工农业余中等学校

高中数学第一册

教学参考书

工农业余中等学校

高中数学第一册（试用本）

教 学 参 考 书

天津市工农教育教学研究室编

天津人民出版社出版

天津市赤峰道[illegible]号

天津市新华书店发行　天津[illegible]华印刷一厂印刷

开本787×1092　1/32　印张[illegible]　字数[illegible]70,000

1981年4月第1版　1981年4月第1次印刷

统一书号：7072·1197　定价：0.[illegible]元

编者的话

这套工农业余中等学校高中数学教学参考书，是受教育部工农教育局委托，由天津市工农教育教学研究室组织部分教师，根据工农业余中等学校高中课本《数学》(人民教育出版社 1980 年 1 月第一版)编写的。供教师在教学中参考。

本书体例一般包括“章教材说明”、“单元教学计划”、“教学补充资料”、“本章小结”、“附录”等五个部分。并以单元教学计划为中心；以教材分析为重点；以教法建议为辅构成本书的主体。“教学补充资料”是根据各章教材内容提出的一些可以教给学员的教学内容；“附录”是提供给教师的一些参阅资料。

工农业余中等学校高中数学教学参考书第一册是由张士瑛、刘宗华、李闻彝、全佳等四位同志编写的。在编写过程中，参考和采用了有关资料，吸取了兄弟省市的宝贵意见和我市罗孝梁、贾金陵、杨绍澍、石承业、赵大文、[illegible]、贾仲谊、沈匡后等同志的意见，最后由罗孝梁、贾金陵、杨绍澍等同志作了较详细的修改，谨此一并致谢。

由于我们水平所限，编写时间仓促，错误缺点在所难免，望提出宝贵意见。

天津市工农教育教学研究室

一九八〇年十一月

目　录

第一章　幂函数　指数函数 对数函数

〔教材说明〕

1. 内容介绍:

本章内容是由集合与对应、幂函数、指数函数和对数函数三个部分组成，是在学员学过初中数学，对集合概念有了一些感性认识，已经掌握了指数、对数的概念和在实数范围内关于指数、对数的运算法则，以及函数及其图象的初步知识的基础上提出的。

本章一开始讲了集合的一些最基本（也是最简单）的知识，在此基础上讲解单值对应和函数概念，使学员用集合、对应的观点，理解函数的本质。然后分别对幂函数、指数函数和对数函数进行研究，这三种函数的底、指数、幂之间的关系如下表:

函数名称	自变量	函数	常数
幂函数	底	幂	指数
指数函数	指数	幂	底
对数函数	幂	指数	底

为了更好的研究函数，教材以幂函数为模型，研究了函数的单调性和奇偶性，并通过单调性和奇偶性的研究进一步理解和掌握幂函数、指数函数和对数函数的性质。

指数函数和对数函数互为反函数。用集合和对应的观点来解释，就是 $y=f(x)$ 的反函数，是由一一对应 f 的逆对应 $\bar{f}$ 所确定的函数 $x=\bar{f}(y)$。为此，教材在讲指数函数、对数函数之前，先由单值对应引出一一对应，再从一一对应引出逆对应，从而用逆对应定义反函数。同时研究互为反函数图象之间的关系。

本章最后介绍了几种简单的指数方程和对数方程的解法。

2. 教学要求：

（1）使学员理解集合、子集、交集、并集、补集等概念；正确使用有关的术语、符号和集合的表示方法。

（2）使学员了解集合间的对应关系，以加深对函数概念的理解。

（3）使学员理解函数的单调性，能判断一些简单函数在给定区间上的单调性；理解函数的奇偶性，能判断一些简单函数的奇偶性，并能利用奇、偶函数的图象的对称性，简化对函数图象的描绘；理解反函数的意义，以及互为反函数的函数图象之间的关系。

（4）使学员掌握幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象和性质。

（5）使学员掌握几种简单的指数方程和对数方程的解法，并能正确应用集合概念讨论增根与遗根问题。

（6）通过揭示集合、对应与函数之间的内在联系，以及对数函数与指数函数间的内在联系，使学员理解两个集合的元素之间的对应关系，就是初中学过的数与数、形与形、数与形之

间的对应关系的概括，从而提高学员用辩证唯物主义的观点去分析研究问题的自觉性。

3. 重点和难点：

（1）本章教材的重点是集合概念和符号，函数概念，反函数概念，以及幂函数、指数函数、对数函数的概念、图象及其性质。

（2）本章教材的难点是对应和反函数的概念以及用反函数概念来分析指数函数与对数函数之间的内在联系。本章教材概念多、符号多、头绪多、难点集中，也增加了学习本章的困难。

4. 课时分配： 本章约需32课时，具体分配如下：（仅供参考）

第一单元：集合与对应（7课时）

第二单元：幂函数（11课时）

第三单元：指数函数、对数函数（13课时）

〔单元教学计划〕

第一单元　集合与对应

1. 目的要求：

（1）使学员正确理解集合、子集、交集、并集、补集等概念；正确使用有关的术语、符号和集合的表示法；能用集合的观点说明一些简单的问题。

（2）使学员在了解对应概念的基础上，深刻理解单值对应的意义；从而加深对函数概念的理解；理解和掌握符号

$y=f(x)$及区间的概念和符号；掌握和正确使用表示连续实数集合的三种方法。

2. 教材分析：

(1) 1.1 集合

集合是现代数学最基础的概念之一，在中学阶段学一些集合的简单知识是很必要的。因为初等数学的内容与集合的思想有密切的关系，用集合的有关概念、术语和符号，可以把有些知识叙述得更准确、更简明、清楚易懂，也可以使学员对初等数学中的一些基本概念理解得更深刻，表达得更明确。在一些科普读物中也常碰到集合的有关名词、术语和符号，所以掌握集合的概念，不仅是学习初等数学所必需也是今后学习近代数学和钻研科学技术问题所必需。

课本中一开始就讲了什么叫集合，通过五个例子得出"象这样具有某种共同特性的东西的全体叫做集合"的结论。这个结论不是集合的精确的定义，而是对集合这个概念的描述性的说明。这是因为集合概念是数学中最原始的概念之一，不能用其它更基本的概念给它下定义，和点、直线、平面等概念一样，我们把它叫做不定义的概念。课本用数、点、某种机器及生活中的实例引出集合的概念，这样从学员已有的知识出发，对集合概念作描述性的说明，学员是容易接受的。

在说明集合概念之后，课本介绍了集合的两种表示法——列举法和描述法，对于什么叫做列举法，什么叫做描述法是不难理解的，关键在于使学员能根据这两种表示法特点和给定集合的内容合理地选用表示法。例如，集合$\{3, 2, 4, 9, 0\}$是五个数的全体，用的是列举法，就不宜用描述法表示；而

集合$\{x: -1<x<3, x\in R\}$则不能用列举法表示，需要用描述法。在这个例子里。冒号前的x叫做代表元素，冒号后面的部分是用来描述代表元素的特征的。又如，大于 3 小于 11 的偶数，这个集合可表示为

{大于 3 小于 11 的偶数}(描述法)

或$\{4, 6, 8, 10\}$(列举法)

或$\{2x: x\in N$ 且 $2\leqslant x\leqslant 5\}$(还是描述法)。

显然，对于含元素个数较少的有限集合，可以用列举法。对于无限集合或含元素较多的有限集合，也可以按给定的规律写出它的部分元素后加上删节号来表示，也叫列举法。例如，大于 3 的偶数集合，用描述法表示为

{大于 3 的偶数}或$\{2x: x\in N,$ 且$x>1\}$

也可用列举法表示为：$\{4, 6, 8, \cdots\cdots\}$。

又如，{不大于 100 的自然数}或$\{x: x\leqslant 100, x\in N\}$可用列举法表示为$\{1, 2, 3, \cdots\cdots 100\}$。

还应指出，在使用删节号的列举法中，删节号前面或后面的元素，要表示出元素的规律，否则，删去元素的规律显示不出来，也就失去了删节号的意义，例如在集合$\{10, 26, 8\cdots\cdots\}$里的删节号删去的元素，是什么数就不明确了。

从以上可以看出，列举法的好处是可以具体的看清集合的元素，描素法则刻划出集合元素的共同特征，而描述法不是唯一的。

课本在介绍集合概念和集合的表示法的过程中，虽然没有明确提出什么是集合概念的特征，但关于集合的三个特征在课文中已大体提到，我们在教学中可以通过实例予以阐明。

集合的三个特征是:

A. 确定性：对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的，这就是说，我们可以判断任何对象是不是这个集合的元素，也就是说具有共同属性的对象全在集合之中，反之，在集合中的每一个对象都有共同的属性，例如，由所有直角三角形组成的集合可以表示为{直角三角形}，边长分别是3cm，4cm，5cm 的三角形是这个集合的元素，而边长分别是 4cm，4cm，5cm 的三角形不是这个集合的元素。所谓确定性，是指对于一个给定的集合，集合中元素的特征、范围、对象都是确定的。不允许模棱两可。例如，{高一甲班全体同学}，特征是高一甲班，范围是全体，对象是学生，都已确定，而{高一甲班部分学员}就不确定，因为范围不明确。

B. 无重复性：也可以说是元素互异性，就是一个元素在一个集合里不得重复出现。这就是课本第二页中“每个元素仅写一次”的意思，也就是说，一个集合所含的元素，指属于这个集合的互不相同的个体。所以，在一个集合里不能重复出现同一个元素。例如，由数 3、4、5、6、7 组成的集合，可以写成{3, 4, 5, 6, 7}或{3, 5, 7, 4, 6}或{6, 4, 7, 5, 3}等，但不可以写成{3, 3, 4, 5, 6, 7}或{3, 4, 5, 5, 6, 7}等。

C. 无顺序性：这就是课文中“不分次序”的意思。也就是说，在集合里，我们不考虑元素之间的顺序，只要元素相同，我们就认为是同一个集合。例如，{-3, 0, 2, 5}和{0, 2, -3, 5}就是同一个集合；又如{a, b, c}和{c, a, b}也是同一个集合，但要注意，象自然数集合，通常表示为{1, 2, 3, 4, ……}，不能表示为{3, 1, 4, 2, ……}，这里 1, 2, 3, 4 的排列顺序显示出删

节号所代表的元素，而不是集合本身的要求。

在集合概念的教学中，应把重点放在树立集合概念和掌握集合表示法上。在讲授时，应通过实例进行描述性地讲解，同时要注意讲清楚集合的三个特征，同时还要注意讲清以下两点：

（a）单元素集合与空集：这两种集合是容易混淆和易于出错误的地方，应予以强调和明确其区别。

只含有一个元素的集合叫做单元素集合，如，$\{a\}$，$\{x\}$，$\{0\}$，$\{2\}$等都是单元素集合。这里，a 表示元素，而$\{a\}$表示集合，元素 $a\in\{a\}$。集合$\{0\}$表示只含有一个元素 0 的集合。

方程 $x^2-2x+1=0$ 的解是 $x_1=x_2=1$，所以，方程 $x^2-2x+1=0$ 的解的集合是$\{x: x^2-2x+1=0, x\in R\}=\{1\}$。也就是说，在实数范围内，如果方程有重根时，那么这方程的解集可以用单元素集合来表示。

不含任何元素的集合叫做空集，用特定符号$\varnothing$表示，也就是空集$\varnothing$中，不存在任何元素。

要注意空集与$\{0\}$的区别。$\{x: x^2+1=0, x\in R\}=\phi$，它表示方程 $x^2+1=0$在实数范围内无解，而$\{x: x+1=1\}=\{0\}$，表示 $x+1=1$ 的解是 0。因此，0 不属于空集$\varnothing$。更不能把空集写成$\{\varnothing\}$。

（b）集合的符号：一般可用大写拉丁字母表示集合，小写字母表示元素，例如 $A=\{a, b, c, d, e\}$。但也有时会出现 $Q=\{A, B, C, D, E\}$，这是相对的。如{高一一班学员}这个集合的元素是学员，{高一年级教学班}这一集合的元素就含有高一一班了。

(2) 1.2　子集、交集、并集、补集

本节教材是研究集合与集合之间的关系，严格说来，这节教材一是研究两个集合之间的包含关系与相等关系，二是介绍集合的简单运算——交、并、补。但由于这两者内容密切关联，所以把它们放在一起进行讲授。

研究两个集合间的关系，最重要的是包含关系。教材中首先是通过研究子集及其表示法，提出了两个集合间的包含关系，并给出了包含关系的符号和使用方法，因此，要着重讲清子集这一概念。

讲述两集合之间的包含关系与相等关系，主要应讲清以下几点：

A. 首先搞清 B 是 A 的子集表示为 $B\subseteq A$ 或 $A\supseteq B$，应读作"B 包含于 A"或"A 包含 B"，采用简单的圆图表示两集合间的关系，可以使学员直观地看清楚这种关系。$B\subseteq A$ 实际上包括两种情形，即 $B=A$ 或 $B\subset A$，二者只居其一，反之，$B=A$ 或 $B\subset A$，都可以表示为 $B\subseteq A$。对于任何一个集合 A，因为它的任何一个元素都属于集合 A，所以 $A\subseteq A$，这就是说，任何一个集合是它本身的子集。此外，由于空集是不包含任何元素的集合，所以，可以认为空集是任何集合的子集，这就是说，对于任何一个集合 A，$\varnothing\subseteq A$。这是两种特殊情况。

关于真子集，教材里是这样描述的："在某一集合 A 的所有子集中，它的本身和空集是它的两个特殊的子集，除这两个子集外，集合 A 的其他子集都叫做 A 的真子集"。通常真子集的定义是："如果集合 A 是集合 B 的子集，但集合 B 中至少有一个元素不属 A，那么我们称 A 是 B 的真子集"。根据这个定

义可知，$\varnothing$是一切非空集合的真子集。因此，我们认为教材关于真子集的描述中，“除这两子集外”可改为“除集合 A 本身外”，第 6 页例 1 中 S 的所有真子集应加上$\varnothing$。

为了弄清上述问题，作一些如下形式的练习是有益的。

例一　写出$\{a, b\}$所有的子集。

解：$\{a, b\}$所有的子集是：ϕ，$\{a, b\}$，$\{a\}$，$\{b\}$。

例二　写出$\{a, b, c\}$所有的子集。

解：$\{a, b, c\}$所有的子集是：ϕ，$\{a, b, c\}$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$和$\{b, c\}$。

例三　图 1.1 中，A、B、C 表示集合，说明集合 A、B、C 有什么关系？

解：由图 1.1 可知，$A \subset B$，$A \subset C$，$B \subset C$，所以 $A \subset B \subset C$。

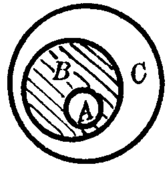

图　1.1

B. 两个集合相等这个概念，是一个重要概念，课本中是这样定义的，“对于两个集合 A 和 B，如果 $A \subseteq B$，同时 $A \supseteq B$，那么，集合 A 和集合 B 相等”，表示为$A = B$，读作“集合 A 等于集合 B”。这就是说，因为 $A \subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $A \supseteq B$，所以 B 的元素都是 A 的元素，就是集合 A 的元素与集合 B 的元素完全相同，因而我们说 A 与 B 是相等的集合。这样讲述可有助于学员的理解，为了加深等集这个概念的理解，在定义等集后可进一步指出：

如果 $B \subseteq A$，并且 $B \neq A$，那么 $B \subset A$。这就是说，B 的元素都是 A 的元素，而 A 的元素不都是 B 的元素（即 A 的元素中至少有一个不是 B 的元素），所以 $B \subset A$。

还可以举出中学数学教材中的一些例子，具体说明等集

的概念，例如：

同解方程的定义：如果第一个方程的解都是第二个方程的解；第二个方程的解都是第一个方程的解，那么这两个方程称为同解方程。显然这两个方程有两个相等的解集，因此还可以这样定义：如果两个方程的解集相等，那么这两个方程称为同解方程。由此可知，方程同解变形的证明，其实质就是证明两方程的解集相等。

例如，证明在 R 上，方程 $3x^2-2=2x-1$ 和方程 $(x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ 的解集相等。

证明 设 $S_1=\{x:\ 3x^2-2=2x-1, x\in R\}$；

$$S_2=\left\{x:\ (x-1)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0, x\in R\right\}.$$

解这两个方程得到：

$$S_1=\left\{1, -\frac{1}{3}\right\};\quad S_2=\left\{1, -\frac{1}{3}\right\}.$$

所以 $$S_1=S_2.$$

由上例可知，在某个数集上，解集相等的两个方程称为是该数集上的同解方程（这里不讨论重根的问题）。

我们再看一个例子，$\{3,5,7\}\subseteq\{7,5,3\}$ 吗？很明显，左边的集合的元素都可以在右边集合里找到，因而 $\{3,5,7\}\subseteq\{7,5,3\}$ 是成立的。但我们注意到，右边的集合的元素也可以在左边的集合里都找到，即 $\{7,5,3\}\subseteq\{3,5,7\}$，所以实际上这两个集合是同一个集合。从这个例子，我们可以看到：$A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 是可能同时成立的，这时 A 和 B 由完全相同的元素所组成。据此，为了证明 $A=B$，就要证明 $A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$ 同时成立。

C. 注意符号 $\in$ 与 $\subseteq$(或 $\subset$)的区别:

符号 $\in$ 用于元素与集合之间，表示从属关系，$\in$ 读作“属于”如 $a\in A$, $4\in\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\frac{1}{2}\in$\{所有正有理数\};$\notin$ 读作“不属于”。如 $a\notin A$, $\frac{1}{2}\notin$ \{所有正整数\}。

符号“$\subseteq$”读作“包含于”,“$\supseteq$”读作“包含”，如 $A\subseteq B$，读作“A 包含于 B”, $B\supseteq A$ 读作“B 包含 A”

前面介绍了两个集合之间的包含关系，两个集合 A、B 可能有下面的三种关系如图 1. 2)。

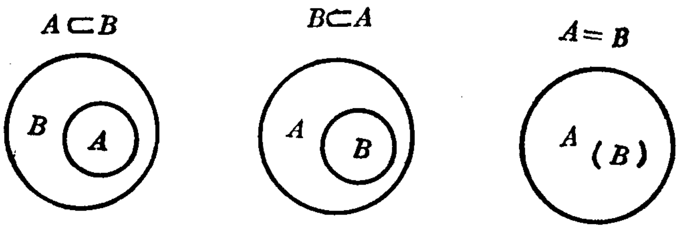

图 1.2

但对任意两集合来说，不是仅有上面三种关系，我们还可以举出下面的两种关系(图 1. 3)。

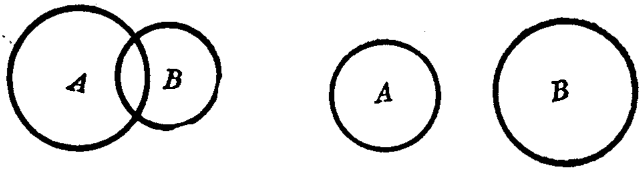

图 1.3

在左图中，有一些 A 的元素不在 B 中，即 $A\nsubseteq B$(同时也就知道 $A\neq B$)，另外 B 中也有些元素不在 A 中，即 $B\nsubseteq A$，可见左

图不同于上述的三种关系。显然，右图也不同于上述三种关系。我们再看左图，如果固定 B，然后移动 A 集的位置，左图就会出现上三种包含关系中的任何一个。所以，集合的三种包含关系都是左图的特殊情形，而左图反映出两个集合的一种重要的关系，因此，有必要深入地研究两个集合之间的各种关系。

教材对于交集、并集、补集这三种最基本的集合运算，是按着先易后难，紧紧抓住它们的各自特点，按交、并、补的顺序安排的。课本在介绍交、并、补集概念时，都是通过实例引出概念，再给以确切的定义。这样深入浅出、防止死记硬背、有助于学员理解。为了使学员对交、并、补集的定义理解得清，记得牢，简明具体，可以分别这样叙述：

交集是由两个集合的公共元素组成的一个集合。对于交集，要讲清下面几个问题：

A. 由 A 与 B 所有公共元素组成的集合，叫做 A 和 B 的交集。表示为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x:\ x\in A \text{ 且 } x\in B\}$ 如图 1.4。

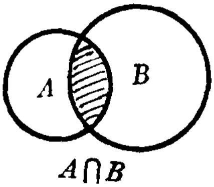

图 1.4

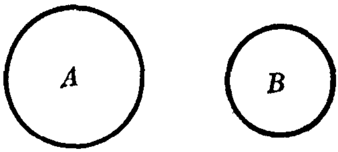

图 1.5

B. A 与 A 的交集还是 A：$A\cap A=A$

A 与 $\varnothing$ 的交集是 $\varnothing$：$A\cap\varnothing=\phi$

C. 两个集合的交集有可能是空集，当两个集合没有公共点时，$A\cap B=\phi$（图 1.5）。

D. 交集的元素同时属于两个集合，它具有两重属性。例如：$A=\{$高一甲班的全体学员$\}$，$B=\{$本校的全体女学员$\}$，则：

$A\cap B=\{$高一甲班的全体女学员$\}$

又如：$A=\{x\text{：} x$ 是 12 的约数$\}$，

$B=\{x\text{：} x$ 是 15 的约数$\}$。

则　　$A\cap B=\{x\text{：} x$是12 与 15 的公约数$\}$。

并集是两个集合的元素合并在一起组成的集合，但其中公有的元素只能出现一次。对并集，要讲清下面几个问题：

A. 把集合 A 与集合 B 所有元素并在一起所组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集，表示为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\text{：} x\in A$ 或 $x\in B\}$，如图 1.6 的阴影部分所示。

图 1.6

例如，$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{c, d, e, f\}$

则　　$A\cup B=\{a, b, c, d, e, f\}$

这里要注意，重复的元素 c，d 不要重复出现。

B. 由并集定义可知，对于任何集合 A

$A\cup A=A$，　　　　$A\cup\phi=A$

C. 注意交集与并集的区别与联系

(a) 若 $A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，则 $A\cap B\subseteq A\cup B$.