高等学校试用教材

系统辨识

天津大学 刘豹 王正欧 编著

机械工业出版社

高等学校试用教材

系 统 辨 识

天津大学 刘 豹 王正欧 编著

机 械 工 业 出 版 社

（京）新登字054号

本书是工业自动化仪表专业必修课教材，主要讨论动态系统辨识的理论和方法，包括参数估计的基本理论和方法、非参数系统、单输入单输出线性系统、多输入多输出线性系统、线性时变系统、非线性动态系统、线性闭环系统、小样本动态系统及其他系统辨识的基本理论和方法。本书选材较新，内容介绍深入浅出，每章后附有习题，适于教学和自学。

本书可作自动化类各专业研究生和高年级学生必修课或选修课教材，也可供工业自动化仪表、自动控制、系统工程、管理工程、生物医学工程及其他有关专业的教师、学生、研究人员、科技人员参考。

系统辨识

天津大学 刘 豹 王正欧 编著

*

责任编辑：王小东 版式设计：王 颖

封面设计：郭景云 责任校对：肖新民

责任印制：卢子祥

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

邮政编码：100037

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16·印张 17·字数 415 千字

1993年10月北京第1版·1993年10月北京第1次印刷

印数 0 001—2 000·定价：8.45元

*

ISBN 7-111-03708-1/TP·183（课）

序

系统辨识是自动控制学科中发展极其迅速的一门分支学科。从自动控制领域来讲，系统辨识是早年控制系统动态特性测试的继续。动态测试对自动化系统专业人员和工业自动化仪表专业人员来说，是一种十分重要的专业技术，从实验室专用的低频测试仪、频率特性测试仪、相关测试仪到现场应用的从记录纸数据推算系统动态特性和白噪声或M序列输入测试法都曾流行一时，为测试系统动态特性作出过贡献。这些早期技术，大都属于非参数辨识，即实验得到的是系统的过渡过程曲线或频率特性曲线，由此再推算出系统的脉冲过渡函数或传递函数。“现代”系统辨识则主要是由系统的输入输出直接求动态方程式的结构和参数。辨识方法可以较好地解决系统噪声和测量噪声干扰问题，可以处理多变量和非线性系统问题，可以对付时变系统和分布参数问题，可以在多级大系统上作参数估计。

系统辨识的用途现在除了测试动态特性或寻求系统的数学模型之外，还有许多派生的新用途，最直接的派生用途是构成自适应（包括自校正）系统——系统一方面被自动控制，一方面又随时辨识自身动态特性的变化，当系统本身动态特性不管由于什么原因而变动且被辨识到后，又马上调整自动控制规律的参数，使系统能适应新情况，使整个系统的工况仍维持在尽可能的最优状态下。一个动态系统，如果在外界环境基本不变的条件下其动态发生了变化，则显示系统内部条件发生了变化。由此，就可以用系统辨识作为自动化系统（设备、机器、装置等）的故障诊断或元件失效诊断，人体药物反应和生理变化的体外检测是故障诊断的特例。这种对于不能直接测量的或直接测量要付极高代价的系统中参数的测量问题往往可以用系统辨识的方法来解决。

如果要追溯系统辨识的起源，则除了动态特性测试之外，还可以从另外一条更为普遍的途径去探索，那就是参数估计。凡是依靠多次重复试验所得数据来研究问题的领域，如化学试验、生物实验、变量的测量、天文学观察等等，都要作从受到污染的观测值去寻求最接近被测值的估计值的工作，这就是参数估计。参数估计是系统辨识中的基础部分，在此，它被解释成在系统结构已知的情况下从系统中许多被观测到的数据去找出最接近被观测值的估计值，而系统辨识则被广泛地认为是从一个系统的被观测到的输入输出数据去建立一个最接近实际系统的输入输出关系的数学模型。

由于学科的发展，不同学科的重叠交叉已成为学科发展中的普遍现象。所以，在系统辨识的文献中出现了许多计量经济学的名词术语、方法和手段是不足为奇的。实际上，系统辨识中还普遍地采用了时间序列的概念和方法，将来肯定还要引入专家系统、人工智能等一些方法。

本书作为工业自动化仪表专业的必修课的一本参考教材，早已列入高等学校工科机电、兵工类教材编审出版规划（1986～1990）。由于规划对本书篇幅的限制，所以，提纲挈领、突出重点就成为编写此书的主要手法了。全书共分十章，前面是绪论；第一章介绍模型的类别；第二章复习动态特性试测方法，对自动化类专业是较实用的一章；第三章是最基本的参数估计，第四章为系统辨识基础，这两章是本书的重点；第五章是多变量系统，主要讲结构

变量的基本概念和几种典范型结构及其辨识方法；第六章是时变系统，其概念可以从递推算法取得；第七章是非线性系统，以几个特例说明非线性系统辨识的特点；第八章是闭环系统，阐述了闭环系统中的可辨识问题及一般辨识特性；第九章是小样本参数估计方法，这是我们多年来研究系统建模课题的成果，此方法在实际参数估计中有一定的应用价值；第十章包括试验设计、模型检验和其他一些特殊系统的辨识方法。

本书前四章是按我1980年开始讲授的笔记编写的，1984年以后王正欧副教授讲授时又加了多变量系统辨识等丰富的内容，第五章以后，基本上是他编写的。尽管我们在编写时采用了交叉检验的方法以免发生错差，但由于编写过程很长，故书中大小错误不可避免，望广大同行指正。

天津大学

刘 豹

1992年11月

目　录

序

绪论 ……1

参考文献 ……4

第一章　动态系统数学模型的类别 ……5

第一节　数学模型的应用及其类型 ……6

第二节　输入输出模型 ……5

第三节　状态方程模型 ……7

参考文献 ……11

第二章　动态系统辨识的非参数方法 ……12

第一节　概述 ……12

第二节　时域法 ……12

第三节　频域法 ……19

习题 ……25

参考文献 ……25

第三章　参数估计理论和方法 ……26

第一节　概述 ……26

第二节　最小二乘估计（LS） ……26

第三节　参数估计的一般特性 ……38

第四节　最小均方估计（MS） ……43

第五节　极大似然估计（ML） ……48

第六节　LS、MS、ML、MAP估计方法的比较 ……51

第七节　估计的渐近特性 ……53

习题 ……56

参考文献 ……57

第四章　单输入单输出线性动态系统（SISO）的辨识 ……58

第一节　动态系统辨识的任务 ……58

第二节　最小二乘估计方法（LS） ……59

第三节　时变参数最小二乘估计方法 ……69

第四节　广义最小二乘估计方法(GLS) ……74

第五节　扩大最小二乘估计方法(ELS) ……83

第六节　辅助变量法（IV） ……84

第七节　多级最小二乘辨识方法（MSLS） ……90

第八节　极大似然估计法（ML） ……97

第九节　最优辅助变量估计法（又称精选辅助变量—近似极大似然法即精选 IV-AML法） ……104

第十节　随机逼近法 SA ……111

第十一节　统一的递推参数估计算法和收敛性分析 ……115

第十二节　各种辨识方法的比较 ……119

第十三节　模型阶数检验 ……121

习题 ……132

参考文献 ……133

第五章　多输入多输出线性动态系统(MIMO)的辨识 ……135

第一节　概述 ……135

第二节　等价关系、等价类和规范型 ……136

第三节　多变量系统的结构（不变量及其对应的规范型） ……137

第四节　输入输出差分方程模型（ARMA模型） ……142

第五节　线性多变量系统的结构参数辨识 ……145

第六节　线性多变量系统的参数辨识 ……150

第七节　多变量系统的脉冲响应阵表示及其估计算法 ……151

第八节　状态方程转化为规范型的一种简易方法 ……158

第九节　多变量系统传递函数阵的辨识 ……162

第十节　由传递函数阵直接得到多变量系统规范型的实现算法 ……165

第十一节　结论 ……169

习题 ……170

参考文献 ……170

第六章　线性时变系统的辨识 ……172

第一节　概述 ……172

第二节 时变参数模型及其参数估计方法 ……172
第三节 卡尔曼滤波和最优平滑算法 ……175
第四节 改良最优滤波法（TSKS算法）……177
第五节 改进的增广卡尔曼滤波算法 ……181
第六节 检测参数变化的统计方法 ……186
习题 ……186
参考文献 ……187
第七章 非线性动态系统的辨识 ……188
第一节 概述 ……188
第二节 Volterra级数的表示及其辨识方法 ……188
第三节 具有线性参数的非线性差分方程 ……191
第四节 具有非线性参数的非线性差分方程 ……191
第五节 Hammerstein 模型的辨识 ……193
第六节 双线性模型的辨识 ……196
第七节 动态过程的非线性检验 ……201
参考文献 ……202
第八章 线性闭环系统的在线辨识 ……204
第一节 闭环系统的可辨识性概念 ……204
第二节 无附加信号的过程辨识 ……206
第三节 带附加信号的过程辨识 ……212
第四节 闭环调节回路中的辨识方法 ……213
习题 ……214
参考文献 ……214
第九章 小样本动态系统辨识问题 ……215
第一节 引言 ……215
第二节 LKL 估计方法 ……216
第三节 ESML 估计 ……222
第四节 小样本系统的阶数辨识 ……228
第五节 双线性系统小样本极大似然估计法（BSSML）……238
参考文献 ……240
第十章 动态系统辨识的其它问题 ……242
第一节 分布参数系统辨识问题 ……242
第二节 连续系统辨识问题 ……246
第三节 房室模型的辨识 ……248
第四节 状态和参数联合估计问题 ……252
第五节 系统辨识的试验设计 ……254
第六节 模型检验 ……260
第七节 过程辨识的实际步骤 ……261
参考文献 ……262
附录 ……263
附录A 投影矩阵 ……263
附录B 矩阵求逆公式的证明 ……265
参考文献 ……265

绪　论

一、系统辨识的意义和作用

系统辨识是从系统的输入输出数据测算系统数学模型的理论和方法。参数估计则是从已知系统数学模型的结构估计其参数的方法。

系统辨识和一切自然学科一样是随着客观的需要而发展起来的，其渊源可归结为如下四个方面。

1．控制理论发展的需要　现代控制理论的一切理论的基础是必须有一个足够精确反映动态系统输入输出关系或进一步反映输入输出和系统状态变量关系的数学模型。这个数学模型可以从机理推演得出，也可以从动态试验得到。从动态系统的输入输出数据来测算系统的数学模型就称为系统辨识，它的前身是动态测试（如阶跃法、脉冲法、频率法等等）。因此系统辨识是近代控制理论的一个重要组成部分，是一门分支学科，也可以说，系统辨识是经典动态测试的发展。

2．系统工程发展的需要　系统工程主要是用定量方法来研究大系统的一门学科，其基础工作也是建立数学模型（简称建模）。系统工程建模有许多方法，其中之一就是系统辨识。当然系统工程中有许多是事理系统，有的很难用定量方法来描述，必须采取其他一些特殊的方法。

3．统计学的需要　例如生物计量学（Biometrics）以及经济计量学（Econometrics）等等都要用到系统辨识的技术，它们有一套自己的辨识和估计的模式。

4．信息理论的需要　信息理论中很重要的一个内容是滤波，需要把受噪声污染的信息通过滤波来提取有效信息，滤波的前提也需要先构成模型，因此也要用到系统辨识技术。在需要传输大量信息时，有时可以不用传输信息，而只要传输一个能反映此种信息的模型，即可得到所需要的全部信息。

系统辨识的目的是建立数学模型，那么数学模型有哪些用处呢？归纳起来有以下几个方面：

1．用于控制　如上所述，对经典控制，已知数学模型可以改善系统的动态特性、进行调节器的参数整定、设计特殊调节规律等等。对现代控制系统，有了数学模型，可以进行最优控制、自适应控制、自整定控制等等。

2．用于预报　预报的基础是模型，有了模型，就可作一步、二步、短期、中期甚至长期预报。进行准确的预报对国民经济各部门乃至地方、企业等等的发展都有重要意义。

3．用于规划　正确的规划来源于正确的模型，利用模型，可以进行各种方案的最优规划。

4．用于仿真研究　有了模型，就可在计算机上进行各种仿真研究，试验各种不同的策略，观测其后果，从而分析、制定策略。如对于军事作战方案的制定，就可采用现代化的仿真手段。此外，一些不允许做试验的系统，如核反应研究，也可以通过仿真来进行。

5．估计物理参数　如医务界对于人体内参数的测定，可以通过系统辨识的方法来进行。又如反应堆中等离子体边界、矿藏区域储量都可以从少数几个测点推到全体。

6．生产过程诊断　过程参数监视或破损探测均可通过动态模型来反映，如果模型参数发生了变化，即表明过程有了变化或出现了破损，需要及时处理。

当然建立数学模型的方法不止系统辨识方法一种。一般来讲，建立系统的数学模型有以下三种方法。这些方法既可单独用，也可混合用，视系统的复杂程度和建模目的而定。

1．科学基础理论推演法　从事物变化规律的科学基础理论推演得到数学模型，这在某些场合是最好的建模方法，相当多的工程和非工程系统都可用本法。

2．统计数据推演法　对于规模大、关系复杂又难作试验的某些系统和过程，如地震过程、生态系统、社会一经济系统等利用统计数据来建模是最合适的。一般称这种方法为时间序列建模法。

3．从输入输出数据推算　对于具有一定因果关系的系统或过程，如果能收集到表达因和果的数据，用这些数据就可推算出系统的关系式，这种方法在工程系统上是很有用的。如果在系统上人为地加入某一形式的输入，再收集相应的输出数据，从这种输入输出数据可以推算出系统的关系，这种做法有时也可推广到非工程系统中去，这种工作就叫“系统辨识”。因此系统辨识实际上是建模工作的一部分。

二、系统辨识的内容及其步骤

Zadeh曾对系统辨识给出一个定义[1]：“根据系统的输入和输出在指定的一类系统中确定一个和被辨识系统等价的系统”。在这个定义中有三个要素，第一是“指定的一类系统”，这在辨识之前首先要从先验知识中确定是什么类型的模型；第二是必须规定“一类输入”；第三是“等价”。

若两个系统在所有输入下，它的输出完全相同，则这两个系统是等价的。在工程上希望简化系统的结构，而不致改变它们的输入输出特性，常常采用近似等价。近似等价用什么来判断呢？常常采用下面这条准则来作判据。当系统 m_1 的输入是 u，输出是 y_{m1} 时它的判据是 $V(u,\ y_{m1})=J_1$；系统 m_2 的输入是 u，输出是 y_{m2}，它的判据是 $V(u,\ y_{m2})=J_2$，两个模型等价时

$$V(u,\ y_{m1})=V(u,\ y_{m2})$$

由上定义知，系统辨识有相当大的自由度，这表现在模型、输入和判据的选择上。

由此可见，系统辨识应当解决下面这些问题：

(1) 用什么输入信号？怎样产生这种输入信号最方便？怎样能使系统正常的工作不受或少受这种输入信号的影响？用什么信号能得到最大效果，即得到最多的辨识信息？

(2) 有多少种实用的数学模型类型？它们之间有什么联系？如何从一种类型转化为另一种类型？

(3) 对于参数估计问题，我们所考虑的系统一般都假定系统的输出受噪声的污染，在此情况下，参数估计问题本质是个统计问题。参数估计理论是统计学中一个基本内容，也是动态系统辨识的理论基础。参数估计理论中有四种基本方法，如表 1 所示。

(4) 单输入单输出系统以及其它各种系统（多输入多输出系统、非线性系统、时变系统等等）的辨识。

(5) 模型的验证，以确立所建立模型是否符合实际。

系统辨识的步骤如图 1 所示。由图 1 可以看到系统辨识不是一次完成的。当所建模型与实际不符时，需对前面方块中的方案进行修改，直到满意为止。有关方块的内容将在第十章

表 1　参数估计的基本方法

方　　法	所　需　条　件
贝叶斯估计：最小方差估计（MS） 最大后验估计（MAP）	① 被估计参数的全部概率结构 ② 作为判据的损失函数形式
极大似然估计（ML）	较上少一个参数的验前概率
线性最小方差估计	只需被估计参数的分布的一、二阶矩
最小二乘估计（LS）	无需任何被估计参数的概率信息

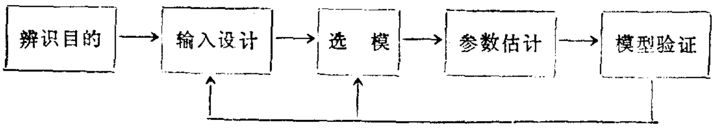

图 1　系统辨识的步骤框图

中详述。

三、系统辨识的分类及其发展前景

根据对系统先验知识了解的程度不同，系统辨识一般可分为两类：

第一类是完全辨识问题，即我们对系统的特性一无所知，不知它是线性的还是非线性的、时变的还是定常的等等。要得到任何有意义的解以前，必须对系统作出某种假定，因此这类问题也称为黑箱问题。

第二类是部分辨识问题，在这类问题中某些特性是已知的，如线性或非线性等，但动态方程的阶次及有关系数值是未知的，这类问题称为灰箱问题，当然它比黑箱问题容易解决。

实际上大多数工程系统和一些非工程系统都属于后一类，我们对系统的结构有相当的了解，因此可以推断动态系统的数学模型的形式，这时只要确定系统方程式中的系数就可以了。

系统辨识在实践上涉及如何合理安排试验、如何选择试验信号、如何测量和收集数据、如何进行实时验证等问题。在理论上涉及模型的参量化和可辨识性、动态系统参数估计的优良性、在线参数估计和计算方法的改进等问题。正因为如此，系统辨识已成为相当活跃的学科之一，吸引了相当多的数理统计学家、控制理论学者、工程控制学者、计量经济学者的注目，近十几年来发表了大量的论文和著作，内容涉及系统辨识的各个领域以及各种类型的系统，如线性系统、非线性系统、时变系统、分布参数系统、大系统等等的辨识。系统辨识已成功地为化工、船舶操纵、电力工业、玻璃制造等的计算机控制提供了数学模型和控制方案。不仅如此，系统辨识还在环境系统、生物系统、生物医学系统、社会经济系统等方面得到了广泛的应用，系统辨识有着广阔的应用前景。随着应用领域的扩大和深入，必将反过来推动系统辨识理论的发展。

四、本书的编排

本书作为自动化仪表专业的本科高年级学生必修课教材，因此尽可能在理论上完善些，所选内容尽量反映动态系统辨识近十几年来取得的理论和方法成果。

本书第一章介绍动态系统数学模型的类别，这是系统辨识的第一步“选择模型”所必需的；第二章介绍动态系统非参数模型的辨识方法；第三章较详细地阐述了参数估计理论。它

是以后各章的基础；第四章则为线性单输入单输出动态系统的辨识，其中特别强调了有实用价值的递推算法及其分析，第五章介绍线性多输入多输出动态系统的辨识，列举了四种不同的表示方法及其相应的辨识方法；第六章为时变系统辨识；第七章为非线性系统辨识；第八章为闭环系统辨识；第九章介绍小样本动态系统的辨识；第十章介绍动态系统辨识的其它有关的问题。

参 考 文 献

1 Zadeh L A From Circuit Theory to System Theory. Proc. IRE, 1962

第一章　动态系统数学模型的类别

第一节　数学模型的应用及其类型

数学模型的类型很多，按表达的规律是否包括时间因素，模型可分为静态和动态两大类。本书主要研究动态模型的辨识问题。

凡是用状态方程或微分方程表示的动态模型都叫做参数模型，而以图线关系或其表达式表示的模型，就叫非参数模型。按模型表达的关系又可以分为外部关系模型和内部关系模型两类。外部关系模型是指该模型所表达的是系统的输入和输出间的关系。这种模型对于从目前的输入推论其将来的输出，从整个系统的原因推出其后果是有用的。而且从实验得到的数据及统计数据都能和这类模型相配合。内部关系模型是相对于外部关系模型而言的，它是更完全地描述系统内部（也包括外部）关系的模型，且常以状态方程式表示。

动态模型中若时间参变量 t 是连续的，则此模型为时间连续模型；若 t 是分段采样的，则称之为时间离散模型。当然还可以分成时变（变系数）和时不变（常系数）、线性和非线性、集中参数和分布参数、单变量和多变量、确定型和随机型等等。

下面按输入输出模型和状态空间模型两大类来进一步阐明各类模型的细节。

第二节　输入输出模型

所谓输入输出模型是指以系统输入和输出关系来表示系统特性的数学关系式。凡是外界对于一个系统的作用都是对于该系统的输入。输入有好几种：一种是按一定要求输入系统的控制作用（或称量，对于各类物理系统，则称为各种物理量），例如在自动控制系统中，这类输入量就是控制变量。另一种输入是不可控的，但是可以被测量到的，例如各种生产过程中输入原料的组分和温度、加热工质的气压和温度等等，这些常称为可测性输入变量。还有一种输入是既不能加以控制又无法测量到的，叫做干扰，如果这类干扰是随机的，则称之为随机干扰或随机噪声。例如，在一个测量系统中，由于放大器中电子噪声而形成的夹杂在有效信号中的噪声干扰。

系统对于各种输入都有一定的响应，这种响应称为系统的输出。系统的输入变量和相应的输出变量间的关系就是系统的输入输出关系，也称为外部特性关系。

在经典控制理论中，传递函数是单输入单输出系统（SISO）的输入输出关系的常用表达式，它定义为在零初始条件下输出变量的拉氏变换对输入变量的拉氏变换之比。如果输入变量是 $u(t)$，输出变量是 $y(t)$，则系统的传递函数就是

$$G(s)=\frac{\mathscr{L}[y(t)]}{\mathscr{L}[u(t)]} \tag{1-1}$$

如果系统输入是一个理想脉冲函数 $u(t)=\delta(t)$，则系统传递函数和系统的脉冲响应 $g(t)$

就有如下关系

$$G(s)=\mathscr{L}[g(t)] \tag{1-2}$$

或

$$g(t)=\mathscr{L}^{-1}[G(s)] \tag{1-3}$$

如果以频率 ω 代替拉氏变换中 s 来表达传递函数，则得其频率响应$G(j\omega)$，它和脉冲响应 $g(t)$有如下关系

$$G(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega}dt \tag{1-4}$$

实际测到的系统的输出是 $z(t)=y(t)+n(t)$（如图 1-1 所示）。为了避免随机干扰 $n(t)$的影响，常用统计方法求 $g(t)$，见第二章。

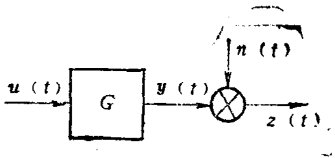

图1-1　系统输出示意图

由于应用计算机，我们常对离散时间系统更感兴趣。从系统的传递函数可以化出相应的脉冲传递函数，或称为 Z传递函数，即离散时间系统输入输出之间的关系

$$G(z)=\frac{Z\{y(t)\}}{Z\{u(t)\}} \tag{1-5}$$

〔例 1-1〕 采样系统如图 1-2 所示，其连续受控对象的传递函数为 $G(s)=1/(\tau s+1)$，令其输入为单位阶跃信号即$u(t)=1(t)$，其输出在采样间隔 T 上的值为

$$y^*(t)=\frac{1}{\tau(1-\lambda)}[1(t)-\lambda e^{-\frac{T}{\tau}}]$$

式中 $t=0$，T，$2T$，…，nT。试从 $u(t)=1(t)$及$y^*(t)$反求系统的脉冲传递函数。

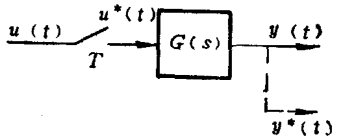

图1-2　采样系统图

从 $y^*(t)$查 Z 变换表[1]可得($\lambda=e^{-\frac{T}{\tau}}$)

$$Z\{y^*(t)\}=\frac{1}{\tau(1-\lambda)}\left[\frac{z}{z-1}-\frac{\lambda z}{z-\lambda}\right]=\frac{1}{\tau}\frac{z}{z-\lambda}\frac{z}{z-1}$$

$$Z\{u(t)\}=\frac{z}{z-1}$$

代入式（1-5）可得

$$G(z)=\frac{1}{\tau}\frac{z}{z-\lambda} \tag{1-6}$$

这就相当于传递函数$G(s)=1/(\tau s+1)$的 Z 变换。

上例仅用以说明脉冲传递函数与输入输出Z 变换间的关系，并不能作为从输入输出 Z变换求系统传递函数的典型方法。因为脉冲函数仅仅表示系统在采样时刻的输入输出关系。从传递函数顺求采样输出是可以的，从采样输入输出关系只能求出它们之间的脉冲传递函数关系。式(1-6)表示例 1-1 输入和输出在采样时刻上的关系。在此，连续时间 t 被等分成间隔为T的许多时刻。如用 k 表示被等分后的时间的序号，则在第 k 序号上的输入和输出可写成 $u(k)$ 和 $y(k)$。这时 $z^{-1}=e^{-Ts}$表示时间的延迟一个采样间隔的符号，或称后移算子，即

$$z^{-1}y(k)=y(k-1) \tag{1-7}$$

反之，则

$$zy(k)=y(k+1) \tag{1-8}$$

如已知采样间隔 T 和系统的时间常数 τ，则 $e^{-T/\tau}=\lambda$ 就是一个定值，式（1-6）就可写成

$$\frac{y(k)}{u(k)}=\frac{1}{\tau-\tau\lambda z^{-1}}$$

或

$$\tau(1-\lambda z^{-1})y(k)=u(k)$$

即

$$y(k)-\lambda y(k-1)=\frac{1}{\tau}u(k) \tag{1-9}$$

当然，对于较复杂的系统，上式可以普遍化，写成如下形式

$$y(k)+\sum_{i=1}^{n}a_i y(k-i)=\sum_{i=1}^{n}b_i u(k-i) \tag{1-10}$$

如果用后移算子，则

$$A(z^{-1})y(k)=z^{-d}B(z^{-1})u(k) \tag{1-11}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}A(z^{-1})&=1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_{n_a}z^{-n_a}\\B(z^{-1})&=b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_{n_b}z^{-n_b}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

n_a、n_b、d 是这类模型的结构参数，n_a、n_b 是 $A(z^{-1})$ 和 $B(z^{-1})$ 的阶数，d 是延迟步数。

如果除去控制变量 $u(k)$，系统还受到其它干扰变量如 $v(k)$ 的干扰，则式（1-11）可进一步写成

$$A(z^{-1})y(k)=B(z^{-1})u(k)+C(z^{-1})v(k) \tag{1-13}$$

其中

$$C(z^{-1})=1+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\cdots+c_{n_c}z^{-n_c} \tag{1-14}$$

式(1-11)和式(1-13)的模型叫做时不变线性离散时间模型，是目前 SISO 系统动态辨识中用得最普遍的一种，也是在时间序列分析中普遍采用的形式。在统计学的时间序列分析中常用的术语有：

（1）自回归滑动平均模型（ARMA 模型）是指控制变量不存在，即 $u(k)=0$，只由干扰 $v(k)$ 引起的输出。

（2）自回归模型(AR模型)，即式(1-13)中 $u(k)=0$，而 $C(z^{-1})$ 中的 c_1，c_2，$\cdots$，c_{n_c} 都等于零。

（3）滑动平均模型(MA 模型)，即为式(1-13) 中 $u(k)=0$，而所有 $a_i=0$，$i=1$，$2,\cdots$，n_a。

（4）受控的自回归滑动平均模型(CARMA 或称 ARMAX 模型)，就是式(1-13)。

当 $v(k)=0$，即式(1-11)，则为一般脉冲传递函数形式。

第三节　状态方程模型

用状态方程描述一个系统的内部关系（包括其外部关系）是最全面的描述系统的方法。从绪论知，系统辨识是从系统的输入输出数据来估计该系统数学模型的方法，从输入输出数

据得到系统的输入输出模型是很自然的事。这样，就产生了一个问题，就是用辨识方法来估计一个系统的状态方程式时，一定要设法解决从系统外部关系推出系统内部关系的问题。在线性系统理论中，这个问题叫实现问题。

我们知道，状态方程一般可表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bu\\ y&=Cx\end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

推出其传递函数阵为

$$G(z)=C(zI-A)^{-1}B \tag{1-16}$$

其中 $x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^r$。但是，如果已知传递函数阵式(1-16)，则其对应的状态方程却不是唯一的，可以有无限多个，即存在一个非奇异阵 T，可作变换$(A,\ B,\ C)\to(TAT^{-1},\ TB,\ CT^{-1})$，两者有相同的传递函数阵。这可简单证明如下：

$$\begin{aligned}G(z)&=C(zI-A)^{-1}B\\ &=CT^{-1}T(zI-A)^{-1}T^{-1}TB\\ &=(CT^{-1})[T(zI-A)T^{-1}]^{-1}TB\\ &=(CT^{-1})(zI-TAT^{-1})^{-1}TB\end{aligned} \tag{1-17}$$

当取不同的奇异阵 T 时，可得不同的状态方程，而其传递函数阵是相同的。因此，这里有个状态方程维数最小实现的问题。关于线性系统最小实现问题在线性系统理论问题中是曾经得到广泛研究的部分之一。自从何与卡尔曼[2]用马尔柯夫参数从脉冲响应函数求最小实现以来，已经提出了不少方法，在第五章关于多变量系统辨识中还要介绍有关的内容，在此仅介绍一种简便的算法[3]。

状态方程式（1-15）的解为

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1-18}$$

初始条件为 0，则系统输出为

$$y(t)=C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1-19}$$

设输入为单位脉冲函数，则系统的脉冲响应函数是

$$y(t)=Ce^{At}B=\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}CA^kBt^k}{k!} \tag{1-20}$$

如取上式的拉氏变换，即得系统的传递函数阵为

$$G(s)=\sum_{k=0}^{\infty}CA^kBs^{-k-1}=J_0s^{-1}+J_1s^{-2}+J_2s^{-3}+\cdots \tag{1-21}$$

所谓马尔柯夫参数就是上式中的 J_i，当输出 y 是标量时，J_i 也变为标量，它们是

$$\left.\begin{aligned}J_0&=CB\\ J_1&=CAB\\ J_2&=CA^2B\\ &\ \vdots\\ J_j&=CA^jB\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

如果是离散时间系统，则相应于离散化后的状态方程诸系数阵和 J_j 间也有式（1-22）的关系，而具体 J_j 值则以脉冲传递函数阵按下式求出：

$$G(z)=J_0z^{-1}+J_1z^{-2}+\cdots \tag{1-23}$$

如果已知系统的传递函数阵

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{f_{11}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{f_{1n}(s)}{D(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{f_{m1}(s)}{D(s)} & \cdots & \frac{f_{mn}(s)}{D(s)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}s^{-1}+\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}s^{-2}+\cdots$$

$$=J_0s^{-1}+J_1s^{-2}+\cdots \tag{1-24}$$

也很容易求出其各马尔柯夫参数。

以马尔柯夫参数按下式构成的矩阵叫韩格尔（Hankel）矩阵

$$H=\begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_r \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{r+1} \\ & \vdots & & \vdots \\ J_r & J_{r+1} & \cdots & J_{2r} \end{bmatrix} \tag{1-25}$$

这里我们仅讨论单输入单输出情况，即 $m=r=1$。先假设有一个 r 满足下列关系

$$J_{r+j}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iJ_{r+j-i} \quad j=0,\ 1,\ \cdots \tag{1-26}$$

式中，α_i 是常数，利用上式关系就可将式（1-25）的韩格尔矩阵分解为

$$H=\begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_{r-1} & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ J_r & J_{r+1} & \cdots & J_{2r-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{r-1} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_{r-1} & \alpha_rJ_0+\alpha_{r-1}J_1+\cdots+\alpha_1J_{r-1}(=J_r) \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_r & \alpha_rJ_1+\alpha_{r-1}J_2+\cdots+\alpha_1J_r\ (=J_{r+1}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ J_r & J_{r+1} & \cdots & J_{2r-1} & \alpha_rJ_r+\alpha_{r-1}J_{r+1}+\cdots+\alpha_1J_{2r-1}(=J_{2r}) \end{bmatrix} \tag{1-27}$$

从式（1-22）和式（1-26）关系可得（能控标准Ⅱ型）

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{r-1} \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad C=[J_0\ \ J_1\cdots J_{r-1}] \tag{1-28}$$

显然，最小实现就从马尔柯夫参数求 A、B、C，而关键在于求 α_1、α_2、…、α_r。只要能将韩格尔阵分解成式（1-27）形式即可。从式（1-27）中可以看出

$$\begin{bmatrix} J_r \\ \vdots \\ J_{2r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & \cdots & J_{r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{r-1} & \cdots & J_{2r-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \tag{1-29}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} \alpha_r \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & \cdots & J_{r-1} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{r-1} & \cdots & J_{2r-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_r \\ \vdots \\ J_{2r-1} \end{bmatrix} \tag{1-30}$$

上式必须求韩格尔矩阵的逆运算。为了避免逆运算，参考文献〔3〕证明了以下引理。

引理1-1 假设

$$\begin{bmatrix} \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_0 & \cdots & J_{k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ J_{k-1} & \cdots & J_{2k-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} J_k \\ \vdots \\ J_{2k-1} \end{bmatrix}$$

存在，又如果

$$d \overset{\text{def}}{=\!=} J_{2k} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i J_{2k-i} \neq 0$$

则

$$\begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_k \\ \vdots & & & \vdots \\ J_k & J_{k+1} & \cdots & J_{2k} \end{bmatrix}^{-1} = \left(\begin{matrix} \begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_{k-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ J_{k-1} & J_{k-2} & \cdots & J_{2k-2} \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & 0 \end{matrix} \right) + \frac{1}{d} \begin{pmatrix} -\alpha_k \\ -\alpha_{k-1} \\ \vdots \\ -\alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} [-\alpha_k \cdots -\alpha_1 \quad 1] \tag{1-31}$$

利用上述引理，就可以按下列步骤计算式（1-28）的最小实现。

（1）取马尔柯夫参数序列中第一个非零元素，为简单起见，令 $J_0 \neq 0$。

（2）取子序列 J_0、J_1，令 $\alpha_1^1 = J_0^{-1} J_1$。

（3）检查 $J_2 - \alpha_1 J_1 = d_1 = 0$，如前式为 0，则直接进行第 k 步，否则，进行第 4 步。

（4）取子序列 J_2、J_3，令

$$\begin{bmatrix} \alpha_2^2 \\ \alpha_1^2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} J_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{d_1} \begin{bmatrix} -\alpha_1^1 \\ 1 \end{bmatrix} [-\alpha_1^1 \quad 1] \right\} \begin{bmatrix} J_2 \\ J_3 \end{bmatrix}$$

（5）检查 $J_4 - \alpha_1^2 J_3 - \alpha_2^2 J_2 = d_2 = 0$，如果前式为 0，则直接进行第 k 步，否则进行第 6 步。

⋮

（k）按式（2-28）形成 A、B、C。

（k+1）停止。

〔例1-2〕 已知从一传递函数求到的马尔柯夫参数是 $J_0 = 0$、$J_1 = 1$、$J_2 = 0$、$J_3 = -2$、$J_4 = 6$、$J_5 = -14$、$J_6 = 30$，试用上述方法求式（1-28）的 A、B、C。

（1）$J_0 = 0$，故从 $J_0' = 1$ 开始。

（2）取子序列 $J_0' = 1$，$J_1' = 0$，故 $\alpha_1^1 = J_0'^{-1} J_1' = 0$。