概率论与数理统计指导与提高

西安科技学院
西安石油学院
长　安　大　学　合编
西北轻工业学院
空军工程大学

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书对现行的《概率论与数理统计》教材中的每一章内容，作了简明扼要的归纳综合；精选了典型例题并进行了分析和评注，不仅指出解题的思路和技巧，而且为开拓思路，有的还给出了多种解法。每章后面附有适量的补充习题，可使读者加深理解基本理论和掌握解题方法与技巧。

本书主要供大学本科生学习和考研复习使用，也可作为一般工程技术人员学习的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计指导与提高/合编．—西安：西北工业大学出版社，2001.8

ISBN 7-5612-1018-3

Ⅰ．概…　Ⅱ．西…　Ⅲ．概率论与数理统计指导与提高—教材　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2001）030887 号

出版发行： 西北工业大学出版社
通讯地址： 西安市友谊西部 127 号，邮编：720072　电话：029—8493844
网　　址： http://www.nwpup.com
印 刷 者： 西北工业大学出版社印刷厂
开　　本： 850mm×1 168mm　1/32
印　　张： 7.25
字　　数： 175 千字
版　　次： 2001 年 8 月　第 1 版　2001 年 8 月　第 1 次印刷
印　　数： 1～6000
定　　价： 10.00 元

《概率论与数理统计指导与提高》
编 写 组 名 单

主　编　褚维盘

副主编　欧阳克智　任功全

编　者　褚维盘　欧阳克智　任功全

任晓红　寇光兴

前　　言

本书是按照“高等院校工科数学教材编写会议”确定的编写大纲和国家教育部全国高校工科数学教学委员会关于面向21世纪教学改革精神，针对普通工科院校大学生学习“概率论与数理统计”课程的具体情况，由陕西省工科数学教学委员会主任叶正麟教授及西北工业大学出版社组织编写的辅导书。

全书分九章：随机事件与概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。每章由内容提要、典型例题分析和习题三部分组成。内容提要部分对本章的一些重要概念和难点从不同方面给予讲述，以便加深理解，对重点的内容也作了分类处理，简明扼要地归纳综合。典型例题部分有三大特点：一是绝大多数解答前有详细分析，指出解题的思路和技巧；二是解答比较详细，有的含多种解法，以便开拓思路；三是解答后有评注，对该类型题的一般解法进行了总结，指出应注意的地方，有利于提高读者的分析综合能力。在这部分中，还选解了有一定难度的题目及考研试题（前面加 * 号），供学有余力的同学参考。习题部分是为了使读者加深理解基本理论和掌握解题的方法和技巧选编的。

本书由长安大学任功全、西安石油学院欧阳克智、西安科技学院褚维盘、西北轻工业学院任晓红、空军工程大学寇光兴合作编写，依此分别负责第一章，第二、三章，第四、五章，第六、七章，第八、九章；褚维盘任主编，欧阳克智、任功全任副主编。西安建筑科技大学刘林教授审阅书稿并提出了宝贵意见；本书在编

写过程中得到了叶正麟教授及西北工业大学出版社的大力支持，在此我们表示衷心的感谢！由于水平所限，书中一定有不少缺点和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2001年5月

目　录

第一章　随机事件与概率

一、内容提要

（一）　随机试验与样本空间

(1)为研究随机现象，需要进行试验或观察．若试验具有以下特性：

1)可在相同条件下重复进行；

2)试验的结果可能不止一个，但事先已知试验的所有可能结果；

3)每次试验之前不能确定将会出现哪一个结果．

则称该试验为随机试验，简称试验，记为 E．

(2)试验中每一个可能出现的简单直接结果称为基本事件，基本事件的全体所组成的集合称为样本空间，记为 Ω．

(3)在随机试验中的任一结果都称为随机事件，简称事件．常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示．一个事件 A 发生当仅且当 A 中所含某一基本事件发生．

(4)试验中必然发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示；必然不发生的事件称为不可能事件，用 Φ 表示．

（二）　事件之间的关系与运算

包含与相等：若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称 A 包于 B 或 B 包含 A，记为 $A\subset B$；若两事件满足 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称这

两个事件相等，记作 $A=B$.

和、积与差：称"两个事件 A 与 B 中至少有一个发生"为事件 A 与 B 的和事件，记作 $A\cup B$；称"两个事件 A 与 B 同时发生"为事件 A 与 B 的积事件，记作 $A\cap B$ 或 AB. 设 $\{A_t|t\in T\}$ 为事件族，其中 T 是指标集. 称"事件族 $\{A_t|t\in T\}$ 中至少有一个事件 A_t 发生"为事件族 $\{A_t|t\in T\}$ 的和事件，记作 $\bigcup\limits_{t\in T}A_t$. 当 T 为有限或可列无限集时，记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$；称"事件族 $\{A_t|t\in\}$ 中诸事件 A_t 全部都发生"为事件族 $\{A_t|t\in T\}$ 的积事件，记作 $\bigcap\limits_{t\in T}A_t$，当 T 为有限或可列无限集时，记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$；称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为 A 与 B 的差. 记作 $A-B$.

互斥与互逆：若两事件 A 与 B 满足 $AB=\Phi$，则称 A 与 B 互斥（或互不相容）；若事件 A、B 互斥，且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 与 B 互为对立事件（或互逆事件），记作 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

注 概率论中事件之间的关系与运算和集合论中子集的关系与运算是一致的. 因此，集合论中有关子集的各种运算律可以平移到概率论中事件间相应的运算上来.

（三） 概率的定义及性质

1. 概率的统计定义

设事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，则称 n_A 为 A 在这 n 次试验中的频数，比值

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

称为 A 在这 n 次试验中的频率. 当 n 充分大时，事件 A 的频率必稳定地在某一固定数值 p 附近摆动，称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$，并用 $P(A)$ 来度量事件 A 发生的可能性的大小. 显然，当 n 充分大时，$f_n(A)\approx P(A)$.

2. 古典概型

若随机试验的样本空间只含有限个基本事件且各基本事件发生的可能性相同，则称这类试验的数学模型为古典概型. 在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}$$

3. 几何概率

设试验的样本空间是一个有限区域 G（一维、二维、三维），且样本点（即基本事件）落在度量（长度、面积、体积）相同的子区域是等可能的，则定义事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{\text{构成 }A\text{ 的子区域的度量}}{G\text{ 的度量}}$$

4. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，$P(A)$是在 E 的全部随机事件组成的集合上的实值函数，满足

(1)对任一随机事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)$P(\Omega)=1$；

(3)对任何两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\text{（可列可加性）}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

5. 概率的基本性质

(1)$P(\Phi)=0$；

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足 $A_iA_j=\Phi\ (i\neq j)$，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$（有限可加性）；

(3)若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$，特别对任意事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(4)$P(\overline{A})=1-P(A)$；

(5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，一般地，$P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$（广义加法公式）.

（四） 条件概率与事件的独立性

(1)若 $P(B)>0$，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为"在已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率".

(2)若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$$

一般地，若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

(3)全概率公式：若 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，且 $A_iA_j=\Phi(i\neq j)$，$P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

(4)贝叶斯公式：若 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，$A_iA_j=\Phi(i\neq j)$，$P(A_i)>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，$P(B)>0$，则

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

(5)若 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称 A 与 B 相互独立；若 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 均相互独立；设有 $n(n\geqslant2)$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n})$$

则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.(注意:上式共有 $c_n^2+c_n^3+\cdots+c_n^n=2^n-n-1$ 个等式);若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$ 中任意两个事件都相互独立,则称它们两两独立;若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则其中任意 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 个事件都相互独立,且将其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 个事件换为其对立事件后得到的 n 个事件也相互独立;相互独立的 n 个事件必两两独立,反之不然.

(五) 贝努里概型

做 n 次重复试验,每次试验的结果是 A 或 $\overline{A}$ 且 $P(A)=p$,各次试验的结果相互独立,这种概型称为贝努里概型.在贝努里概型中,n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率为

$$P_n(m)=c_n^m p^m q^{n-m}\quad (m=0,1,2,\cdots,n)$$

式中 $q=P(\overline{A})=1-p$;事件 A 在 n 次试验中至少发生一次的概率为

$$P_n(m\geqslant 1)=1-(1-p)^n$$

二、典型例题分析

例1.1 写出下列随机试验的样本空间

(1)将一枚硬币连抛3次,观察正反面出现的情况;

(2)袋中有3只白球和2只黑球,从袋中任取2只球,且每次抽1只,取后不放回,观察取得球的颜色;

(3)将 a、b 两球随机放到3个不同盒子中.

分析 随机试验的样本空间,是由试验的所有基本事件组成的集合.所以,只要根据题设条件,分析基本事件的特性,则样本空间为 $\Omega=\{e|e\text{ 是试验的基本事件}\}$.

解 (1)用“H”表示出现“正面”,“T”表示出现“反面”.于是,由题设,基本事件是从两个相异元素 H、T 中,允许重复地取出3

个元素的排列，而所有这种排列共有$2^3=8$种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),$$
$$(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

(2)将白球编号为1,2,3,黑球编号为4,5,则基本事件是从5个相异元素中取出2个元素的排列，共$P_5^2=20$种可能结果，所以，样本空间是

$$\Omega=\left\{\begin{array}{cccc}(1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5)\\ (2,1) & (2,3) & (2,4) & (2,5)\\ (3,1) & (3,2) & (3,4) & (3,5)\\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,5)\\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4)\end{array}\right\}$$

(3)在此试验中，基本事件可分为两类，一类是a、b两球放在同一盒中，共有$P_3^1=3$种可能结果(用“0”表示盒中没放球)：

$$(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab)$$

另一类是a,b两球分别放在两个不同盒中，共有$P_3^2=6$种可能结果：

$$(a,b,0),(b,a,0),(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b),(0,b,a)$$

所以，样本空间是

$$\Omega=\{(ab,0,0),(0,ab,0),(0,0,ab),(a,b,0),(b,a,0),$$
$$(a,0,b),(b,0,a),(0,a,b),(0,b,a)\}$$

注 基本事件和样本空间是概率论中的两个十分重要的概念. 样本空间可以是有限集，也可以是无限集. 如观察“在一定时间间隔内来某商店的顾客数”的样本空间是

$$\Omega=\{k\mid k=0,1,2,\cdots\}$$

再如观察“一个在液体中悬浮着的质点在时刻t的位置”的样本空间是

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x_1\leqslant x<x_2,y_1\leqslant y<y_2,z_1\leqslant z<z_2\}$$

例1.2 设A,B,C是三个事件，试将下列事件用A,B,C表

示出来

A_1——A 发生，而 B,C 都不发生；

A_2——A,B 都发生而 C 不发生；

A_3——A,B,C 恰有一个发生；

A_4——A,B,C 至少有一个发生；

A_5——A,B,C 均不发生；

A_6——A,B,C 至少有一个不发生.

分析 解答本题的关键，在于把握题中事件的属性，利用事件间的关系与运算，把已知事件恰当地联系起来.

解 依事件积的定义：

$A_1=A\overline{B}\overline{C}=A(\overline{B\cup C})=A-(B\cup C)$（注意 $A\overline{B}\overline{C}\neq A-BC$）

$A_2=AB\overline{C}=AB-C$

A,B,C 恰有一个发生，就是指 A 发生而 B,C 不发生，或者 B 发生而 A,C 不发生，或者 C 发生而 A,B 不发生. 所以

$A_3=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$

由和事件的定义，有

$A_4=A\cup B\cup C$

对 A_4，也可以这样来理解：三个事件中至少有一个发生，就是三个事件中恰有一个发生，或者恰有两个发生，或者三个都发生. 因此

$A_4=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$

A,B,C 均不发生，相当于 $\overline{A}$、$\overline{B}$、$\overline{C}$ 都发生或 A_4不发生，所以

$A_5=\overline{A}\overline{B}\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$（称此等式为事件运算的德莫根律）.

同理，

$$A_6=\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}=$$
$$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$$（后一等式为德莫根律的另一形式）.

注 从题解中可以看出，一个复合事件，常常可用另一些事件的运算表

示且表达形式不惟一.

例1.3 某人外出旅游两天，据天气预报，第一天下雨的概率为0.6，第二天下雨的概率为0.3，两天都下雨的概率为0.1，求：

(1)第一天下雨而第二天不下雨的概率；

(2)至少有一天下雨的概率；

(3)两天都不下雨的概率.

解 令 A_i="第 i 天下雨"$(i=1,2)$

由题设

$$P(A_1)=0.6,P(A_2)=0.3,P(A_1A_2)=0.1$$

(1)令 B="第一天下雨而第二天不下雨"则

$$B=A_1-A_2=A_1-A_1A_2\text{，且 }A_1A_2\subset A_1$$

(注意第二个等号是关键的一步)

于是

$$P(B)=P(A_1)-P(A_1A_2)=0.6-0.1=0.5$$

(2)令 C="至少有一天下雨"，则 $C=A_1\cup A_2$于是

$$P(C)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=$$
$$0.6+0.3-0.1=0.8$$

(3)令 D="两天都不下雨"，则 $D=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2=\overline{A_1\cup A_2}$(德莫根律).

于是

$$P(D)=P(\overline{A_1\cup A_2})=P(\overline{C})=1-P(C)=$$
$$1-0.8=0.2$$

例1.4 从5双不同尺码的手套任取4只，求至少有2只配成一双的概率.

分析 从10只手套中任取4只，可理解成一次取4只，也可理解为一只一只地取，即考虑手套被取出时的先后顺序，因而问题有以下多种解法.

解 令 A="4只手套中至少有2只配成一双".

解法1 考虑一次取4只，这时基本事件总数为 $C_{10}^4=210$.

要使 A 发生，可考虑如下取法：①先从5双中任取一双，再从4双中任取2双，且从2双中各取1只，便可得4只中恰有2只配成一双的取法数 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1$；②从5双中任取2双，得4只恰好配成两双的取法数 C_5^2. 于是 A 所含基本事件数为 $C_5^1C_4^2C_2^1C_2^1+C_5^2=130$. 故

$$P(A)=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

解法2 4只中恰有2只配成一双的取法数按下列步骤进行：先从5双中任取一双，再从余下8只中任取2只，但须剔除其中配成一双的种数. 于是 A 所含基本事件数为

$$C_5^1(C_8^2-C_4^1)+C_5^2=130$$

从而

$$P(A)=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}$$

解法3 考虑 A 的逆事件 $\overline{A}$ 所含的基本事件数，所取的4只中. 若左手套有 i 只 $(i=0,1,2,3,4)$，则右手套有 $(4-i)$ 只. 这里 i 只左手套可从5只左手套中选取，有 C_5^i 种取法，而 $(4-i)$ 只右手套，只能从余下的 $(5-i)$ 双手套的右手套中取，共有 C_{5-i}^{4-i} $(i=0,1,2,3,4)$，所以 $\overline{A}$ 所含的基本事件数为

$$\sum_{i=0}^{4}C_5^iC_{5-i}^{4-i}=80$$

从而

$$P(\overline{A})=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}$$

解法4 $\overline{A}$ 所含基本事件数也可以这样得到：从5双中任取4双，再从这4双中每双各取一只，则有

$$C_5^4C_2^1C_2^1C_2^1C_2^1=80$$

从而

$$P(A)=1-P(A)=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}$$

解法5 设想手套是一只一只取出的，这时基本事件总数为 $P_{10}^{4}=5\ 040$. 而 $\overline{A}$ 中的基本事件可这样确定：第一只手套有10种取法，第二只手套有8种取法（除去已取出的第一只及与第一只配成一双的另一只）. 同理，第三、第四只手套各有6种、4种取法，所以 $\overline{A}$ 中的基本事件为

$$10\times8\times6\times4=1\ 920$$

从而

$$P(\overline{A})=\frac{1\ 920}{5\ 040}=\frac{8}{21}$$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{13}{21}$$

解法6 令 $A=$"第 i 双手套被取出"$(i=1,2,3,4,5)$因为共取4只，所以同时取出三双及三双以上的概率为0. 从而

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{5}A_i)=$$

$$\sum_{i=1}^{5}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}P(A_iA_j)+$$

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 5}P(A_iA_jA_k)-\sum_{1\leqslant i<j<k<l\leqslant 5}P(A_iA_jA_kA_l)+$$

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5)=5\times\frac{1\times C_8^2}{C_{10}^4}-C_5^2\frac{1}{C_{10}^4}=$$

$$\frac{140}{210}-\frac{10}{210}=\frac{13}{21}$$

注 本题表明，同一问题，可用不同样本空间描述，引导出不同的解题方法；在同一样本空间中，确定某事件所含基本事件数也有不同途径. 此外，在计算基本事件个数时，应正确理解样本空间及待求事件的特性，否则，将会导致错误. 如在方法3中，若没有注意到从5只左手套中取出 i 只后，另5只右手套中只有 $5-i$ 只不能与已取出的 i 只配成一双的事实，便可将 $\overline{A}$ 所含基本事