大学数学导学丛书

丛书主编　梅顺治　王艮远　杨永根

概率统计
方法与应用

范正森　童仕宽　主编

问　题　答　疑

范　例　分　析

应　用　举　例

数　学　实　验

科　学　出　版　社

大学数学导学丛书

概率统计方法与应用

范正森　童仕宽　主　编

王文科　涂诗甲　副主编

科学出版社

2001

内 容 简 介

本书为《大学数学导学丛书》之三，具有丛书的共同特点，即重视数学方法与应用，突出数学实验。按照浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计》（第二版）的基本内容，全书共分为8章，主要内容有：概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数学特征、大数定律、中心极限定理和抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析等。每章由知识要点、疑难解答、典型例题分析、应用与实验、习题解答与提示、训练题等部分组成。书末附有训练题参考答案与提示。

本书可作为大专院校基础课补充教材，也可作为本科生学习、复习和考研的辅导书和参考书。

大学数学导学丛书

概率统计：方法与应用

范正森 童仕宽 主 编

王文科 涂诗甲 副主编

责任编辑 徐一帆

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

武汉大学出版社印刷总厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2001年8月第 一 版 开本：850×1168 1/32

2001年8月第一次印刷 印张：9

印数：1～10 000 字数：235 000

ISBN 7-03-009635-5/O・1518

定价：12.80元

《大学数学导学丛书》编委会

本书主编：范正森　童仕宽

副 主 编：王文科　涂诗甲

编　　者：（以姓氏笔画为序）

王文科　王艮远　许桂水　范正森

党生叶　高遵海　涂诗甲　童仕宽

潘　雄

前　言

21 世纪，科学技术飞速发展，经济竞争日益激烈，对技术、人才提出了更高的要求。数学的作用十分重要，这已成共识。大学非理科专业数学课程教学，不再仅仅是学习基础数学知识，为其他学科提供工具，更重要的是传授数学思想，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力和应用数学的能力。

在大学数学教育改革深入开展的同时，也必须看到，由于数学课程教学是一个连续系统，具有一定的稳定性，加上数学学科本身的特点，许多高等学校的基础教学课程如高等数学、线性代数、概率统计等数学仍使用较传统的教材。这种形势，促使我们编写一套既能配合以上三门基础数学课程教学，又能反映数学教学改革的教学用书——《大学数学导学丛书》(暂定为 3 本)，丛书主编为梅顺治、王艮远、杨永根。这套丛书可以作为大学数学习题课教材、读者学习和复习的辅导书，还可以作为教师在课程教学改革试验中的补充教材。总之，这套参考书是有一些新意的。

这套丛书具有以下特点：

1. 重视数学思想方法的训练，注重演绎、归纳数学素质的训练，通过典型的问题和例题的解答及相应习题的训练，培养学生数学思维的能力和运用数学知识的能力。

2. 突出数学模型的思想，培养读者将实际问题转化为数学问题，并用数学知识加以解决的应用数学能力。书中结合教学进程，适当地介绍数学在实际问题中应用的一些例子，这些例子不仅可提高读者学数学的兴趣，而且对训练学生的数学建模能力有很大的帮助。

3. 设置了数学实验，注重数学课程教学与计算机及数学软件的应用相结合，指导读者在学数学的同时学习数学软件，且通过使

用数学软件上机实验来帮助学生学好数学。这样，既可提高兴趣，又可培养读者应用计算机解决问题的能力。

4. 在例题和训练题的配置上，除基本题用于巩固基础知识和基本技能外，还安排一部分提高题，选编近几年考研的题，使学生扩大视野，熟练技巧，提高综合能力。因此本套丛书还适合于考研复习。

《概率统计方法与应用》是这套《大学数学导学丛书》之三，它按照浙江大学盛骤等编写的《概率论与数理统计》(第二版)的基本内容，全书共分 8 章，每章由以下部分组成：

1. 知识要求。是每一章的基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中起到提纲挈领的作用。

2. 疑难问题解答。提出若干疑难问题并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法。思考问题是一种很好的学习方法。

3. 典型例题分析。给出若干基本、典型、综合例题的解法。有些例题解题前有“分析”，解后有“注”，对这些内容，读者应足够重视。模仿只是学习的初级阶段，重要的是提高独自解题的能力。

4. 应用与实验。尽管典型例题中的绝大多数都是应用问题，但有些章节仍结合学习内容，给出一两例更加实际的例子。并且给出了概率论与数理统计中常用的 Matlab 命令格式、程序及运行结果，供上机实习用。

5. 习题解答与提示。是为了便于读者学习配套教材——《概率论与数理统计》(浙江大学盛骤等编写第二版)，给出了该教材中部分有代表性的习题解答与提示。

6. 训练题有一定深度、广度，并强调知识的覆盖面，使读者得到必要的训练和提高。

书末附有训练题的参考答案与提示。

本书由范正森、童仕宽任主编，王文科、涂诗甲任副主编，参加编写的有王艮远、许桂水、高遵海、党生叶、潘雄等。本书凝聚了编者多年的教学实践经验和教学研究成果，希望本书的出版对数学教学、教材改革的发展能起到抛砖引玉的作用。

由于编者水平有限，时间仓促，书中难免有不足与错误之处，恳请同行、专家、读者批评指正。

编　者

2001 年 4 月

目　录

第一章　概率论的基本概念 …………………………… 1

1.1　知识要点 …………………………… 1

1.2　疑难问题解答 …………………………… 6

1.3　典型例题分析 …………………………… 8

1.4　应用与实验 …………………………… 15

1.5　习题解答与提示 …………………………… 17

1.6　训练题 …………………………… 19

第二章　随机变量及其分布 …………………………… 21

2.1　知识要点 …………………………… 21

2.2　疑难问题解答 …………………………… 25

2.3　典型例题分析 …………………………… 28

2.4　应用与实验 …………………………… 38

2.5　习题解答与提示 …………………………… 40

2.6　训练题 …………………………… 53

第三章　多维随机变量及其分布 …………………………… 57

3.1　知识要点 …………………………… 57

3.2　疑难问题解答 …………………………… 62

3.3　典型例题分析 …………………………… 65

3.4　应用与实验 …………………………… 77

3.5　习题解答与提示 …………………………… 80

3.6　训练题 …………………………… 84

第四章　随机变量的数字特征 …………………………… 86

4.1　知识要点 …………………………… 86

4.2　疑难问题解答 …………………………… 91

4.3　典型例题分析 …………………………… 92

4.4　应用与实验 …………………………… 109

4.5　习题解答与提示 …………………………… 114

4.6 训练题……………………………………………… 119
第五章 大数定律、中心极限定理及抽样分布 ……………… 126
5.1 知识要点……………………………………………… 126
5.2 疑难问题解答………………………………………… 130
5.3 典型例题分析………………………………………… 131
5.4 应用与实验…………………………………………… 141
5.5 习题解答与提示……………………………………… 145
5.6 训练题……………………………………………… 149
第六章 参数估计……………………………………… 154
6.1 知识要点……………………………………………… 154
6.2 疑难问题解答………………………………………… 160
6.3 典型例题分析………………………………………… 163
6.4 应用与实验…………………………………………… 174
6.5 习题解答与提示……………………………………… 178
6.6 训练题……………………………………………… 189
第七章 假设检验……………………………………… 192
7.1 知识要点……………………………………………… 192
7.2 疑难问题解答………………………………………… 197
7.3 典型例题分析………………………………………… 198
7.4 应用与实验…………………………………………… 212
7.5 习题解答与提示……………………………………… 216
7.6 训练题……………………………………………… 227
第八章 方差分析及回归分析……………………………… 231
8.1 知识要点……………………………………………… 231
8.2 疑难问题解答………………………………………… 240
8.3 典型例题分析………………………………………… 241
8.4 应用与实验…………………………………………… 249
8.5 习题解答与提示……………………………………… 255
8.6 训练题……………………………………………… 261
训练题参考答案与提示…………………………………… 264

第一章　概率论的基本概念

1.1　知识要点

1.1.1　内容提要

1. 事件及其关系与运算

（1）随机现象：在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。

（2）随机试验：称具有下面三个特点的试验为随机试验。

① 试验在相同条件下可重复进行。

② 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果。

③ 每次试验之前不能确定哪个可能结果会出现。

（3）随机事件：

① 随机试验的所有可能结果组成的集合称为样本空间，记为S。

② 样本点：样本空间的元素即随机试验的每个结果称为样本点。

③ 随机事件：称样本空间的子集为随机事件，简称事件。每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。特别地，由一个样本点组成的单点集称为基本事件，样本空间本身称为必然事件，空集称为不可能事件。

（4）事件的关系和运算：设试验E的样本空间为S，而A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$是S的子集。

① 包含：$A\subset B$表示"A发生必导致B发生"。

② 相等：$A=B$表示"两事件A和B要么同时发生，要么同

时不发生”。

③ 互不相容(互斥的)：若 $A\cap B=\varnothing$，称 A 和 B 互不相容。

④ 和(并)：$A\cup B$ 表示“事件 A 和 B 至少有一个发生”。

⑤ 积(交)：$A\cap B$ 表示“事件 A 和 B 同时发生”。

⑥ 差：$A-B$ 表示“事件 A 发生但 B 不发生”。

⑦ 逆：$\overline{A}$ 若 $A\cup\overline{A}=S$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件或逆事件。

(5) 事件运算的性质：

① 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

② 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

③ 分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

④ 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

2. 事件的概率

(1)概率的统计定义：在一个随机试验中，如果事件 A 出现的频率 m/n 随着实验次数 n 的逐渐增大，逐渐稳定于某个常数 p，则定义 A 的概率 $P(A)=p$。

(2)概率的古典定义：

1)古典概型

古典概型具有以下特点：

① 试验的样本空间的元素只有有限个。

② 试验中每个基本事件发生的可能性相同。

2) 概率的古典定义：在古典概型中，事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

(3) 几何概型：当随机试验的样本空间是某个区域，并且任意一点落在度量(长度，面积和体积)相同的子区域是等可能的，则事

件的概率可定义为

$$P(A)=\frac{s_A}{s}$$

其中 s 是样本空间的度量，s_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

(4)概率的公理化定义：设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果它满足下列条件：

公理 1 对任一事件 A 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

公理 2 $P(S)=1$。

公理 3 设 $A_1,A_2,\cdots$，是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

3. 概率的性质

1° $P(\varnothing)=0$

2° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

3° 设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(B)\geqslant P(A)$$

4° $P(\overline{A})=1-P(A)$

5° 对任意两事件 A,B 有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

更一般地，对任 n 事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

4. 条件概率，概率的乘法公式

(1) 条件概率：设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B/A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为事件 A 发生的条件下事件 B 的条件概率。

(2) 乘法公式:由条件概率所得公式 $P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$, $(P(A)>0,\ P(B)>0)$ 为概率的乘法公式。一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,$n\geqslant 2$,$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n/A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdot P(A_{n-1}/A_1A_2\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2/A_1)\cdot P(A_1)$

5. 全概率公式与贝叶斯公式

(1)全概率公式:设试验 E 的样本空间为 S,A 为 E 的事件,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 E 的一组事件,满足

1) $B_iB_j=\varnothing$, $i\neq j$, $i,j=1,2,\cdots,n$。

2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$,并且 $P(B_i)>0$, $i=1,2,\cdots,n$。(称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分。)

则称

$$P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)+\cdots+P(A/B_n)\cdot P(B_n)$$

为全概率公式。

(2) 贝叶斯公式:若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分,且 $P(B_i)>0$,$P(A)>0$, $i=1,2,\cdots,n$,则称

$$P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A/B_i)P(B_i)},\ i=1,2\cdots,n$$

为贝叶斯公式。

6. 相互独立事件

(1) 两事件相互独立:若 A,B 满足 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称 A,B 为相互独立的事件。

(2) 三事件两两独立:若 A,B,C 同时满足

$P(AB)=P(A)P(B)$,

$P(AC)=P(A)P(C)$,

$P(CB)=P(C)P(B)$,

称三事件 A,B,C 两两独立。

(3) 三事件相互独立：若 A,B,C 同时满足

$P(AB)=P(A)P(B)$，

$P(AC)=P(A)P(C)$，

$P(CB)=P(C)P(B)$，

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，

则称 A,B,C 为相互独立的事件。

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，若对任意 $k(1<k\leqslant n)$，任 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称 n 事件为相互独立的。

7. 伯努利概型

如果试验 E 只有两个可能的结果，把 E 独立地重复进行 n 次的试验称为伯努利概型。

若事件 A 在一次试验中发生的概率为 p，则在 n 重伯努利试验中 A 恰发生 k 次的概率为 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$(k=0,1,2,\cdots,n)$。此公式为二项概率公式。

1.1.2 学习要求，重点和难点

1. 学习要求

(1)理解随机事件，随机事件的频率，概率等概念，掌握事件的关系与运算，理解并掌握概率的性质，会利用性质计算事件的概率。

(2)掌握简单的古典概型的计算问题。

(3)理解条件概率的概念，掌握乘法公式，全概率公式和贝叶斯公式，并能熟练运用这些公式求解相关问题。

(4)理解事件独立性的概念。

2. 重点和难点

重点：随机事件的概率概念，古典概型的概率计算方法，概率的加法公式，条件概率和乘法公式的应用，全概率公式和贝叶斯公式的应用。

难点：古典概型的概率计算，全概率公式的应用。

1.2 疑难问题解答

1. 关于排列与组合

排列与组合是研究古典概型必不可少的基本知识与数学工具。

(1)排列：从 n 个不同元素中任取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。所有排列的个数称为排列数，记为 P_n^m，这里 $P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$。当 $m=n$ 时为全排列，$m<n$ 时为选排列。若从 n 个不同元素中取 m 个元素(可以重复)按照一定顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的一个可重复排列，可重复的排列数公式为 n^m。

(2)组合：从 n 个不同元素中任取 m 个元素 $(m\leqslant n)$，不计顺序组成一组，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的一个组合，所有不同组合的个数叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的组合数，记为 C_n^m，其中 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}$，组合数具有性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$。

(3)加法原理：做一件事，完成它有 n 类办法，第一类中有 m_1 种不同方法，第二类中有 m_2 种不同方法，…，第 n 类中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i$

种不同方法。

(4)乘法原理：做一件事，完成它要分成 n 个步骤，第一步有 m_1 种不同方法，第二步中有 m_2 种不同方法，…，第 n 步中有 m_n 种不同方法，那么完成这件事共有 $N=m_1m_2\cdots m_n=\prod_{i=1}^{n}m_i$ 种不同方法。

2. 两事件互不相容与互逆的区别

两事件互不相容指 $A\cap B=\varnothing$，即 A,B 不能同时发生；两事件互逆指 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=S$。即 A,B 必有一个发生，且仅有一个发生。由此可知，互逆一定互不相容，互不相容不一定互逆。

3. 关于独立性与互不相容

二者是两个完全不同的概念，它们分别从两个不同角度考察事件间的某种关系。前者是考察一事件的发生对另一事件的发生是否有影响，而后者考察在一次试验中两事件能否同时发生。当 $P(A)>0$ 且 $P(B)>0$ 时，事件 A,B 相互独立与互不相容不能同时发生；但当 A,B 至少有一事件的概率为零时，互不相容事件 A,B 可以是相互独立的。

4. 关于全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式主要用来解决较复杂事件的概率，为此常把一个复杂的事件分解为若干互不相容的简单事件的和，再通过分别计算这些简单事件的概率，最后利用概率的可加性得到最终结果。可以说全概率公式是概率加法公式与乘法公式的综合运用与推广。应用全概率公式，关键在于找出一组划分。

贝叶斯公式所解决的问题是在事件 A 已发生的条件下，推断引起事件 A 发生的某个原因 B 发生的概率。

1.3 典型例题分析

例 1 设 A,B,C 表示三个随机事件，试将下列事件用 A,B,C 表示出来。

(1) A 发生，B,C 不发生。

(2) A,B 都发生，而 C 不发生。

(3) 所有三个事件都发生。

(4) 三个事件至少有一个发生。

(5) 不多于两个事件发生。

(6) 三个事件都不发生。

解 1) $A\bar{B}\bar{C}$，2) $AB\bar{C}$，3) ABC，4) $A\cup B\cup C$，5) $\overline{ABC}$，6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$。

例 2 在十个整数 0,1,2,…,9 中，任取四个不同的数字能够组成一个四位偶数的概率是多少？

解 该试验的基本事件总数为从十个数字中任取四个不同数字的全部取法，即 P_{10}^4，其中奇、偶各半，而四位偶数应去掉千位数字为零的三位偶数，故所求概率为

$$\frac{\frac{1}{2}P_{10}^4-P_1^1P_4^1P_8^2}{P_{10}^4}=\frac{\frac{1}{2}\times10\times9\times8\times7-4\times8\times7}{10\times9\times8\times7}=\frac{41}{90}$$

例 3 100 件外形完全相同的产品，其中 40 件为一等品，60 件为二等品，设 A:“从 100 件产品中任取一件，连续抽取三次，所得三件产品均为一等品”。试求在下列情况下事件 A 的概率

(1) 有放回抽样；

(2) 无放回抽样。

解 (1) 有放回抽样

属重复排列问题，基本事件的总数 $n=100^3$，A 包含的基本事件数为 $m=40^3$，所以 $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{40^3}{100^3}=0.064$。

(2) 无放回抽样