考研数学题库精编
系列丛书

修订再版

经济类

考研者→备战应考的良师益友
大学生→训练提高的最佳选择

微积分
题库精编

陈放

修订2版

内容精讲指要
基本题型例析
同步训练题萃
自我检测试题

NEUPRESS
东北大学出版社

考研数学题库精编系列丛书

经济类

微积分题库精编

（修订2版）

陈　放

东北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分题库精编/陈放.2版(修订本).—沈阳:东北大学出版社,2001.4

(考研数学题库精编系列丛书:经济类)

ISBN 7-81054-478-0

Ⅰ.微… Ⅱ.陈… Ⅲ.微积分-研究生-入学考试-试题 Ⅳ.O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 08495 号

©东北大学出版社出版

(沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 邮政编码 110006)

电话:(024)23890881 传真:(024)23892538

网址:http://www.neupress.com E-mail:neuph@neupress.com

北宁市印刷厂印刷 东北大学出版社发行

开本:850mm×1168mm 1/32 字数:382 千字 印张:14.75

2001 年 4 月第 2 版 2001 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑:孟 颖 郭爱民 责任校对:张淑萍

封面设计:唐敏智 责任出版:秦 力

定价:22.00 元

编辑寄语

近年来，随着国家不断扩大研究生招生数额，大批有志的青年朋友纷纷加入到了考研大军中。于是，考研一族每天匆匆的行色、忙碌的身影便成为大学校园中一道亮丽的风景。如何遴选一套合适的参考书，使您既能系统地复习基础知识和基本理论，全面地掌握近年来考研的题型、题路、题质和题量，又能抓住重点、难点和考点，通过备“战”练“兵”进行强化训练，在较短时间内培养解题能力、增长实战技巧、提高应试水平，是一件至关重要的大事。“良好的开端，是成功的一半。”“好的教本，是成功之本”。

《考研数学题库精编》（理工类、经济类）系列丛书自2000年3月面世以来，以其题型全、题路新、题质高、题量大等特点，深受全国各地广大考生的青睐。一些考研辅导班的授课教师经过多方比较，最终选择本丛书作为授课的主要教本；许多读者因在当地书店未购到本丛书，纷纷来电、来函办理邮购事宜。更有一些数学专家对本丛书给予了较高的评价，并提出了很好的建议。所有这些，既是对我们丛书编辑的鼓励和信任，更是对我们的鞭策。

本丛书经过此次修订后，纠正了差错，弥补了疏漏，吸收了各方面的智慧，更好地体现了编辑思想和设计意图。该丛书主要具有以下特点。

一是紧扣考研大纲 根据《考研数学复习大纲》的要求确定编写内容，对重要的概念、定理、公式作出扼要剖析，便于考生加深理解，增强记忆，避免犯概念性错误或其他解题

错误。

二是精选典型例题 针对历年考研基本题型，精心遴选典型例题。对于重点例题，或在解题前给出【解题思路】，或在解题后归纳【解题技巧】，提供【方法总结】，以使考生切实收到举一反三、触类旁通之效。

三是突出重点难点 本丛书突出重点、难点和考点，并有“错点分析”、“易错提醒”和“巧点揭示”，使读者在较短时间内快速掌握要害之处和关键所在，提高学习效率，取得最佳效果。

四是同步强化训练 书中每单元都精选了大量的同步训练题(但绝无超出《大纲》的偏题、怪题)，供读者备“战”练“兵”，以使读者更透彻地消化和理解所学内容，强化应试能力，大大提高临场的解题速度和准确性。

五是应试水平检测 每章后都选编了历届考研的数学真题，便于考生对应试水平、复习效果和综合能力进行完全检测，以便找出差距，制定应对措施。

值得一提的是，本丛书的作者都是多年从事考研辅导工作、经验丰富的知名专家、教授。书中每一个字符都凝聚着他们的智慧，是其心血和汗水的结晶。

最后，编辑将古希腊哲学家亚里士多德的一段名言转录于此，送给广大的考生朋友：

“能够摄取必要营养的人，要比吃得很多的人更健康。同样地，真正的学者往往不是读了很多书的人，而是读了有用的书的人。”

愿本丛书能成为您备战应考的良师益友、斩关夺隘的得力助手。祝您旗开得胜，马到成功！

丛书编辑

2001年4月

再版前言

按照最新修订的经济学硕士研究生入学《数学考试大纲》的要求，为了帮助经济类在校学生和自学者学好经济应用数学微积分，也为备考研究生提供一份实用的学习资料，编写了《微积分题库精编》这本书。并在第一版的基础上，根据考研命题的最新特点和读者的建议、要求进行了修订。

本书将经济数学（微积分）按考试大纲所要求的概念、定理和公式进行了简明扼要的叙述、归纳和总结；按问题分类，得出了各类问题的解题规律、方法和技巧。它不同于一般的教材、习题集和题解，自具特色。本书所选用的实例较多，且梯度大、类型广。例题部分取材于赵树嫄主编、中国人民大学出版社出版的《微积分》中的典型习题。另一部分取材于历届全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学试题和1979年至1985年全国各高校研究生入学考试的数学试题及相关的一些类型题。考虑到经济类的学生和自学者学习经济应用数学微积分的困难，编写此书时，在选题理论推导、文字叙述等诸多方面尽量适应其特点。对一些较重要的问题，作出了必要的解题方法分析。在很多的解答后加写了注意部分，以便读者总结解题经验，避免出现常犯的错误。此外，每单元后均设有必要的同步训练题，每章后都选编了自我检测试题，便于读者很

好地掌握所学到的内容和方法。

通过对入学试题的研讨，使有志于攻读硕士学位的同志了解考研试题的特点及逐年发展的趋势。从知识、题型、方法和技巧上做好应试准备，做到心中有数。这些考题并非都是难题。其主要特点是全面、准确地反映了考研大纲的要求。多做考题及相关的类型题，并由此总结和归纳解题规律、方法和技巧，对于启迪思维，开发智力，提高能力及加深对《微积分》的理解都是大有裨益的。

本书也可供全日制大专院校、电大、职大等广大学生学习微积分时阅读和参考；对于自学者和有志于攻读经济学和工商管理（MBA）硕士研究生的同志，本书将会有很大的帮助；对于从事《微积分》教学的教师，也有一定的参考价值。

目前适合经济类学生阅读的微积分课外读物不多。作者使用多年来在教学过程中所积累的资料，汇集了自 1979 年至 1985 年全国各高校研究生入学考试的试题，以及自 1987 年至 2001 年的数学三、数学四（原数学四、数学五）的大部分试题，编写成这本书。为推进我国高校教学改革尽绵薄之力。希望它能激起在校生和自修者学习《微积分》的浓厚兴趣。这里，谨向对本书给予厚爱和提出积极建议的广大读者表示深深的谢意。

由于编者水平所限，书中难免有疏漏之处，欢迎读者批评指正。

陈 放 谨识

2001 年元月

于东北财经大学

目　　录

第一章　函数·极限·连续

第一单元　函　　数

内容精讲指要

一、函数的概念

定义　设 x 与 y 是两个变量，分别在实数集合 X 与 Y 中取值．对每一个值 $x\in X$，按照某一法则 f，存在着惟一确定的值 $y\in Y$ 与之对应．记为 $f(x)$．称 y 是 x 的函数．记作

$$y=f(x).$$

称 x 为自变量，y 是因变量，X 是定义域．

函数值的全体，即集合

$$\{y\in Y\mid y=f(x),\ x\in X\}$$

称为函数的值域，记作 $f(x)$．显然 $f(x)\subset Y$．

注意　(1) 这里定义的函数是单值的．例如由 $x^2+y^2=R^2$ 解出 $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$．我们分别讨论其中之一（一个单值分支）．

(2) 只有一个自变量的函数，称为一元函数．

【例 1-1】　已知 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$．求 $f(x)$ 的定义域及 $f[f(-7)]$ 的值．

【解】 若使 $f(x)$有意义，应有$\begin{cases}3-x>0\\3-x\neq1\\49-x^2\geqslant0\end{cases}$

解之，有 $-7\leqslant x<2$ 及 $2<x<3$. 故 $f(x)$的定义域为 $[-7,2]\cup(2,3)$.

因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg10}$，所以 $f[f(-7)]=\dfrac{1}{\lg2}+4\sqrt{3}$.

函数概念的本质特征是确定了函数的两个要素：定义域和对应法则. 定义域是自变量和因变量能相互联系，构成函数关系的条件. 若无此条件，函数就没有意义了. 对应法则是理解函数概念的关键，函数关系不同于一般的依赖关系，“y 是 x 的函数”并不仅仅意味着 y 随 x 的变化而变化. 函数关系也不仅同于因果关系.

记号 $f(\quad)$有着广泛的涵义，不能仅认为它只表示某个数学表达式. 因为只要确立了对应法则，就可以用它来表示. 可以表示成一个或几个数学表达式，也可以表示为一个图形、一张表格.

【例 1-2】 设 $f(x)$对一切实数 x，y，满足等式 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且 $f(0)\neq0$，$f(1)=a$. 求证：(1) $f(0)=1$；(2) 对一切自然数 n，有 $f(n)=a^n$.

【证】 (1) 令 $x=y=0$，则 $f(0)=[f(0)]^2$. 因为 $f(0)\neq0$，所以 $f(0)=1$.

(2) 当 $n=1$ 时，$f(1)=a^1=a$ 成立；

设 $n=k$ 时，等式成立，即 $f(k)=a^k$.

当 $n=k+1$ 时，因为 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)$，即 $a^{k+1}=a^k\cdot a^1$. 所以对一切自然数 n，都有 $f(n)=a^n$.

【例 1-3】 下列函数中哪组是同一函数？

(A) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ 与 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$；

(B) $f(x)=\ln|x|$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}\ln x^2$；

(C) $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ 与 $g(x)=\arcsin x+\arccos x$，

【解】 答案：(B).

对于(A)，$f(x)$的定义域是不等式$\frac{x+1}{x}\geqslant 0$的解，$g(x)$的定义域是不等式$\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x>0\end{cases}$的解．显然$f(x)$与$g(x)$的定义域不同．

(B) 对于任意实数x，$\ln|x|=\ln\sqrt{x^2}=\frac{1}{2}\ln x^2$．且$f(x)$与$g(x)$的定义域均为实数集$\mathbf{R}$．故为同一函数．

对于(C)，当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，$g(x)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$．此时$f(x)$与$g(x)$的对应法则相同，但$f(x)$的定义域是实数集$\mathbf{R}$，$g(x)$的定义域是$[-1, 1]$．故不是同一函数．

注意 当两个函数的对应法则和定义域相同时，即使变量与对应法则使用的符号不同，实际上也是同一函数(或称相同)．但当两个函数的对应法则和值域相同时，并不表明这两个函数一定是同一函数．此时关键是看其定义域是否相同．

【例1-4】 设$f'(-x)=x[f'(x)-1]$，求$f(x)$.

【解】 令$-x=t$，有$f'(t)=-t[f'(-t)-1]$.

即
$$f'(x)=-x[f'(-x)-1]$$

从而有
$$\begin{cases}x=xf'(x)-f'(-x)\\ x=f'(x)+xf'(-x)\end{cases}$$

解之，得
$$f'(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$$

积分，有
$$f(x)=x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x+C.$$

【例1-5】 设$f(x)$满足$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$，求$f(x)$.

【解】 令$t=\frac{1}{x}$，有$f\left(\frac{1}{t}\right)-2f(t)=\frac{1}{t}$

即有
$$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{1}{x}$$

将此方程两端乘以2代入题设方程，有

$$-3f(x)=x+\frac{2}{x},$$

故 $$f(x)=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{x}\right)$$ 为所求.

二、函数的性质

1. 单调性 设 $f(x)$ 在区间 X 上有定义，对于任意的 x_1，$x_2\in X$，且 $x_1<x_2$. 若

$f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 X 上单调增加；

$f(x_1)>f(x_2)$，称 $f(x)$ 在 X 上单调减少.

2. 奇偶性 设 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 X 上有定义，若对任意的 $x\in X$，有 $f(-x)=f(x)$. 称 $f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

3. 有界性 设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $M>0$，对于任意的 $x\in D$，恒有 $|f(x)|<M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称为无界.

当 $f(x)<M$，称 $f(x)$ 在 X 上有上界；

当 $f(x)>-M$，称 $f(x)$ 在 X 上有下界.

4. 周期性 设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $T>0$，对于任意的 $x\in X$，有 $f(x+T)=f(x)$. 称 $f(x)$ 为周期函数. 满足于上式的最小正数 T_0，称为 $f(x)$ 的周期.

注意 (1) 并不是所有函数都具有这些特征；
(2) 函数的“有界”或“单调”与所讨论的区间有关；
(3) 具有奇偶性函数的定义域关于原点是对称的. 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$. 而 $f(x)+f(-x)=0$ 是判别 $f(x)$ 是奇函数的有效方法. 对于 $(-a,a)(a>0)$ 上的任意函数 $f(x)$. 则 $g(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数，$h(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数. 若 $f(x)$ 的定义域关于原点不对称，则 $f(x)$ 一定不是奇函数或

偶函数.

(4) 周期函数的周期通常是指最小正周期，但不是任何函数都有最小正周期.

【例 1-6】 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上有定义，$a>0$，$b>0$，若$\dfrac{f(x)}{x}$单调增加，则________成立.

(A) $f(a+b)>f(a)$；　(B) $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$；

(C) $f(a+b)\geqslant a+b$；　(D) 以上均不成立.

【解】 答案：(A)，(B).

因为由$\dfrac{f(x)}{x}$单调增加，且 $a+b>a$，则有

$$\frac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\frac{f(a)}{a}，即有\ f(a+b)\geqslant\frac{a+b}{a}f(a)>f(a)$$

所以(A)成立.

$$由\ \frac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\frac{f(a)}{a}，有\ \frac{f(a+b)}{a+b}\geqslant\frac{f(b)}{b}$$

从而，有　$\dfrac{a}{a+b}f(a+b)\geqslant f(a)$，$\dfrac{b}{a+b}f(a+b)\geqslant f(b)$

于是，有 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$. 即(B)成立.

但由 $f(a+b)\geqslant a+b$，可得 $\dfrac{f(x)}{x}\geqslant 1$，而题设未给出如此条件，所以(C)不成立.

【例 1-7】 同一对称区间上的奇函数与偶函数之和是________.

(A) 奇函数；　(B) 偶函数；

(C) 非奇非偶函数；　(D) 以上均可能.

【解】 答案：(D).

因为偶函数与奇函数之和确是非奇非偶函数. 但对于 $\varphi(x)=0$，与奇函数相加为奇函数；与偶函数相加为偶函数.

【例 1-8】 下列函数无界的是________.

(A) $f(x)=\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|$，$x\in\mathbf{R}$；

(B) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$;

(C) $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$;

(D) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x\in(0,1)$.

【解】 答案：(C).

对于(A)，因为 $-(x^2+1)\leqslant 2x\leqslant x^2+1$，即有 $|2x|\leqslant x^2+1$，则 $\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|\leqslant 1$. 故 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上有界.

对于(B)，由 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，有$\dfrac{\ln x}{x}\leqslant 0$，且 $\ln x$ 在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上单调增加，有 $\ln x\geqslant \ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$，所以有

$$\frac{\ln x}{x}\geqslant\frac{-\ln 2}{x}\geqslant\frac{-\ln 2}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2.$$

故 $f(x)$在$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$上有界，即 $-2\ln 2\leqslant f(x)\leqslant 0$.

对于(C)，取任意 $M>0$，存在 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}$，k 为大于$\left[\dfrac{M}{2\pi}\right]$的自然数，使

$$f(x_0)=\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}\cos\frac{1}{\frac{1}{2k\pi}}=2k\pi>2\pi\frac{M}{2\pi}=M$$

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$内无界.

对于(D)，当 $x\in(0,1)$时，有 $0<\sin x<x$. 即有 $0<\dfrac{\sin x}{x}<1$. 从而可知 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在$(0,1)$内有界.

注意 对于无界函数来说，一般都可以缩小定义域得到新的有界函数. 但不能通过去掉定义域中的有限个点或改变有限个点上的函数值而成为有界函数. 这是因为，无界是一种趋势，这种趋势与有限个点上的函数值无关.