \boldsymbol{A} \neq -\boldsymbol{A} \times \nabla$$

$\boldsymbol{A}$ 的散度可表示为算子 ∇ 与矢量 $\boldsymbol{A}$ 的标量积，即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1-21}$$

计算 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 时，先按标量积规则展开，再作微分运算。因而有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{A} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{1-22}$$

利用哈密顿算子，读者可以证明，散度运算符合下列规则：

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} \pm \nabla \cdot \boldsymbol{B} \tag{1-23}$$

$$\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{A}) = \phi \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \nabla \phi \tag{1-24}$$

1.2.3　散度定理

既然矢量的散度代表的是其通量的体密度，因此直观地可知，矢量场散度的体积分等于该矢量穿过包围该体积的封闭面的总通量，即

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}v = \oint_s \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-25}$$

上式称为散度定理，也称为高斯公式。利用散度定理可将矢量散度的体积分化为该矢量的封闭面积分，或反之。

例 1.1　点电荷 q 在离其 r 处产生的电通量密度为

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z, \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

求任意点处电通量密度的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{D}$，并求穿出以 r 为半径的球面的电通量 Ψ_e。

［解］

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi}\frac{\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \hat{x}D_x + \hat{y}D_y + \hat{z}D_z$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_x}{\partial x} &= \frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right] \\ &= \frac{q}{4\pi}\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5},\qquad \frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

$$\therefore\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^3+z^2)}{r^5}=0$$

可见，除点电荷所在源点($r=0$)外，空间各点的电通量密度散度均为零。它是管形场。

$$\Psi_e=\oint_s\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{q}{4\pi r^3}\oint_s\boldsymbol{r}\cdot\hat{r}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{q}{4\pi r^2}\oint_s\mathrm{d}s=\frac{q}{4\pi r^2}4\pi r^2=q$$

这证明在此球面上所穿过的电通量 Ψ_e 的源正是点电荷 q。

例 1.2 球面 S 上任意点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z=\hat{r}r$，试利用散度定理计算 $\oint_s\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$。

［解］ $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$

$$\oint_s\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_v\nabla\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}v=3\int_v\mathrm{d}v=3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi r^3$$

§1.3 环量与旋度，斯托克斯定理

1.3.1 环量

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿某封闭曲线的线积分，定义为 $\boldsymbol{A}$ 沿该曲线的环量(或旋涡量)，记为

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\tag{1-26}$$

这里线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是一矢量，其方向规定为使所包面积 ΔS 在其左侧，如图 1－5 所示。

矢量的环量和通量一样是描述矢量场特性的重要参量。我们已知，若矢量穿过封闭面的通量不为零，表示该封闭面内存在通量源。而矢量沿闭合曲线的环量不为零，则表示存在另一种源——旋涡源。例如在磁场中，它在环绕电流的封闭路径上的环量不等于零，电流就是产生该磁场的旋涡源。

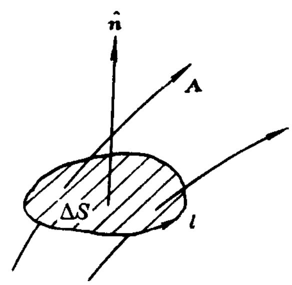

图 1－5 矢量场的环量

1.3.2 旋度的定义和运算

为反映给定点附近的环量情况，我们把封闭曲线收小，使它包围的面积 ΔS 趋近于零，取极限

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}\tag{1-27}$$

这个极限的意义就是环量的面密度，或称环量强度。由于面元是有方向的，它与封闭曲线 l 的绕行方向成右手螺旋关系，因此在给定点处，上述极限值对于不同的面元是不同的。为此，引入如下定义，称为旋度(curl 或 rotation)：

$$\operatorname{Curl} \boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{n}} \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left[\oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S} \tag{1-28}$$

可见，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度是一个矢量，其大小是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在给定点处的最大环量面密度，其方向就是当面元的取向使环量面密度最大时，该面元矢量的方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$。它描述 $\boldsymbol{A}$ 在该点处的旋涡源强度。若某区域中各点 curl $\boldsymbol{A}=0$，称 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场或保守场。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度可表示为算子 ∇ 与 $\boldsymbol{A}$ 的矢量积，即

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1-29}$$

计算 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 时，先按矢量积规则展开，然后再作微分运算，得

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) \\ &= \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{1-30}$$

即

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

旋度运算符合如下规则：

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \nabla \times \boldsymbol{A} \pm \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1-31}$$

$$\nabla \times (\phi \boldsymbol{A}) = \phi \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla \phi \times \boldsymbol{A} \tag{1-32}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1-33}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \tag{1-34}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1-35}$$

考虑到 ∇ 具有矢量和微分双重性质，不难证明这些公式，这留作读者的练习题。式(1-34)说明，任何矢量场的旋度的散度一定为零。式(1-35)是 $\nabla^2\boldsymbol{A}$ 的定义式，∇^2 称为拉普拉斯(Laplacian)算子。在直角坐标系中有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z$$

1.3.3 斯托克斯定理

因为旋度代表单位面积的环量，因此矢量场在闭曲线 l 上的环量就等于 l 所包围的曲面 S 上的旋度之总和，即

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1-36}$$

式中 ds 的方向与 d$\boldsymbol{l}$ 的方向成右旋关系。此式称为斯托克斯(Stokes)定理或斯托克斯公式。它可将矢量旋度的面积分变换为该矢量的线积分，或反之。

例 1.3　自由空间中的点电荷 q 所产生的电场强度为

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

求任意点处($r \neq 0$)电场强度的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{E}$。

［解］

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right]+\hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]+\hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right]\right\}$$

因
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^5},\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^5}$$
可见，$\hat{x}$ 向分量为零；同样，$\hat{y}$ 向和 $\hat{z}$ 向分量也都为零。故

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

这说明点电荷产生的电场是无旋场。

例 1.4 证明下述矢量斯托克斯定理：

$$\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}v=-\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}\qquad(1-37)$$

式中 S 为包围体积 V 的封闭面。

［证］ 设 $\boldsymbol{C}$ 为一任意常矢，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{C}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

从而有

$$\int_V\nabla\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}v=-\boldsymbol{C}\cdot\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}v$$

根据散度定理，上式左边等于

$$\oint_S(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\oint_S(\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

于是得

$$\boldsymbol{C}\cdot\int_V(\nabla\times\boldsymbol{A})\mathrm{d}v=-\boldsymbol{C}\cdot\oint_S\boldsymbol{A}\times\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

由于上式中常矢 $\boldsymbol{C}$ 是任意的，故式(1－37)必成立。

§1.4 方向导数与梯度，格林定理

1.4.1 方向导数与梯度

标量场 $\phi(x,y,z)$ 在某点沿 l 方向的变化率称为 ϕ 沿该方向的方向导数 $\partial\phi/\partial l$。它的值与所选取的方向 $\hat{l}$ 有关，设 $\hat{l}=\hat{x}\cos\alpha+\hat{y}\cos\beta+\hat{z}\cos\gamma$，得

$$\frac{\partial\phi}{\partial l}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l}$$

$$=\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma$$

引入

$$\nabla\phi=\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi=\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

则

$$\frac{\partial\phi}{\partial l}=\nabla\phi\cdot\hat{l}=|\nabla\phi|\cos(\nabla\phi,\hat{l})\tag{1-38}$$

上式表明，矢量$\nabla\phi$在$\hat{l}$上的投影等于ϕ在该方向上的方向导数。若选择$\hat{l}$与$\nabla\phi$的方向一致，则$\cos(\nabla\phi,\hat{l})=1$，此时方向导数将呈现最大值，即

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{\max}=|\nabla\phi|\tag{1-39}$$

这就是说，$\nabla\phi$的模就是ϕ在给定点的最大方向导数，而其方向就是该具有最大方向导数的方向，亦即ϕ的变化率最大的方向。因此，我们定义标量场$\phi(x,y,z)$在点$P(x,y,z)$处的梯度(gradient)为

$$\operatorname{grad}\phi=\nabla\phi=\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\tag{1-40}$$

它是一个矢量，其模和方向就是标量场ϕ在该点最大变化率的值和方向。

标量函数$\phi(x,y,z)=$const.(常数)的曲面称为等值面。若ϕ仅是(x,y)的二维函数，则$\phi(x,y)=$const. 的曲线称为等值线，例如以地面坐标(x,y)来画一座山的等高线，如图1－6所示，图中ϕ代表山上某点的高度。假如我们位于山脚处P点，显而易见，在不同方向上山势的陡缓各不相同。那么，哪个方向最陡，即ϕ的变化率最大呢？这个最陡的方向就是梯度$\nabla\phi$的方向。在标量场$\phi(x,y,z)$中，梯度的方向就是ϕ等值面的法线方向。理由是，沿等值面($\phi=$const.)上的任一方向$\hat{l}_c$，ϕ的方向导数均为零：

$$\frac{\partial\phi}{\partial l_c}=0,\ 即\ \nabla\phi\cdot\hat{l}_c=0\tag{1-41}$$

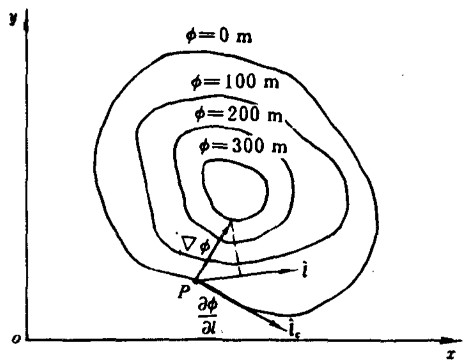

图 1－6　一座山的等高线图

后一式表明，梯度$\nabla\phi$的方向与过该点的等值面相垂直，并由梯度定义知，它指向ϕ增大的方向。由此，等值面的法线方向单位矢量$\hat{n}_c$可用梯度表示为

$$\hat{n}_c=\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\tag{1-42}$$

梯度运算有如下规则：

$$\nabla(\phi\pm\psi)=\nabla\phi\pm\nabla\psi\tag{1-43}$$

$$\nabla(\phi\psi)=\phi\nabla\psi+\psi\nabla\phi\tag{1-44}$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right)=\frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi)\tag{1-45}$$

$$\nabla f(\phi)=f'(\phi)\nabla\phi\tag{1-46}$$

$$\nabla\times\nabla\phi=0\tag{1-47}$$

$$\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\tag{1-48}$$