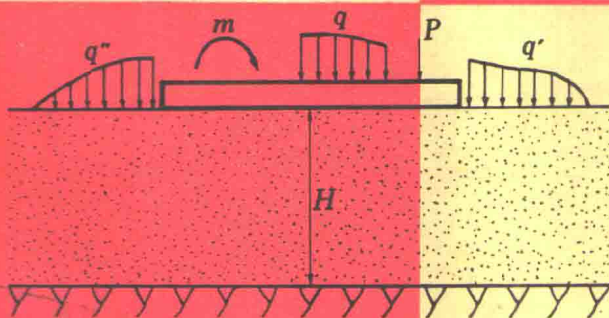


有限深弹性基础梁计算用表

张裕怡



水利出版社

内 容 提 要

本书叙述了平面问题条件下,地基可压缩层为有限深时,弹性基础梁的计算理论和方法。为适应读者使用方便,本书制备了大量的实用计算表格。

本书所述理论,兼有文克尔假定和半无限大弹性体地基假定之优点,既考虑了垫层厚度变化的影响,又考虑了地基的应力扩散,统一了文克尔理论和半无限大弹性体地基理论的矛盾。找出了边荷载的实用影响范围。

本书可供土建、水利工程设计人员和有关专业院校师生参考使用。

有限深弹性基础梁计算用表

张 裕 怡

*

水利出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 9 $\frac{1}{2}$ 印张 265千字

1980年10月第一版 1980年10月北京第一次印刷

印数 0001—5110 册 定价 1.40 元

书号 15047·4086

前 言

在基础梁的计算理论中，“文克尔”理论从1867年提出，至今已有一百多年；“半无限大弹性地基”理论至今也有五十余年。时间虽久，但它们作为基础梁的理论基础而保持着强有力的生命力。然而，它们是在极端条件下建立的理论，因此在一般非极端条件下，用这两种理论中任何一种来计算基础梁，其结果都与实际偏差较多。

本书以地基可压缩层为有限深这一非极端条件作理论依据，在 H （可压缩层厚度）与 l （梁半跨长）之比值为： $\frac{H}{l} = 0.5 \sim 4.0$ 范围内，考虑了均布荷载、集中力荷载、力偶荷载、边荷载的作用，解了二十四组代数方程组，制定了不同柔度 i 值时地基反力（ p ）用表以供读者使用。

因为“文克尔”理论、“半无限大弹性地基”理论和本理论属同一“体系”，所以在绪论中用了一定篇幅对“文克尔”理论和“半无限大弹性地基”理论下基础梁的计算作了简要叙述，并在本书最后一章里对这两种理论作了合理的评价和肯定。

最后，谨对在本书撰写过程中给予帮助和指导的潘家铮副总工程师、谈松曦总工程师、王有成教授、沈鹏程副教授等同志，致以

张裕怡

一九八〇年

目 录

前言

绪论	1
§ 0-1 基础梁计算理论的实质	1
§ 0-2 用“文克尔假定”计算基础梁	5
§ 0-3 “半无限大弹性体”型地基假定简述	8
§ 0-4 “垫层”厚度的影响	11
第一章 基本原理	14
§ 1-1 计算模型	14
§ 1-2 地基沉降计算	15
§ 1-3 地基反力的计算	21
§ 1-4 梁内力的计算	28
§ 1-5 例题	29
§ 1-6 变截面梁的计算	36
第二章 边荷载影响	37
§ 2-1 概述	37
§ 2-2 计算模型的扩充	38
§ 2-3 基础梁的通用方程组	39
§ 2-4 边荷载的“影响量”	41
第三章 地基反力计算表格	45
§ 3-1 表格分类	45
§ 3-2 表格的制作	46
§ 3-3 表格使用	51
第四章 基础梁计算理论讨论	57
§ 4-1 影响基础梁内力和地基反力的因素	57

§ 4-2 “文克尔”理论、“半无限大弹性地基”

理论和本书“有限深弹性地基”理论三者间的关系 62

§ 4-3 若干问题 65

计算用图表 70

图 I 基础梁下地基反力 (p_i) 示意图 70

表 I $\frac{H}{l} = 0.5$ 时 $\overline{p_i}$ 数表 72

表 II $\frac{H}{l} = 1$ 时 $\overline{p_i}$ 数表 116

表 III $\frac{H}{l} = 2$ 时 $\overline{p_i}$ 数表 160

表 IV $\frac{H}{l} = 4$ 时 $\overline{p_i}$ 数表 218

表 V 集中荷载 (P) 作用下“文克尔”计算表格 276

绪 论

基础梁是直接搁置于地基基础之上的结构。它的作用是把上部结构的重量、作用的荷载等外力比较均匀地传给地基，以免地基承受局部较大的强度而破坏。铁路的枕木、水闸的底板、水道上的船坞、吊车的轨道、大形房屋结构的条形基础等等，都是为了避免地基直接承受较大的上部荷载而设置的下部结构物。

因为基础梁承受着整个建筑物的重量和外来荷载，所以它的安全度关系着整个建筑物能否正常使用。因此建筑物的设计者对基础梁的研究十分重视，尽力想达到在保证安全的条件下较准确地估算出最少的材料用量。比较正确的计算理论则是达到此目的的好途径之一。目前，基础梁的计算理论和计算方法仍在研究之中发展着。

§ 0-1 基础梁计算理论的实质

图0-1所示基础梁 AB ，在外荷载 P 、 q 、 m 作用下，给地基以压力 $p(x)$ 。反过来，地基也给梁反力 $p(x)$ 。因此，梁是在外力 P 、 q 、 m 和地基反力 $p(x)$ 共同作用下而工作。其内力 (Q, M) 和变形 (y, θ) 由 P 、 q 、 m 和 $p(x)$ 共同确定。

在富斯-文克尔假定提出之前，进行基础梁计算时，地基给梁的反力 $p(x)$ 看成为直线分布，即

$$p(x) = ax + b$$

在对称荷载作用时， $p(x)$ 则为均布反力。

显然，这种直线假定是毫无道理的。因为梁和地基基础是两个弹性完全不同的物体，这两个弹性完全不同的弹性体，在梁变形和地基发生沉陷后，在其接触面上应保持相吻合这一几何条件。但是，直线假定没有考虑“吻合”二字。按直线假定进行基础梁计算时，只要梁的跨长、宽度和外荷载的大小、作用位置既定后，梁的材料性质如何，梁的厚度是多少，地基的性质如何，地基可压缩层厚度是多少，地基在 $p(x)$ 作用下[图 0-1(b)]产生的沉陷大小和范围如何等等皆可以不考虑。因此，地基反力为直线假定是不能够反映基础梁的工作情况的。

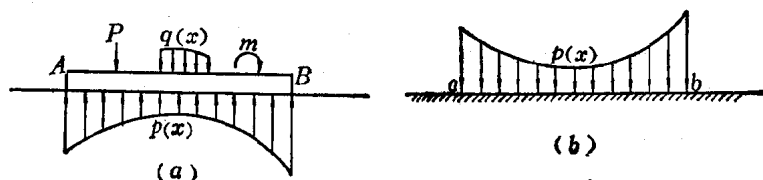


图 0-1

1801年俄国科学院院士雷斯提出假设：每单位长度基础梁下的压力 $p(x)$ 与地基沉陷成正比。用公式表示为

$$p(x) = k \cdot \eta \quad (0-1)$$

式中 $p(x)$ 因次为 [力] · [长度]⁻¹；

沉陷 η 因次为 [长度]；

比例常数 k 的因次为 [力] · [长度]⁻²。

这一假定只适用于常宽度的基础梁。

在1867年，捷克工程师文克尔将富斯假定加以推广，改

为：地基每单位面积上所受的壓力与地基沉陷成正比。用公式表示为

$$\sigma = K \cdot \eta \quad (0-2)$$

式中 压力 σ 的因次为 [力] · [长度]⁻²；

沉陷 η 的因次为 [长度]；

比例常数 K 的因次为 [力] · [长度]⁻³，称之为“垫层系数”，或“基床系数”，或“沉陷系数”。 K 由式 (0-3) 求之。

$$K = \frac{E_0}{H} \quad (0-3)$$

由于“文克尔假定”不但适用于常宽度的基础梁，也适用于变宽度的基础梁和任何形状的基础板。所以，在此之后的几十年中间，特别是初参数法提出以后，基础梁和基础板的计算得到很大发展。直至今天，“文克尔假定”在基础梁、板的计算中仍占有重要地位。

1922年苏联学者普洛克多尔 (Г.Э.Проктор) 提出用弹性理论来计算基础梁，即假定地基为半无限大弹性体。但当时由于数学上的困难，这种假定没有得到很快的发展。1935年，捷尔雪万诺夫 (Н.М.Герсеванов) 在他的著作中给这种假定提供了新的进程。后来佛洛林 (В.А.Флорин)、热莫契金 (Б.Н.Жемочкин)、库兹涅佐夫 (В.И.Кузнецов)、鲁得涅夫 (В.И.Руднев)、郭尔布诺夫-波萨多夫 (М.И.Горбунов-Посадов) 我国的蔡四维等人在此假定下，在计算方法上作了大量工作。特别是郭尔布诺夫-波萨多夫的计算方法，因为制定了一套应用表格，使基础梁的计算工作大为方便和简化，故乐为基础梁设计者所使用。

从图0-1(a)可以看到，基础梁 AB 的计算，无论是“文

克尔”型地基还是“半无限大弹性体”型地基，或是本书“有限深弹性体”型地基，其梁的挠曲线微分方程式皆为

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - p(x) \quad (0-4)$$

或

$$\frac{EI}{1-\mu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - p(x) \quad (0-5)$$

式(0-4)为平面应力问题方程式；

式(0-5)为平面变形问题方程式。

而对于和梁变形相协调的地基沉降，地基的“模型”不同，则计算出的结果和实际沉降之误差（合理性）也不同。

1. “文克尔”型地基

地基的沉降仅发生在梁下 $a b$ 范围内[图0-2(a)]， $a b$ 范围之外地基不发生沉降。

2. “半无限大弹性体”型地基

地基的沉降不仅发生在梁下 $a b$ 范围之内，不受压力的 $a b$ 之外也发生沉降，见图0-2(b)中I。此结论从性质

上来说，和实际相符，但从数量上来看，和实际相比是偏大的。

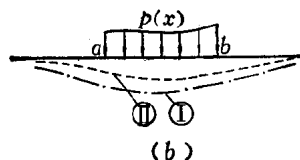
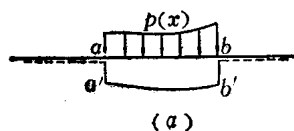


图 0-2

3. 本书“有限深弹性体”型地基

地基沉降的性质和“半无限大弹性体”型地基的沉降相同。即：地基在 $a b$ 范围之外也发生沉降。但是从数量上来看，

不像2那样比实际偏大许多，见图0-2(b)II。

由上述可以看到，基础梁的计算，无论采用何种型的地基假设，都要走这样一个路径：根据梁的变形（ y ）和地基沉陷（ η ）相协调（吻合）条件

$$y = \eta \quad (0-6)$$

由梁的挠曲线微分方程式和地基沉陷计算式共同来求地基给梁的反力 $p(x)$ 。 $p(x)$ 求解后，超静定梁的问题便转化成静定梁的问题。

§ 0-2 用“文克尔假定”计算基础梁

对于梁结构，“文克尔假定”下地基反力则写成

$$p(x) = K \cdot \eta$$

将此式和关系式 $y = \eta$ 代入梁的挠曲线微分方程式有

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - Ky \quad (0-7)$$

解此常微分方程得

$$y = e^{\lambda x} (c_1 \cdot \cos \lambda x + c_2 \cdot \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (c_3 \cdot \cos \lambda x$$

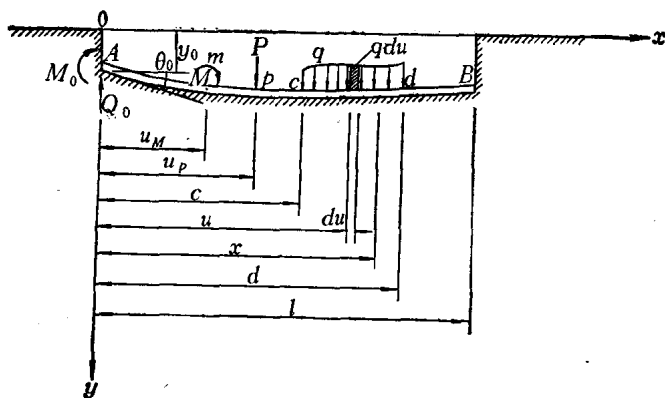


图 0-3

$$+c_4 \cdot \sin \lambda x) + \frac{q(x)}{K} \quad (0-8)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \quad (0-9)$$

式中, c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 为积分常数, 由边件条件和连续性条件确定。

对有限长梁 AB (图0-3), 由边界条件解得

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{4\lambda}\theta_0 + \frac{1}{8\lambda^3 EI} Q_0 \\ c_2 &= \frac{1}{4\lambda}\theta_0 - \frac{1}{4\lambda^2 EI} M_0 - \frac{1}{8\lambda^3 EI} Q_0 \\ c_3 &= \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4\lambda}\theta_0 - \frac{1}{8\lambda^3 EI} Q_0 \\ c_4 &= \frac{1}{4\lambda}\theta_0 + \frac{1}{4\lambda^2 EI} M_0 - \frac{1}{8\lambda^3 EI} Q_0 \end{aligned} \right\} \quad (0-10)$$

式中 y_0 、 θ_0 、 Q_0 、 M_0 表示梁 A 端的挠度 (沉陷)、转角、切力和弯矩, 称为初参数。

将常数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 的表达式代入式 (0-8), 整理得

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 F_1(\lambda x) + \frac{1}{\lambda} \theta_0 F_2(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI} M_0 F_3(\lambda x) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^3 EI} Q_0 F_4(\lambda x) - \frac{1}{\lambda^2 EI} m F_5[\lambda(x-u_m)] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^3 EI} P F_4[\lambda(x-u_p)] \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^3 EI} \int_c^x q(x) F_4[\lambda(x-u)] du \quad (0-11) \end{aligned}$$

计算时, AM 段取前四项, MP 段取前五项, Pc 段取前六项, cd 段取全部七项。 dB 段也取全部七项, 但积分的上限 x 改成 d 。

由材料力学中的关系式:

$$\theta = \frac{dy}{dx}, \quad M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad Q = -EI \frac{d^3 y}{dx^3}$$

得

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \theta_0 F_1(\lambda x) - \frac{1}{\lambda EI} M_0 F_2(\lambda x) \\ & - \frac{1}{\lambda^2 EI} Q_0 F_3(\lambda x) - 4\lambda y_0 F_4(\lambda x) \\ & - \frac{1}{\lambda EI} m F_2[\lambda(x - u_M)] \\ & + \frac{1}{\lambda^2 EI} P F_3[\lambda(x - u_P)] \\ & + \frac{1}{\lambda^2 EI} \int_0^x q(x) F_3[\lambda(x - u)] du \quad (0-12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) = & M_0 F_1(\lambda x) + \frac{1}{\lambda} Q_0 F_2(\lambda x) + \frac{K}{\lambda^2} y_0 F_3(\lambda x) \\ & + \frac{K}{\lambda^3} \theta_0 F_4(\lambda x) + m F_1[\lambda(x - u_M)] \\ & - \frac{1}{\lambda} P F_2[\lambda(x - u_P)] \\ & - \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(x) F_2[\lambda(x - u)] du \quad (0-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) = & Q_0 F_1(\lambda x) + \frac{K}{\lambda} y_0 F_2(\lambda x) + \frac{K}{\lambda^2} \theta_0 F_3(\lambda x) \\ & - 4\lambda M_0 F_4(\lambda x) - 4\lambda m F_4[\lambda(x - u_M)] \\ & - P F_1[\lambda(x - u_P)] \\ & - \int_0^x q(x) F_1[\lambda(x - u)] du \quad (0-14) \end{aligned}$$

式中

$$F_1(\lambda x) = \operatorname{ch} \lambda x \cdot \cos \lambda x;$$

$$F_2(\lambda x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \lambda x \cdot \sin \lambda x + \operatorname{sh} \lambda x \cdot \cos \lambda x);$$

$$F_3(\lambda x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sh} \lambda x \cdot \sin \lambda x;$$

$$F_4(\lambda x) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch} \lambda x \cdot \sin \lambda x - \operatorname{sh} \lambda x \cdot \cos \lambda x)。$$

初参数 M_0 、 Q_0 、 y_0 、 θ_0 由基础梁的边界条件，先从左端知道两个，再由右端求得另两个。例如图 0-3 所示基础梁，A 端： $M_0=0$ ， $Q_0=0$ 。B 端： $M_B=0$ ， $Q_B=0$ 。将这两个条件代入式 (0-13)、(0-14)，则可解出 y_0 、 θ_0 。

地基反力则由

$$p(x) = K \cdot y$$

在 y 求出后即得。

§ 0-3 “半无限大弹性体”型地基假定简述

文克尔假定是将梁的变形 (y) 和地基反力 $p(x)$ 以常数 K 而联系的。所以，梁的挠曲线微分方程式“精确解”的求得是可能的。

“半无限大弹性体”型地基假定则不然，它不能给出 y 和 $p(x)$ 间的简单数学表达式，只能用未知反力 $p(x)$ 和荷载 P 、 $q(x)$ 、 m 一道表示出基础梁的挠曲线微分方程式。然后，通过未知力 $p(x)$ 表达的地基沉陷计算式，由变形协调条件： $y=\eta$ ；

梁的静力学平衡条件： $\Sigma y=0$ ， $\Sigma M=0$ ；梁的边界条件（图 0-4）；

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=\pm l} = 0 \quad (\text{两 endpoint 处弯矩为零});$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=\pm l} = 0 \quad (\text{两 endpoint 处切力为零});$$

或

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=-l} = -\frac{M_A}{EI}, \quad \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=l} = -\frac{M_B}{EI},$$

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=-l} = -\frac{Q_A}{EI}, \quad \left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_{x=l} = -\frac{Q_B}{EI}.$$

将微分方程式转化成代数方程式（近似转换），解此代数方程式则得 $p(x)$ 。

目前常见的求解“半无限大弹性体”型地基上基础梁的热莫契金链杆法、郭尔布诺夫-波萨多夫算法、蔡四维有限差分法等等计算方法都是按此思路而提出的。本书也按此思路进行“有限深弹性地基”上基础梁的计算。

本节仅就郭尔布诺夫-波萨多夫的计算方法作一简述。

基础梁 AB [图 0-4(a)] 搁置于“半无限大弹性体”型地

基上，跨长为 $2l$ ，坐标原点放跨中点处。 $x = \xi l$ 或 $\xi = \frac{x}{l}$ 。

ξ 为一因次“折算距离”。

地基反力 p 用 ξ 的十次幂多项式表示：

$$\begin{aligned} p(\xi) &= a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 \\ &\quad + a_6 \xi^6 + a_7 \xi^7 + a_8 \xi^8 + a_9 \xi^9 + a_{10} \xi^{10} \\ &= \sum_{i=0}^{10} a_i \xi^i \end{aligned}$$

将 ξ 和 $p(\xi)$ 表达式代入基础梁挠曲线微分方程式 (0-4)

有

$$\frac{EI}{l^4} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = q(\xi) - \sum_{i=0}^{10} a_i \xi^i \quad (0-15)$$

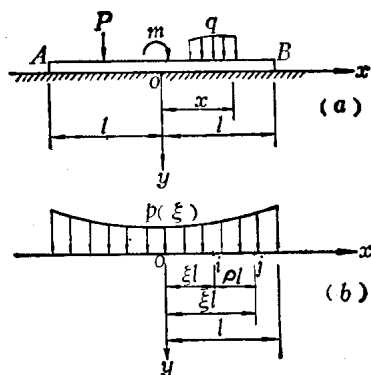


图 0-4

对式 (0-15) 积分四次, 得基础梁 AB 挠曲线的表达式 $y(\xi)$ 。

读者注意: 在 $y(\xi)$ 表达式中含有 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_9, a_{10}$ 十一个未知系数。

另一方面, 地基在 $p(\xi)$ 作用下[图 0-4(b)], 其 i 点处的相对沉陷 $\eta(\xi)$ 由弗拉芒公式得

$$\eta(\xi) = -\frac{2l}{\pi E_0} \int_{-(1+\xi)}^{(1-\xi)} \left(\sum_{i=0}^{10} a_i \cdot \xi^i \right) \ln \rho \cdot d\rho + c \quad (0-16)$$

显然, 式 (16) 的积分结果中也含有未定系数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_9, a_{10}$ 。

将含有 $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ 的 $y(\xi)$ 和 $\eta(\xi)$ 表达式用关系式 $y(\xi) = \eta(\xi)$ 联系起来, 由边界条件对积分常数进行处理, 取 ξ 同次幂的系数排成 9 个代数方程式, 再加上两个平衡方程式, 组成十一元线性代数方程组, 联立解则得系数 $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ 。解得后, 反力 $p(\xi) = \sum_{i=0}^{10} a_i \cdot \xi^i$ 便得到解决。

§ 0-4 “垫层”厚度的影响

在工程实际上，地基的基础在相当多数情况下土层以下的一定深度处有岩石层，或为一层压缩模量大得多的“硬土”。岩石层或硬土层因压缩模量较大，可近似地看成不可压缩层。其上的土层看成为“可压缩弹性层地基”。并称“有限深可压缩弹性地基”或称“垫层”基础。

О.Я. Шертер 的计算表明：同一基础梁，在不同厚度“垫层”上，在同一荷载作用下，其地基反力和梁内力(M 、 Q)都不相同。图0-5、图0-6^[3]为舍赫切尔所作：当“垫层”厚度不同时（柔度 $t = 5$ ），短梁中心受集中荷载的无单位反力图和内力 M 图。

由图0-5、0-6中结果可以看到，“有限深弹性地基”当成“无限深弹性地基”来处理，是不大合理的，是不能进一步反映客观实际的。

舍赫切尔仅计算了梁中心受集中力这一情况下的反力和梁内力，没能算出更普遍情况下（如 m 、 q 的作用，集中力 P 不在梁中心）的反力和梁内力。但就这一点，使人们清楚的看到了考虑“垫层”影响的必要性。

为了不过多的估算“有限深弹性地基”的沉陷量，郭尔布诺夫-波萨多夫在他们的著作《弹性地基上结构物的计算》一书中，列举了好几个考虑“垫层”厚度的计算公式，但都不能得出满意的结果。例如用压缩模量的假定值 E'_0 代替 E_0 。

$$E'_0 = \frac{\omega'_{cP}}{\omega_{cP}} \cdot E_0 \quad \left(\frac{\omega'_{cP}}{\omega_{cP}} > 1 \right) \quad (0-17)$$

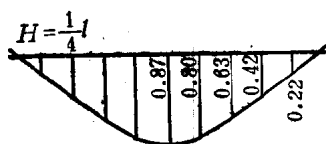
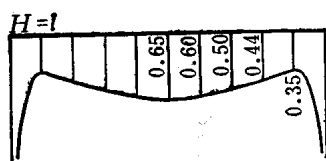
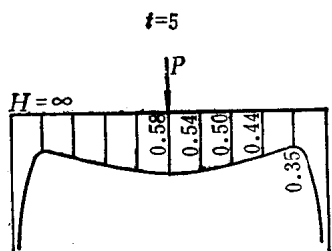


图 0-5 反力图

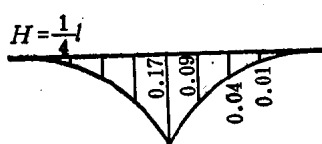
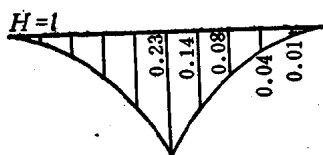
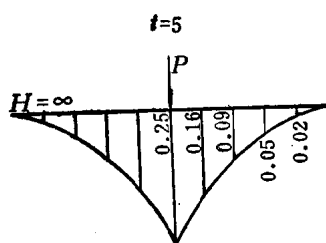


图 0-6 内力M图

式中 E_0 ——地基压缩模量的实测值；

ω_{cP} ——系数，由基础型式及压缩层厚度决定；

ω'_{cP} ——系数，压缩层厚度为无穷大时 ω_{cP} 之值。

计算表明，这种代替没能使基础梁的计算成果发生多少合理的改进。

1959年，西德学者 Kany 提出：将结构物的支持面划分成许多宽为 a 的基本矩形，每块下反力视为均布荷载；其基本矩形中心的沉陷为 s_0 ，对于距离为 $i a$ 的不受荷载矩形中心点的沉陷，由经验式确定：