同济大学新编数学辅导丛书

同济大学工程数学教研室编著

线性代数复习和解题指导

（供本科生和硕士研究生入学考试复习使用）

同济大学出版社

线性代数复习和解题指导 供本科生和硕士研究生 同济大学出版社

同济大学新编数学辅导丛书

线性代数复习和解题指导

（供本科生和硕士研究生入学考试复习使用）

同济大学工程数学教研室　编著

同济大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习和解题指导/同济大学工程数学教研室编著. —上海:同济大学出版社,2002.9
供本科生和硕士研究生入学考试复习使用
ISBN 7-5608-2464-1

Ⅰ.线… Ⅱ.同… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 047536 号

同济大学新编数学辅导丛书
线性代数复习和解题指导
(供本科生和硕士研究生入学考试复习使用)
作　者　同济大学工程数学教研室　编著
责任编辑　李炳钊　责任校对　郁　峰　封面设计　永　正

出版发行　同济大学出版社
(上海四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622)
经　销　全国各地新华书店
印　刷　同济大学印刷厂印刷
开　本　787mm×960mm　1/16
印　张　14.25
字　数　285000
印　数　1—6000
定　价　18.00 元
版　次　2002 年 9 月第 1 版　　2002 年 9 月第 1 次印刷
书　号　ISBN 7-5608-2464-1/O·216

内容提要

本书是同济大学新编数学辅导丛书之一．全书按照同济大学数学教研室编的“线性代数”(高教三版)教材章节顺序编写，共六章，每章由内容提要、释疑解难、例题增补、解题指导和习题五个部分组成．全书对线性代数的一些基本概念和基本方法进行了深入的剖析和系统的综合，对容易混淆的概念进行了本质上的区分和归纳，所选例题题型基本而新颖，广泛而不重复，很大程度上充实和提高了课堂教学内容．本书可作为学习、复习和考研的教学参考书和辅导书．

同济大学
新编数学辅导丛书
编委会

前　言

本书是同济大学新编数学辅导丛书之一.

线性代数是一门基础数学课程,它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性.不少读者学习后觉得内容似乎懂了,但到分析、解决问题时,概念容易混淆,能力明显不足.为有助于解决这个矛盾,同时进一步培养和提高读者的数学素质,特别是逻辑思维能力、计算能力和演绎论证的能力,特编写了本书.

本书按同济大学数学教研室编《线性代数(第三版)》(高等教育出版社,1999 年 6 月)的章节顺序编写,所用术语、符号也与之一致.每章除主要内容的回顾之外,在"释疑解难"部分,对线性代数中许多基本的概念、基本的方法进行了深入的剖析或系统的综合;对一些容易混淆的概念作出本质上的区分和归纳,以使读者对它们所涉及的关于线性代数中最本质、最具特征的内容有一个较为全面和深刻的理解和把握.在"例题增补"部分,例题由浅到深,题型基本而又新颖,广泛而不重复.然而对非常基础而教科书已有的例题类型一般不再选入,以压缩本书的篇幅.例题涵盖了十多年来的直至 2002 年的一些典型的、精彩的考研题(这些题目都在相应的题序号后用括号标明年份,如例 **3.9**(2002)表明该例题是 2002 年的考研题)."释疑解难"和"例题增补"这两部分共约 150 个问题和例题,其内容与教科书紧密衔接,在很大程度上补充和提高了课堂教学的内容.在"解题指导"部分,对教科书中部分习题,它们或因概念性较强,或因解题时易被误解,或其本身就是较重要的结论,因此,本书作了较详尽的解答,并且一般地,在**注**中说明该题的意义或推广.各章的最后部分是练习题,书未再提供两份模拟试题,以供读者复习巩固和自测,并附有简答,凡是较难、较深的部分,都加注了"*"号,供读者选择阅读.

本书集中了编者多年来在同济大学讲授线性代数和在应用数学系举办的考研复习班讲课的经验和体会,其中大部分内容根据考研复习班讲稿改编而成,相信读者在认真地、完整地阅读完本书之后,在解决线性代数乃至于在处理一般数学问题的观点和能力上,应有一个实质性的提高.

本书可供大专院校广大学生、特别是使用同济大学数学教研室编《线性代数(第

三版)》的读者作为参考书．也特别适合报考研究生的读者复习使用．

本书由徐建平、胡志庠共同策划，由胡志庠主编并撰写．在本书的编写和出版过程中，得到同济大学应用数学系陆林生等老师和同济大学出版社、特别是李炳钊老师的大力支持和帮助，特此表示感谢．

由于编者水平有限，尤其是许多观点和方法都源自编者个人的教学实践，难免有不妥错误之处，恳请读者批评指正．

编 者

2002 年 3 月于同济大学

目 录

第一章 行列式

1.1 学习要求与内容提要

(一) 学习要求

1. 理解 n 阶行列式的定义.
2. 熟练掌握行列式的性质,会利用行列式的性质化简及计算列式.
3. 熟练掌握利用行列式按行(列)展开的方法计算行列式.
4. 会用克拉默法则求解线性方程组.

本章重点:行列式计算.

(二) 内容提要

1. n 阶行列式的定义

n 阶行列式是一个数,它表示 $n!$ 项的代数和,其定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{1.1}$$

其中,$(p_1 p_2 \cdots p_n)$为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,t 为这个排列的逆序数,求和符号 $\sum\limits_{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ 是对所有 n 元排列$(p_1 p_2 \cdots p_n)$求和.

2. 行列式的性质

(1) 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘此行列式;或者,行列式的某一行(列)的各元素有公因子 k,则 k 可提到行列式记号之外.

(4) 行列式中如果有两行(列)元素完全相同或成比例,则此行列式为零.

(5) 若行列式的某一列(行)中各元素均为两项之和,则此行列式等于两个行列

式之和．

例如

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad \text{第 } j \text{ 列} \\
\begin{vmatrix}
a_{11}\,a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a_{1j}') & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\,a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a_{2j}') & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}\,a_{n2} & \cdots & a_{nj}+a_{nj}' & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\qquad \text{第 } j \text{ 列} \\
\begin{vmatrix}
a_{11}\,a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\,a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}\,a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
+
\begin{array}{c}
\qquad \text{第 } j \text{ 列} \\
\begin{vmatrix}
a_{11}\,a_{12} & \cdots & a_{1j}' & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}\,a_{22} & \cdots & a_{2j}' & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}\,a_{n2} & \cdots & a_{nj}' & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\end{array}
$$

如果这样，就形象地称为行列式按第 j 列拆成两个行列式．

(6) 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数然后加到另一行(列)的对应元素上去，行列式的值不变．

3．行列式的按行(按列)展开

(1) 把行列式中元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后所成的子行列式称为元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij}；记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式．

(2) n 阶行列式等于它的任意一行(列)的各元素与对应于它们的代数余子式的乘积的和．即可以按第 i 行展开：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n);$$

或可以按第 j 列展开：

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

(3) 行列式中任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零．即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+A_{in}A_{jn}=0,i\neq j,$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+A_{ni}A_{nj}=0,i\neq j. \tag{1.2}$$

4．克拉默(Cramér)法则

考虑含有 n 个未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个线性方程的方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\tag{1.3}$$

当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，称为齐次线性方程组；否则，称为非齐次线性方程组．

(1) 如果方程组(1.3)的系数行列式 $D\neq0$，那么，它有唯一解：$x_i=\dfrac{D_i}{D}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其中，$D_i(i=1,2,\cdots,n)$是把 D 中第 i 列元素用方程组(1.3)的右端的自由项替代后所得到的 n 阶行列式．

(2) 如果线性方程组(1.3)无解或有两个不同的解，那么，它的系数行列式 $D=0$.

(3) 如果齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，那么，它只有零解；如果齐次线性方程组有非零解，那么，它的系数行列式必定等于零．

5. 一些常用的行列式

(1) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2) 上、下三角行列式等于主对角线上的元素的乘积．即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(未标明的元素均为零，下同).

特别，对角行列式等于对角线元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.\tag{1.4}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \lambda_{n-1} & & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(4) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) \triangleq \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).^{(注)} \quad (1.5)$$

(5) 对角线上元素均为 x、其他元素均为 a 的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a] \quad (1.6)$$

它的推导请参看题 1.4.

1.2　释疑解难

问 1.1　行列式定义的实质是什么?

答　由 n 阶行列式 D 的定义可以知道 D 就是行列式中所有取自不同行、不同列的 n 个元素之积的代数和,记为 $\sum(D)$,而每一项所带的符号是唯一确定的．撇开每个项所带的符号,就有:凡是取自 D 中不同行、不同列的 n 个元素之积,一定是 $\sum(D)$ 中的一项;反过来,$\sum(D)$ 中任一项也一定是 D 中不同行、不同列的 n 个元素之积．利用这个原则,如果再加上每一项的"定号"规则,对行列式的一些问题的解决可起到事半功倍的作用．

例如,考虑以 λ 为参数的 4 阶行列式(该行列式在第五章中有重要的应用):

(注) 记号"$\triangleq$"表示"定义为".

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43}-\lambda & a_{44}-\lambda \end{vmatrix},$$

不进行具体计算，由行列式定义即可知：

(1) $D(\lambda)$是一个关于λ的4次多项式，这是因为$\sum(D(\lambda))$中有正项$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$，而其他各项的$\lambda$的幂次均低于4，而且该多项式中$\lambda^4$的系数等于1.

(2) 多项式$D(\lambda)$中λ^3的系数是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$，即为主对角线元素之和的相反数，这是因为$\sum(D(\lambda))$中任一项，若它不含某主对角线元素作为其因子，则它至少不含两个主对角线元素作为其因子．于是，除了$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$项外，其余各项的$\lambda$的幂次至多是2；也即$D(\lambda)$中$\lambda^3$的系数就是$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda)(a_{44}-\lambda)$中$\lambda^3$的系数，而后者显然是$-(a_{11}+a_{22}+a_{33}+a_{44})$.

问 1.2 能否由行列式定义得到下列4个关于x的多项式的最高次项？

(1) $D_1(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 4x^4+3 \end{vmatrix}$； (2) $D_2(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x^4 \\ 2 & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ x & -1 & 2 & 4x^4 \end{vmatrix}$；

(3) $D_3(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^4 & x^4 \\ x & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ -4x & -1 & 2x^3 & 4x^4 \end{vmatrix}$； (4) $D_4(x)=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 & x \\ x & 2x^2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3x^3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

答 能够．只须考察$D_i(x)(i=1,2,3,4)$中所有取自不同行、不同列的4个元素之积中含x的幂次最高的那些项．

(1) 在$D_1(x)$的和式$\sum(D_1)$中，含x的最高幂次的项为$x\times 2x^2\times 3x^3\times(4x^4+3)$，从而得$D_1(x)$中$x$的最高幂次项为$24x^{10}$（顺便指出：$D_1(x)$中$x^6$项为$18x^6$，而$x^9$，$x^8$和$x^7$项系数都等于零）；

(2) 在$\sum(D_2(x))$中，含x的最高幂次的项有两个，分别是$x\times 2x^2\times 3x^3\times 4x^4$和$x\times 2x^2\times 3x^3\times x^4$，这两项的符号为正，故$D_2(x)$视为$x$的多项式，它的最高次项为$30x^{10}$；

(3) 在$\sum D_3(x)$中，含有x^{10}的共有两项，它们分别对应于位置(1,1)，(2,2)，

(3,3),(4,4)和位置(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)的元素之积,且这两项所带符号均为正,于是 $D_3(x)$ 中 x^{10} 项的系数为零;并且仅有一项含有 x^9,它是位置为(1,4),(2,1),(3,2),(4,3)的元素之积,且该项所带符号为负,故 $D_3(x)$ 中 x 的最高次项为 $-10x^9$;

(4) 在 $\sum D_4(x)$中,含 x 的最高幂次的项是对应于位置(1,4),(2,2),(3,3),(4,1)的元素之积,且该项所带符号为正,于是,$D_4(x)$作为 x 的多项式,它的最高次项为 $6x^6$.

问 1.3 (1) 余子式与代数余子式有什么特点?(2) 它们之间有什么联系?

答 (1) 对于给定的 n 阶行列式如式(1.1)所示,那么,元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 仅与位置(i,j)有关,而与 D 中第 i 行、第 j 列元素的大小和正负无关.

(2) 它们间的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{i+j}$,因而当 $i+j$ 为偶数时,二者相同;当 $i+j$ 为奇数时,二者相反.它们间的关系可用图示为

$$\begin{bmatrix} + & - & & & \\ - & + & - & \ddots & \\ & - & + & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & - \\ & & & - & + \end{bmatrix},$$

其中,符号"+"表示对应位置上 $A_{ij}=M_{ij}$;符号"-"表示对应位置上 $A_{ij}=-M_{ij}$.

问 1.4 范德蒙行列式有什么特点?

答 n 阶范德蒙行列式 $V_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$如式(1.5)所示,它有三个特点:

(1) 从列的角度看,第 j 列元素从上到下依次为变元 x_j 的零次幂、一次幂、……、$(n-1)$次幂,$j=1,2,\cdots,n$;

(2) 从行的角度看,第 i 行元素是各变元的$(i-1)$次幂,$i=1,2,\cdots,n$;

(3) 从结果看,把范德蒙行列式看作 n 个变元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数,它是关于这些变元的$\frac{1}{2}n(n-1)$次齐次函数;而且该齐次函数可分解为$\frac{1}{2}n(n-1)$个一次因式之积,而每个因子形如 x_i-x_j,其中,$1\leqslant j<i\leqslant n$,即足标大的变元与足标小的变元之差.反过来,$n$ 个变元之间形如这样的一次因子总计为$\frac{1}{2}n(n-1)$个.于是,n 阶范德蒙行列式是所有可能的足标大的变元与足标小的变元之差作为其因子的 n 元函数.除变元的名称外,这样的函数是唯一确定的.

问 1.5 学习克拉默法则的意义是什么？

答 可以从两个方面认识克拉默法则．

一方面，克拉默法则是用行列式求解二元（2 个方程）、三元（3 个方程）的线性方程组方法的推广，它给出了求解 n 元 n 个方程的线性方程组的一般结论．同时它又是一般的线性方程组理论，即求解 n 元 m 个方程的线性方程组在 $m=n$ 时的特殊情形，但这并不因此而降低其独立存在的意义；恰好相反，本书第三章与第四章中关于线性方程组理论的建立须依赖于克拉默法则．

另一方面，克拉默法则的独到之处在于：对于 n 元 n 个方程的非齐次线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$（此记号在以后章节中会详细讲到），它用 n 阶行列式给出了当系数行列式 $D=\det A\neq 0$ 时的（唯一）解的表达式：

$$x_j=D_j/D,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

其中，D 及 D_j 如本章内容提要 4(1)中所定义．它有很多的应用．

1.3 例题增补

例 1.1 由行列式定义，计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数．

解 由行列式定义，$f(x)$是所给行列式中所有取自不同行、不同列的元素之积的代数和，记为 $\sum(f)$，它是关于 x 的 4 次多项式（详见问 1.1）．因行列式中每个元素至多是 x 的一次幂，于是

σ 是 $\sum(f)$中的 x^4 项

$\Leftrightarrow$ σ 含有 4 个取自不同行、不同列的 x 一次项的元素；

$\Leftrightarrow$ σ 是取自位置(1,1)，(2,2,)，(3,3,)，(4,4)的元素之积；

$\Leftrightarrow$ $\sigma=2x^4$（容易知道该项的符号为正）；

σ 是 $\sum(f)$中的 x^3 项

$\Leftrightarrow$ σ 含有 3 个取自不同行、不同列的 x 一次项的元素，而余下一行、一列的元素（已唯一确定）是常数；

$\Leftrightarrow$ σ 是取自位置(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)的元素之积;

$\Leftrightarrow$ $\sigma=-x^3$(容易知道该项的符号为负).

例 1.2　求 5 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\\3&4&5&1&2\\4&5&1&2&3\\5&1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解法 1　利用各行的元素之和相同的特点,把除第 1 列以外的各列加到第 1 列,得

$$D=\begin{vmatrix}15&2&3&4&5\\15&3&4&5&1\\15&4&5&1&2\\15&5&1&2&3\\15&1&2&3&4\end{vmatrix}=15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&1\\1&4&5&1&2\\1&5&1&2&3\\1&1&2&3&4\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_5-r_4}15\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-4\\0&1&1&-4&1\\0&1&-4&1&1\\0&-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 列展开}}15\begin{vmatrix}1&1&1&-4\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix},$$

对上式最后一个行列式作变换:把各行加到第 1 行并提取第 1 行的公因子-1,得

$$D=-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-4&1\\1&-4&1&1\\-4&1&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{r_2-r_1}-15\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-5&0\\0&-5&0&0\\-5&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3\div(-5)\\ r_4\div(-5)}]{r_2\div(-5)}1875\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{vmatrix},\tag{1.7}$$

在式(1.7)最后一个行列式中,把最后一行依次与它前面的行交换,直至换到第 1 行;再在所得行列式中,把最后一行依次与它前面的行交换,直至换到第 2 行;……;直至