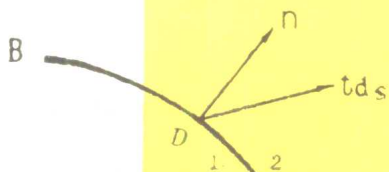


921084

FEIXIANXING
TANXING
LIXUE



非线性弹性力学

刘北辰 编著

西南师范大学出版社

921084

O343

0217

非线性弹性力学

刘北辰 编著

西南师范大学出版社

1988·重庆

非线性弹性力学

刘北辰编著

西南师范大学出版社出版

(重庆 北碚)

新华书店重庆发行所发行

达县新华印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 11.875 字数: 256 千

1988年9月第一版

1988年9月第一次印刷

印数: 1—2,000

ISBN 7-5621-0060-8/G·47

定价: 2.50元

前 言

本书是作者近五年来为昆明工学院的研究生讲授“非线性弹性力学”课程的教材和讲稿整理而成的。在这次付印之前，又作过全面地修改与补充。

昆明工学院工程力学专业及采矿专业的硕士研究生，在入学之前都学过线弹性力学，而他们的研究方向又涉及非线性大变形问题。鉴于研究生学习的需要，自1981年起，即开设了非线性弹性力学课，并由作者担任主讲。此后基本上每年讲授一遍。课程的意图首先是巩固和深化已有的弹性力学知识，介绍近代弹性力学的基本理论和方法。其次是使研究生学会怎样在弹性力学中运用张量分析这一有力的工具。为达到上述目的，同时鉴于工科大学课程中几乎未介绍过张量，故在开头处专用两章篇幅介绍了张量分析基础。接着，第三、四、五章用于介绍非线性弹性力学的基本理论。第六、七两章是这些理论的初步应用。第八章进一步介绍各向异性体的应力、应变关系。第九、十两章是平面问题和薄膜理论两个专题介绍。根据我们的经验，作为一门力学，应当使读者了解各项推导和结论的力学内容。考虑到张量方程的高度紧凑和抽象，加之初次应用不很熟悉，故在本书的前面几章中，也适当的把张量方程用读者熟悉的偏微分方程的形式表达出来。

本书的全部内容都由刘北辰编写。第六章至第十章是由

刘北辰写好初稿，经程赫明和樊江两位同志整理而成。屈维德教授审阅了本书的初稿，并提出了宝贵的意见。此外，本书的出版受到了昆明工学院的领导的关怀，及教务处教材科的帮助。作者在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中错误、缺点在所难免，敬请不吝指正。

作者

1987. 2

绪 论

弹性力学是研究弹性体在外界因素作用下发生于其内部的应力分布与变形规律的科学。它是现代技术科学中对各种结构进行强度和刚度计算以及稳定性计算的理论基础。在各门科学中，凡涉及弹性体的应力和变形分析，莫不借助于弹性力学的方法。

一般认为，数学弹性力学作为一门科学开始于十九世纪初叶，至今已有一百多年的历史。但当我们考察它的发展过程时，不难看到，在此期间发展得比较完备的是所谓“线性理论”。这种理论的特点为：所有的基本方程对未知函数及它们的导数都是线性式。它实质上是在小变形下的近似理论。不可否认，线性理论在解决许多实际问题中很有价值，在理论上也仍然存在着许多值得探讨的问题，它起过并将继续起到非常重要的作用。但是，必须明确指出，弹性力学作为一门精确的科学，本质上就是非线性的。即使从一般的材料力学教材中也不难部份地看出这一事实。因此，若不进一步了解精确的理论，则首先就不能正确掌握近似理论的实用范围。而且囿于线性理论将限制我们的视野，束缚我们解决问题的范围和能力。其次，随着生产和技术的不断发展，在实践中也提出了许多不能用线性理论解决的问题，特别是自本世纪20年代以来，这种问题已日渐增多。例如，现代的各种结构

中广泛应用柔性构件（如柔索、挠性轴、柔性齿轮、薄膜构件、橡皮构件……等），这些构件受力后，所发生的已不是肉眼难以观察到的小变形。又如，现代工业所运用的材料或遇到的介质越来越复杂，许多材料或介质的机械性质即使在弹性阶段也非虎克定律所能描述。这些问题都促使人们研究非线性弹性力学。最后还应提到的是，现代的非线性弹性力学是现代数学物理的一个重要分支。为在理论上发展数学弹性力学，也必须深入钻研非线性弹性力学。

二

非线性弹性力学与线弹性力学在总的任务上并无不同，但在研究的对象和方法上却有差异。众所周知，弹性力学的主要基石，是应变分析理论、应力分析理论及关于应力—应变关系的理论。在这三者的研究对象和方法上，线弹性力学和非线性弹性力学都有差别。

在应变分析和应力分析方面，由于处理的对象是大变形问题，非线性弹性力学不再采用小变形假设，而是作为普遍理论，从几何上严格分析单元体的尺寸及形状变化，以及变形前后线元素、面元素的大小及方位的变化，所得的几何方程及相容方程都是非线性的。而所列出的平衡方程也要考虑到单元体各面的方位和面积的变化，因而带有应变分量，并形成非线性关系。在这种分析中，即使材料的物理性质完全遵守虎克定律，所得的基本方程也不再是线性的。这种仅仅由于考虑大变形而构成的非线性问题，一般称为“几何非线性问题”。

在应力—应变关系方面，非线性弹性力学要处理较虎克

定律更为复杂的非线性关系。虽然对于许多复杂的材料来说，它们的本构关系问题仍未得到彻底解决，但非线性弹性力学已从原则上确立了弹性范围内应力—应变关系应遵循的准则，显然，当材料具有非线性的应力—应变关系时，即使变形微小，也会因物理方程的非线性，造成基本方程的非线性。这种仅仅由于材料物理性质不遵循虎克定律而造成的非线性问题，一般称为“物理非线性问题”。

当然，我们必定会想到，在最普遍的情况下，存在着更为复杂的、既包括几何非线性又包含物理非线性的问题。

所有这一切，都使非线性弹性力学有别于经典的线性弹性力学。

三

本世纪20年代以来，经过许多科学家（其中也包括我国科学家）的努力，非线性弹性力学已取得了相当大的进展，成果很多，显然不可能在一本书中作全面的介绍。本书的目的，仅限于基本理论和少数专题的介绍，以作为非线性弹性力学的入门。为使数学推导尽量简洁而又不受坐标系的影响，常采用张量分析作为工具。考虑到读者可能很少接触张量，开头加了两章结合需要简单介绍张量的内容。另一方面，为便于读者了解所得方程的物理意义，也常常把结果用一般的微分方程表示出来，特别是在求解具体问题时，更常用微分方程。总之，本书重点在于介绍非线性弹性力学的基本理论和方法，不追求全面和形式的紧凑。

目 录

绪 论	(1)
第一章 张量分析基础	(1)
第一节 概 述	(1)
第二节 求和约定	(4)
第三节 坐标变换	(8)
第四节 几种常见的函数变换	(12)
第五节 协变张量与逆变张量	(17)
第六节 张量代数	(22)
第七节 商 律	(26)
第二章 张量在几何上的应用	(30)
第一节 尺度几何与度量张量	(30)
第二节 缩合张量与克氏符号	(37)
第三节 E_3 内的曲线坐标	(44)
第四节 倒数基本系统, 矢量的协 变分量和逆变分量	(56)
第五节 张量的协变导数	(64)
第六节 协变导数的含义	(67)
第七节 黎曼——克里斯托菲尔张量	(70)
第三章 变形的几何理论	(75)
第一节 位移, 拉格朗日坐标与欧拉坐标	(75)
第二节 线元长度的变化与应变张量	(79)
第三节 线元方向的变化, 剪变形	(87)
第四节 单元体绕轴的转动	(89)
第五节 主应变, 体积变化	(93)
第六节 小变形公式的应用范围	(97)
第七节 变形连续条件(相容方程)	(101)

第八节	用曲线坐标求解时的基本关系式	(106)
第四章	应力理论	(116)
第一节	应力张量	(116)
第二节	平衡方程	(122)
第三节	平衡方程的简化	(129)
第四节	应力边界条件	(133)
第五章	能量原理与应力——应变间的关系	(136)
第一节	虚功方程和弹性势能	(136)
第二节	哈弥尔顿原理与最小势能原理	(143)
第三节	均质各向同性体的应力——应变关系	(146)
第六章	某些特殊问题的解	(153)
第一节	各向均匀伸展问题	(153)
第二节	等直圆杆的纯扭转	(157)
第三节	圆管同时受到拉伸、径向 膨胀和扭转的作用	(162)
第四节	圆棒的变形	(169)
第五节	管的翻转	(172)
第六节	等直圆柱体绕其轴线旋转的问题	(174)
第七节	厚壁球壳的对称膨胀	(177)
第八节	矩形截面杆的弯曲	(185)
第七章	小变形与有限变形的叠加	(192)
第一节	一般理论	(192)
第二节	叠加在有限均匀伸长上的小变形	(198)
第三节	柱体的小扭转与有限伸长的叠加	(207)
第四节	在材料可压缩的情况下按势函数求解	(215)
第五节	在材料不可压缩的条件下, 按势函数求解	(220)
第六节	压痕问题	(225)
第七节	受拉平板的微小弯曲	(231)
第八节	叠加在有限伸长上的平面应力问题	(241)
第八章	应变能函数与各向异性体	(245)
第一节	关于不变量的五个定理	(246)
第二节	应变能函数 W	(248)

第三节	对称性变换与W函数保持形式不变的条 件	(251)
第四节	正交各向异性体的W函数	(256)
第五节	横观各向同性体	(257)
第六节	应力——应变关系	(260)
第七节	曲线各向异性	(264)
第八节	几何约束	(268)
第九章	有限平面变形	(273)
第一节	二维 e 系统	(273)
第二节	叠加在均匀膨胀上的平面变形	(276)
第三节	Airy 应力函数	(281)
第四节	应力——应变关系, 平衡方程	(285)
第五节	用复变函数表示的几何关系	(294)
第六节	用复变函数表示应力及平衡方程	(301)
第七节	不可压缩材料的置换方程	(306)
第八节	六面体的弯曲	(310)
第九节	广义剪切问题	(314)
第十节	对蒙尼型材料的特殊解	(317)
第十章	弹性薄膜理论	(321)
第一节	平板状薄膜中的内力	(322)
第二节	平衡方程与应力函数	(326)
第三节	中面内的应力——应变关系	(328)
第四节	平衡方程的简化	(332)
第五节	带圆孔或中心有刚性片 的板状薄膜的径向变形	(334)
第六节	变形后所形成壳体的几何关系	(340)
第七节	内力和内力矩	(342)
第八节	表面条件	(346)
第九节	平衡方程	(348)
第十节	内力与变形的关系	(349)
第十一节	轴对称问题	(354)
第十二节	板状圆形薄膜的膨胀	(359)

第一章 张量分析基础

第一节 概 述

从本章开始，介绍力学及物理学研究中的一个有力的工具——张量分析。

长期以来，力学和数学之间一直存在着相互影响、相互促进的关系。常常是力学的研究促进了某些数学部门的发展，而数学的成果又对力学研究起促进作用。这种关系在张量分析的发展和应用过程中，表现得极为明显。本书的头两章，将脱开力学内容介绍张量分析的基础知识。这对于某些读者说来，可能感到抽象。但只要循着数学的途径去熟悉它的基本规律及内在联系，今后再结合力学内容反复思考，则定能掌握这一工具。

一、什么是张量

在力学或其它科学的研究中，经常遇到这样一些量，它们在一定的参考系（或称标架）内可由一组函数（通常称为分量）完整地表示。但这些物理量或几何量本身（或称为它们的实体），却与所选的参考系无关。也就是说，尽管这种量在不同的参考系内由不同的函数来描述，但都是同一事物的表现。这类物理量或几何量很多，它包括了力学遇到过的绝大多数的量。例如我们所熟悉的一点的应力状态，它是存在于受力后的弹性体中的一个“实体”。该实体本身并不因

所选标架不同而有所变化，它仍是客观存在的同一事物，但在不同的标架内却用不同的应力分量函数来表示。

进一步说，既然不同标架内的分量所表示的都是同一事物，则这些不同参考系内的分量之间必然存在着一定的转换关系，或者说有一定的转换规律。这些规律要能体现事物本质的不变性，因此一般说来随所表达的量不同而有所不同。但是，人们发现有充分广阔的一类量，它们在不同参考系内的分量之间存在着共同的、特定的转换规律，这类量就统称为“张量”。例如，应力分量和应变分量的转换都遵循共同的二阶张量的转换规律，故从数学上看，都是二阶张量。

因此，张量是一类其实体不随所选参考系而变的量，它在不同参考系内的分量间存在着一定的、统一的变化规律。

张量分析的任务，是脱开具体的物理内容，从数学的角度对张量作统一的研究。

二、不变性

从以上的叙述可初步看出，张量是在保持本质不变的条件下具有统一变换规律的量。因此，保持其本体不变是张量的重要特点。为更明确起见，这里再作一些说明。

在数学中，凡是一个对象的本质或实体，不因坐标变换而改变的，都可称为数学的不变量。

例如，在一定的坐标系内，空间某一定点 P 的位置可由一组坐标值 x^i ($i = 1, 2, \dots, n$) 确定。当坐标系变换之后， P 点的位置又由另一组新的坐标值 y^i ($i = 1, 2, \dots, n$) 来描述。但这里变化的只是参考系，而不是点的位置本身。因此，一个定点的位置是个数学的不变量。

再以矢量来说，空间的两个点(P_1, P_2)可决定一个矢量 P_1P_2 。该矢量在一定的坐标系内可唯一地由一组分量 A_i 表示。坐标系有变换时矢量本身并无任何变化，它仍是 P_1P_2 ，但在新参考系中它却由另一组不同的分量 B_i 来表示。因此，一定的矢量也是个数学不变量。

依此类推，一条曲线、一个曲面都是所说的数学的不变量。

如果一个数学不变量，当坐标系变换时，它在各系内的分量之间的变换服从统一的规律（张量变换规律），则这种量就可以用张量表示。故张量必具不变性，这一点十分重要。

三、张量分析作为思考和推导工具的重要意义

在物理和力学的研究中，凡能称之为自然规律的结论，它一方面必然来自在一定的参考系内对事物的观察分析与作逻辑推导，另一方面，其推导结果又必须对充分广泛的一大类参考系都正确。否则不能认为是普遍规律。于是，为保证思考与推导的正确，需要一种工具。这种工具既可以用于在某个具体的参考系内进行推导分析，同时只要按照它的规律去使用，其推导结果对充分广泛的一大类参考系都正确。张量分析恰是这样一种工具，因为它具有不变性，只要照它的规则去使用，则其推导结果能保证对充分广泛的各种参考系都正确。虽然在不同的参考系内具体结论的形式有所不同，但所表示的始终是那个与参考系无关的实体。因此，如果我们能按张量的规则去作推导并形成张量方程，则可以排除参考系的影响。同时，张量分析的表达形式也十分紧凑，含义丰富。显然，正是这些意义上，张量分析是重要的思考和推导工具。

最后应当指出，张量分析的内容相当丰富，不可能在很短的篇幅内讲完。本书只能结合后面的需要，对常用的张量运算规则及定理作简要介绍。

第二节 求和约定

在正式介绍张量运算之前，本节先作好一些符号方面的准备工作。

一、求和约定

在各种运算之中，经常会出现多项的求和式。过去对这种求和式的一般缩写法，是写出典型项并在前面写出 Σ 符号，在此符号的上、下边注明指标的变化范围。但是，这种写法用于比较复杂的求和式时，常会出现若干个 Σ 符号，显得重复和不紧凑。实际上，只要建立下述的求和约定，这些 Σ 符号即可省去。

求和约定的内容为：如果在某个表达式中有一个指标出现两次，就意味着这个表达式是对该指标所有可能值的求和式。

例如，线性式 $\sum_{i=1}^4 a_i x_i$ 中指标 i 出现了两次。按照求和约定，可以省去 Σ 符号而写成 $a_i x_i$ ，并说明 $i = 1 \sim 4$ ，则它的意思就是 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$ 。

又如，式

$$a_j x_i \quad (i = 1, 2, 3), (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1-1)$$

按求和约定，所表示的是下列三个和式：

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

这里，在式(1-1)中， i 称为“区别标”，它表示式(1-2)中的式子的区别在于 i 值不同。另一个指标 j 两次出现，它称为“求和标”或“哑标”。哑标用什么字母来表示是可以随时变化的，有如积分变量可改为别的字母一样，但只要它出现两次，就代表对之求和。例如，式(1-1)也可写成 $a_{ik}x_k$ ， k 也从1变到4，则其意义无变化。

今后，除作了专门注明之外，将认为区别标及求和标的变化范围都是 $1 \sim n$ 。另外，如果要中止求和约定，可以用括号把不要求和的指标括起来，或在式子后面注明：不要求和。

下面再看几个例子。

按照求和约定，二次式 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ 可以写成 $a_{ij}x_i x_j$ 。由

于此式同时对 i 及 j 求和（此二者都是求和标），因此它代表一个具有 n^2 项的和式。再看式子

$$a_{ij}a_{jk}$$

这里 i, k 都是区别标， j 是求和标。因此， $a_{ij}a_{jk}$ 共代表 n^2 个和式，其中每个和式又有 n 项，其型式为

$$a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \cdots + a_{in}a_{nk}$$

如果我们要表示这个和式中的某一项，则可写作 $a_{i(j)}a_{(j)k}$ 。

最后还要说明，由于张量运算中要表示各种意义不同的量，仅用下角标不够，还经常要用上角标。例如， n 维线性空间内一点的坐标，可以用 $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 来表示。这里的上角标并不代表幂次，它只是个区别标而已，作用与下角

标相同。

二、矩阵、行列式的表示法与柯氏符号 (Kronecker delta)

为了简洁, 今后将用 (a_{ij}) 或 (a_j^i) 代表一个矩阵。其意义为:

$$(a_{ij}) \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad (a_j^i) \equiv \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

同样, 一个 n 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

可相应地写作 $|a_{ij}|$ 或 $|a_j^i|$ 。另外, 两个行列式的乘积可简写为

$$|a_{ij}| \cdot |b_{ij}| = |c_{ij}| \quad \text{或} \quad |a_j^i| \cdot |b_j^i| = |c_j^i|$$

采用第一种写法时, $|c_{ij}|$ 中的每一个元素 $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$ 。不难看出, 这个式子表明 c_{ij} 等于 $|a_{ij}|$ 中的第 i 行与 $|b_{ij}|$ 中第 j 列相应元素的乘积之和。采用第二种写法时, $c_j^i = a_k^i b_j^k$, 其意义与上述相同。

下面引入一个张量运算中常用到的符号, 即柯氏符号 δ_j^i 或 δ_{ij} 。以 δ_j^i 为例, 它的意思是:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{若 } i=j, & \delta_j^i = 1 \\ \text{若 } i \neq j, & \delta_j^i = 0 \end{array} \right\} \quad (1-3)$$

δ_{ij} 的意义与此相同。我们现在只把它看作是个符号, 其它性质后面另作讨论。