工科课程提高与应试丛书

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷

梁工谦 编

运筹学

典型题解析及自测试题

西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

运筹学
典型题解析及自测试题

主　编　梁工谦

副主编　张福祥　刘西林

编著者（以姓氏笔划为序）

王秀红　刘西林　杭省策　郑芬芸

张福祥　梁工谦　蔡建峰

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书由三大部分及附录组成。第一部分按当前各高等学校《运筹学》通用教材的主要篇章分别给出内容要点、典型例题详解、评注及练习题；第二部分给出供读者自测的综合试卷7套；第三部分编入了7套部分全国重点高校的研究生入学考试真题。附录部分给出了习题及试题的答案。

本书可以作为高等学校本科生的运筹学习题课的教材，亦可作为网络大学、自学考试的辅导教材，并可供报考硕士研究生的考生应试复习参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学典型题解析及自测试题/梁工谦主编. —西安：西北工业大学出版社，2002.11
(工科课程提高与应试丛书)
ISBN 7-5612-1537-1

Ⅰ.运… Ⅱ.梁… Ⅲ.运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第063335号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路127号 **邮编**：710072 **电话**：(029)8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限责任公司
开　　本：850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张：13.75
字　　数：369千字
版　　次：2002年11月第1版 2002年11月第1次印刷
印　　数：1～6 000册
定　　价：18.00元

前　言

为了便于广大读者更好地掌握工科管理专业基础课运筹学的内容，更好地培养分析问题和解决工程与管理实际问题的能力，应西北工业大学出版社“工科课程提高与应试丛书”编辑约稿，组织编写了《运筹学典型题解析及自测试题》一书。

运筹学作为高等学校管理类专业的主修课，其重要性显而易见，绝大多数的高校都开设了这门课。但是，运筹学作为一门历史并不久远的科学，真正形成学科体系是在第二次世界大战后。其特点之一是，就其研究的问题和所形成的学科连贯性不能与数学、力学、电工学等学科相比。后者是从研究自然科学的基本问题而逐渐深入的、前后连贯的完整学科；而运筹学则多为专题研究系统最优问题。因而运筹学中的各章节除了部分章节是有关联的外，其他多以较独立的理论基础、解题方法出现。特点之二是，由于各种专业对运筹学的 要求不一样，不同的高校所开设的内容不尽相同，从而出现了分别为 36，48，54，60 等学时的课程安排，而教材也多达十几种。针对以上两个特点，我们认为编写典型题解析及自测试题是非常必要的，可以缓解上述特点所带来的矛盾。

教材是课程教学内容及体系改革的核心。一本好的教材不仅要帮助学生学会学习和学会创造，更应该能够体现寓“思”于教材，寓“观”于教材。在编写本书的过程中，我们主要是基于清华大学出版社出版的《运筹学》、哈尔滨工业大学出版社出版的《运筹学基础及应用》、西北工业大学出版社出版的《运筹学》，并参考了胡运权主编的《运筹学习题集》；徐永仁主编的《运筹学试题精选与答题技巧》等书籍。目的在于通过全面、细致地充实解题方法和内容，

来补充教材内容和提高读者的自学能力。

推进教学方法和手段的改革，是教学过程中处理教与学的基本内容。我们在多年的教学过程中注意到，有时学生听课感觉很好，也很有兴趣，但一到做题时就觉得很难。基于这种现象，在编写本书的过程中，更加注意强调运筹学中重要的基本概念和方法，通过评注形式的点拨，在思考题和习题中加以体现，启发和促进学生的思维方法。本书力图在启发学生的主动思维、揭示本课程学习规律上有所突破和创新。本书分为三个部分，即典型题解析、自测试题、部分全国重点高校的考研真题，附录部分中给出了习题和试题答案。书中对教学基本要求、重点和难点作了精辟提炼。从实例到各类模型，解题思路、技巧等进行了阐述。“评注”着重指出一般读者在解题中容易出现的错误和应注意的问题，是教师多年教学经验的总结。

本书第一部分中的第一章由郑芬芸编写，第二章由王秀红编写，第三、七章由刘西林编写，第四、五、八章由梁工谦编写，第六章由杭省策编写，第九、十章由张福祥编写，第十一、十二章由蔡建峰编写。第二、三部分由梁工谦组题。全书由梁工谦统稿并任主编。

本书考虑到目前教学过程中的内容和特点，可作为本科教学中的参考书，亦可作为报考研究生以及在读研究生课程学习中的辅助教材。书中的例题及习题，部分源自国内外有关教材及参考文献，在此特向原编者致谢。

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，希望读者给予指正。

编　者

2002 年 6 月

目　　录

第一部分　典型题解析

第二部分　自测试题

第三部分　部分全国重点高校考研真题及答案

附录　习题及自测题答案

第一部分　典型题解析

第一章　线性规划与单纯形法

一、内 容 提 要

1. 线性规划的概念

(1) 线性规划模型的构成(构成线性规划模型的三要素)

① 决策变量。

② 目标函数：max Z(或 min$Z$)(是决策变量的线性函数)。

③ 约束条件：s. t.（满足于含决策变量的线性等式或不等式)。

(2) 一般形式

目标函数：$\max(\min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

约束条件：s. t. $\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=, \geqslant) b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0(\text{非负约束}) \end{cases}$

(3) 标准形式

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0\end{cases}$$

其具备的基本特征：

① 目标函数极大化；

② 约束条件为线性等式；

③ $b_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$；

④ $x_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$；

(4) 剩余变量、松弛变量及意义。

2. 有关线性规划解的概念

① 概念：凸集、凸组合、可行解、可行域、最优解、最优值、基、基变量、非基变量、基解、基可行解、可行基、最优基。

② 可行解、基解、基可行解、最优解之间的关系。

3. 图解法

图解法的步骤：

① 建立平面直角坐标系；

② 图示约束条件，找出可行域；

③ 图示代表目标函数的直线及目标函数值增加（或减小）的方向；

④ 找出最优解。

4. 单纯形法

(1) 理论基础

定理 1 若 LP 问题可行域存在，则可行域是个凸集。

定理 2　LP 问题的基可行解与可行域的顶点一一对应。

定理 3　若 LP 问题存在最优解，则一定存在一个基可行解是最优解。

(2) 计算步骤

第一步：找出初始基可行解，列出初始单纯形表。

第二步：最优性检验，检验非基变量的检验数 $\sigma_j = c_j - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_j$。

① 若所有的 $\sigma_j \leqslant 0$ 且基变量中不含有人工变量时，表中的基可行解为最优解，停止计算。

② 若存在某个 $\sigma_j > 0$，它所对应的列向量 $\boldsymbol{P}_j \leqslant \boldsymbol{0}$，则问题为无界解，计算结束。

③ 若存在某个 $\sigma_j > 0$ 且所对应的列向量有正分量，则转为第三步。

第三步：从一个基可行解转换到相邻的目标函数值更大的基可行解，列出新的单纯形表。

① 确定换入基变量 x_s，单纯形表中，选检验数为正的 σ_j 中最大者 σ_s（即 $\sigma_s = \max\limits_j\{\sigma_j \mid \sigma_j > 0\}$）对应的变量 x_s 进基。

② 确定换出基的变量 x_r。按最小比值原则选择出基变量。

第四步：重复第二、三步。

5. 大 *M* 法与二阶段法

(1) 大 M 法

① 人工变量在目标函数中的系数确定：若目标函数为 $\max Z$，则系数为 $-M$；否则为 M。

② 计算方法：单纯形法。

(2) 二阶段法

第一阶段：求解一个目标函数仅含人工变量，且为极小化的线性规划问题，其最优表有两种情况：

① 目标函数最优值为 0。则去掉人工变量转为第二阶段。

② 目标函数最优值不为 0，则原问题无可行解，停止计算。

第二阶段：去掉第一阶段中的人工变量，将第一阶段得到的最优解作为初始基可行解，利用单纯形法继续进行迭代，直至求出原问题的最优解。

二、典型题解析

例 1.1 将下述线性规划问题化为标准形式。

(1) $\min Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 9 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -6 \\ x_1 \leqslant 0,\ 2 \leqslant x_2 \leqslant 6,\ x_3 \text{ 取值无约束} \end{cases}$$

(2) $\max Z = -|x| - |y|$

$$\begin{cases} x + y \geqslant 2 \\ x \leqslant 3 \\ x,\ y \text{ 无约束} \end{cases}$$

解 (1) 令 $Z' = -Z, x_1' = -x_1, x_3 = x_3' - x_3'', x_2' = x_2 - 2$，其中 $x_1', x_2', x_3', x_3'' \geqslant 0$，"$2 \leqslant x_2 \leqslant 6$"等价于"$x_2' \geqslant 0$ 且 $x_2' \leqslant 6 - 2 = 4$"。而 $x_2' \leqslant 4$ 则作为一个约束方程。据上述分析，并引入松弛变量 x_4, x_6 及剩余变量 x_5，则可得到如下的标准形式：

$$\max Z' = x_1' - 2x_2' - 3x_3' + 3x_3'' - 4$$

$$\begin{cases} 2x_1' + x_2' + x_3' - x_3'' + x_4 = 7 \\ 3x_1' + x_2' + 2x_3' - 2x_3'' - x_5 = 2 \\ 4x_1' + 2x_2' + 3x_3' - 3x_3'' = 2 \\ x_2' + x_6 = 4 \\ x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_3'',\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

【评注】 将非标准形式化为标准形式时，要注意标准形式具备的四个特征。另外，本题变量 x_2 有上下限限制，对于此类限制，可这样考虑：由于"$a \leqslant x \leqslant b$"等价于"$0 \leqslant x-a \leqslant b-a$"，故可令 $x'=x-a$，则"$a \leqslant x \leqslant b$"便转化为"$0 \leqslant x' \leqslant b-a$，其中 $x'=x-a$"。对于本题 $2 \leqslant x_2 \leqslant 6$ 则可转化为 $x_2' \geqslant 0$ 且 $x_2' \leqslant 6-2=4$，其中 $x_2'=x_2-2$，即令 $x_2=x_2'+2$，且在原约束中再增加一个约束 $x_2' \leqslant 4$，其中 $x_2' \geqslant 0$。

（2）**解法 1**

令 $$\begin{cases} x_1=\dfrac{x+|x|}{2} \\ x_2'=\dfrac{x-|x|}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=\dfrac{y+|y|}{2} \\ y_2'=\dfrac{y-|y|}{2} \end{cases}$$

则 $x_1 \geqslant 0, x_2' \leqslant 0, x=x_1+x_2',\ |x|=x_1-x_2'$

$y_1 \geqslant 0,\ y_2' \leqslant 0,\ y=y_1+y_2',\ |y|=y-y_2'$

所以原模型则可化为：

$$\max Z=-(x_1-x_2')-(y_1-y_2')$$

$$\begin{cases} x_1+x_2'+y+y_2' \geqslant 2 \\ x_1+x_2' \leqslant 3 \\ x_1, y_1 \geqslant 0,\ x_2',\ y_2' \leqslant 0 \end{cases}$$

令 $x_2=-x_2'$，$y_2=-y_2'$，其中 x_1，$y_2 \geqslant 0$，并引入松弛变量 s. t. 可得标准形式：

$$\max Z=-(x_1+x_2)-(y_1+y_2)$$

$$\begin{cases} x_1-x_2+y_1-y_2-s=2 \\ x_1-x_2+t=3 \\ x_i,\ y_i,\ s,\ t \geqslant 0\ (i=1,\ 2) \end{cases}$$

解法 2

令 $$x_1=\begin{cases} x,\ x \geqslant 0\ \text{时} \\ 0,\ x<0\ \text{时} \end{cases},\ x_2=\begin{cases} 0,\ x \geqslant 0 \\ -x,\ x<0 \end{cases}$$

$$y_1=\begin{cases} y,\ y \geqslant 0\ \text{时} \\ 0, y<0\ \text{时} \end{cases},\ y_2=\begin{cases} 0,\ y \geqslant 0 \\ -y,\ y<0 \end{cases}$$

由此可知 $|x| = x_1 + x_2$，$x = x_1 - x_2$，$|y| = y_1 + y_2$，$y = y_1 - y_2$，且 x_1，x_2，y_1，$y_2 \geqslant 0$，引入松弛变量可得标准形式为

$$\max Z = -(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + y_1 - y_2 - s = 2 \\ x_1 - x_2 + t = 3 \\ x_i,\ y_i,\ s,\ t \geqslant 0\ (i = 1,2) \end{cases}$$

【评注】 该解法与目标规划(第四章)的建模思想相似。

例 1.2 求下列 LP 问题的所有基解，基可行解及最优解。

$$\max Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 因 $\boldsymbol{P}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$两两线性无关，所以 $(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2)$，$(\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3)$，$(\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3)$ 都是 LP 的基。其全部基解、基可行解(√)及最优解(*)如下表所示。

基解	x_1	x_2	x_3	Z	是否基可行解(√)	最优解(*)
①	-2	4	0	-2		
②	2/3	0	4/3	6	√	*
③	0	1	1	4	√	

【评注】 给出一个基，便可得出惟一的一个基解，所以本题思路是首先找出所有的基，再求相应的基解。再根据基解、基可行解、最优解之间的关系(基可行解一定是基解，若有最优解，一定存在一个基可行解是最优解)，求出所有的基可行解及最优解。

例 1.3 用图解法求解下列 LP 问题。

(1) $\max Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min Z = 2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 - 2x_2 \leqslant 1 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

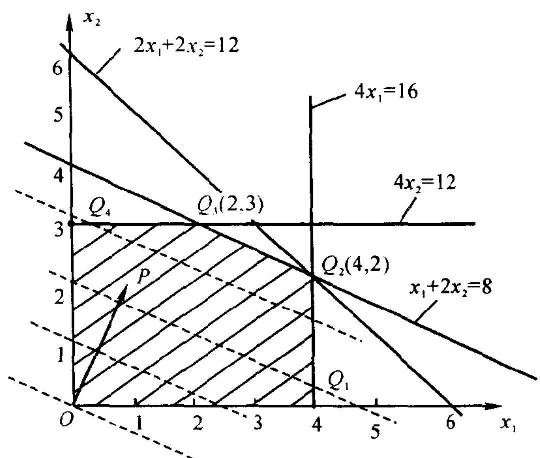

图　1.1

解　(1) 每个约束条件都表示一个半平面(如 $2x_1 + 2x_2 \leqslant 12$ 表示落在直线 $2x_1 + 2x_2 = 12$ 上的和这条直线左下方半平面内的所有点),共有四个这样的半平面,这四个半平面与 x_1, $x_2 \geqslant 0$ 的公共部分,即图 1.1 中阴影部分就是该问题的可行域。

将目标函数 $Z=x_1+2x_2$ 改写为红 $x_2=-\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}Z$，表示参量为 Z，斜率为 $-\frac{1}{2}$（恰与直线 $x_1+2x_2=8$ 平行）的一族平行直线（图 1.1 中的虚线），沿 P 的方向是目标函数值增加的方向，当沿 P 的方向平移到与直线 $\overline{Q_2Q_3}$ 重合时，目标函数达到最大。最优解集合为 $\{(x_1,x_2)\mid(x_1,x_2)=\alpha(2,3)+(1-\alpha)(4,2),0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$，即 $\{(x_1,x_2)\mid(x_1,x_2)=(4-2\alpha,2+\alpha),0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$。最优值为 $Z^*=8$。

【评注】 该题中线段 $\overline{Q_2Q_3}$ 上的所有点都是最优点。线段 $\overline{Q_2Q_3}$ 内所有点的集合表示方法是：$\{x\mid x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2,0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$，其中 x_1，x_2 分别表示点 Q_2，Q_3 的坐标。

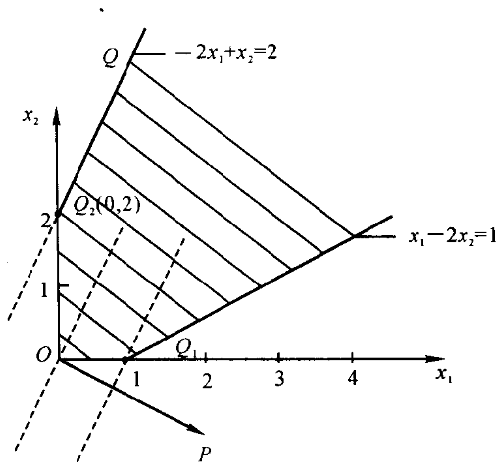

图 1.2

(2) 图 1.2 中阴影部分（无界凸多边形 Q_2OQ_1）是该 LP 问题的可行域，虚线代表目标函数等值线，方向 P 是目标函数值增加的方向，当代表目标函数的直线沿 P 的反方向平移到与直线 $-2x_1+$