北京大学教材

大学文科基础数学

第三册

姚孟臣　编

北京大学出版社

北 京 大 学 教 材

大学文科基础数学

第 三 册

姚孟臣 编

北京大学出版社

登记证号:(京)159号

北京大学教材

大学文科基础数学

第三册

姚孟臣 编

责任编辑:刘 勇

*

北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂激光排版
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

850×1168毫米 32开本 7.125印张 170千字
1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷
印数:0001—3,000册
ISBN 7-301-01578-0/O・0255
定价:2.20元

内 容 提 要

本书是作者多年来为北京大学等院校文科类各专业讲授的基础数学教材.全书共分三册.第三册包括线性规划问题的数学模型、单纯形方法、特殊解法、模糊集合及其性质、模糊关系与模糊统计等内容.为了适应初学者的需要,还在附录中介绍了模糊理论的数学基础.书中配有适量的习题,书后附有答案.

本书概念叙述清楚,语言流畅,表达严谨.它针对文科类学生学习高等数学的特点,不只停留在逻辑符号上,能用通俗易懂的语言多侧面、多角度把问题讲清楚.本书采用"模块式"结构,便于不同专业灵活选用.

本书可作为大学文科数学教材,又可供电视大学和自学考试的学生使用.对于社会科学工作者,本书也是一本较好的数学参考书.

目　　录

第十一章　线性规划问题

线性规划是研究在一组线性约束条件下，把一个线性函数极小化或极大化的问题. 它是运筹学的一个重要分支，是辅助人们进行科学管理的一种有效的数学方法.

线性规划在实际中的应用十分广泛，随着计算机的日益普及和发展，它所起的作用越来越大，几乎渗透到人们活动的各个领域.

在这一章里，我们首先列举几个简单的实例来阐明线性规划所研究的问题，然后给出线性规划问题的数学模型及其标准形式，最后介绍仅有两个变量的线性规划问题的图解法.

§1　线性规划所研究的问题

我们知道在生产和经济活动中，人力、物力和财力的流动往往要涉及到各种各样的因素，并且它们之间有着复杂的内在联系. 在许多实际问题中，人们希望在现有的条件下，找到解决问题的最优方案，如花费较少的人力、物力和财力，或者创造较多的经济价值等. 这就要求我们去分析所涉及到的各种各样的因素及其内在联系，进行统筹安排和组织，线性规划(Linear Programming 简记为 LP)方法是我们经常使用的一种行之有效的数学方法.

在使用数学方法解决实际问题时，需要把问题数学化，即建立它的数学模型. 对于寻找最优方案的问题来说，就是把要达到的目标和现有的各种条件用数学式子表达出来. 前者称为**目标函数**，后

者称为**约束条件**(简记为 s. t. ①). 线性规划所讨论的问题的目标函数是未知变量的线性函数,而约束条件是由关于未知变量的线性等式或线性不等式组成. 这里的未知变量是决策中的关键的量,称为**决策变量**.

线性规划应用的范围是相当广泛的,常见的有生产安排、合理下料、物资运输、资源利用等问题. 下面我们通过几个实例来介绍这类问题的数学模型是怎样建立的.

例 1 生产安排问题.

某厂用 A_1,A_2,A_3 三台设备生产 B_1,B_2,B_3,B_4 四种不同的产品,各种产品所需的加工时间,各台设备的日加工能力以及销售每件产品所获利润等由表 11-1 给出. 问怎样安排生产才能使每天获得的总利润最大?

设每天生产 B_1,B_2,B_3,B_4 的件数分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,总利润为 S,则

$$S = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 \text{ (元)}. \tag{1}$$

表 11-1

设备	加工时间(分钟/件)				加工能力(分钟/天)
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	2	1	1	410
A_2	2	0	3	2	440
A_3	3	1	2	1	430
利润(元/件)	6	4	5	3	

为了使得产品所需要的加工总时数不超过每台设备的日加工能力,$x_j(j=1,2,3,4)$应该满足:

① 记号 s.t. 是 subject to 的缩写,表示"受约束于".

$$
\begin{cases}
2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 \leqslant 410, \\
2x_1 \qquad\quad + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 440, \\
3x_1 + \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 \leqslant 430.
\end{cases} \tag{2}
$$

考虑到每种产品的产量都不可能是负值，所以 x_j 还应满足：

$$
x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3,4. \tag{3}
$$

x_j 除了满足上述要求外，还应该使总利润 S 达到最大.

综上所述，这个生产安排问题可归结为：求一组 x_1,x_2,x_3,x_4 的值，在满足(2)和(3)式的条件下，使总利润 S 达到最大.

在这里我们假定了所有产品都能销售出去，否则还要加上其它约束条件. 我们将这个问题的数学模型写成：

$$
\begin{aligned}
\max\ & S = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4. \\
\text{s.t.}\ & 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 + \ x_4 \leqslant 410, \\
& 2x_1 \qquad\quad + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 440, \\
& 3x_1 + \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 \leqslant 430, \\
& \ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

由此可见这类问题的数学模型包括决策变量、约束条件和目标函数三个要素.

例2 合理下料问题.

某工地需要把150根15m 长的钢筋截成长度不同的成套钢筋. 设每套由7根2m 长与2根7m 长的钢筋组成，问应怎样下料，才能使残料最少？

容易看出，把一根15m 长的钢筋截成长度分别为7m 与2m 的两种规格，有三种比较经济的方法，其结果如表11-2所示.

表 11-2

截　法	7m(根)	2m(根)	残　料(m)
1	1	4	0
2	2	0	1
3	0	7	1

设采用上述三种方法下料时，15m 长钢筋的根数分别为 x_1，x_2，x_3，残料的总长度为 S，则

$$S = x_2 + x_3(\mathrm{m}).$$

考虑到15m 长的钢筋总数为150根，并使截得的钢筋配套，x_j $(j=1,2,3)$应满足：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 150, \\ (4x_1 + 7x_3):(x_1 + 2x_2) = 7:2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 150, \\ x_1 - 14x_2 + 14x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

由于每种截法所截钢筋的根数都不可能是负值，所以 x_j 还应满足：

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,3. \tag{5}$$

x_j 除了满足上述要求外，还应该使残料总长度 S 最少.

综上所述，这个合理下料问题可归结为：求一组 x_1，x_2，x_3的值，在满足(4)和(5)式的条件下，使残料总长度 S 达到最小.

于是，合理下料问题的数学模型可以写成：

$$\begin{aligned} \min \ & S = x_2 + x_3. \\ \text{s.t.} \ & x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 = 150, \\ & x_1 - 14x_2 + 14x_3 = 0, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

例3 物资运输问题.

设有两个砖厂 A_1，A_2，每月生产砖分别为40万块与15万块，它们的产品供应 B_1，B_2，B_3三个工地，其需要量分别为17万块，23万块，15万块. 而各砖厂与各工地之间的运价（元/万块）列表如下：

表 11-3

运价 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	15	16	13
A_2	12	14	17

问如何调运，才能使运费最省？

这里我们假定运费与运量是成正比的，因此采用不同的调拨计划，运费就可能不一样. 例如，我们把 A_1厂生产的40万块砖分别供应给 B_1工地17万块，B_2工地23万块；把 A_2厂生产的15万块砖全部供给 B_3工地. 这种调拨计划可由表11-4表示：

表 11-4

砖厂 工地	B_1	B_2	B_3	运出量
A_1	17	23	0	40
A_2	0	0	15	15
运入量	17	23	15	55

这时运费为

$$15\times17+16\times23+17\times15=878(\text{元}).$$

如果我们把 A_1厂生产的40万块砖分别供给 B_1工地2万块、B_2工地23万块、B_3工地15万块；而把 A_2厂生产的15万块砖全部供给 B_1工地. 这种调拨计划可由表11-5表示：

表 11-5

砖厂 工地	B_1	B_2	B_3	运出量
A_1	2	23	15	40
A_2	15	0	0	15
运入量	17	23	15	55

这时运费为

$$15\times 2+16\times 23+13\times 15+12\times 15=773(\text{元}).$$

可见，后一种调拨方案要比前一种节省运费105元. 还有没有更好的调拨方案呢？怎样找一个运费最省的调拨方案呢？下面我们来讨论这些问题.

设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 的数量 $(i=1,2;j=1,2,3)$，则各砖厂与各工地之间的运量可列表如下：

表 11-6

砖厂＼工地	B_1	B_2	B_3	运出量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	40
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	15
运入量	17	23	15	55

这样，总的费用 S 就是所有砖厂到工地的运量乘以相应运费再加起来，即

$$S=15x_{11}+16x_{12}+13x_{13}+12x_{21}+14x_{22}+17x_{23}.$$

因为从砖厂 A_1，A_2 运往三个工地砖的总数应分别为 A_1 和 A_2 的产量，所以这些 x_{ij} 应该满足：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=40,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=15.\end{cases}\tag{6}$$

另一方面，两个砖厂供给 B_1，B_2，B_3 工地砖的数量应分别为 B_1，B_2，B_3 的需求量，所以 x_{ij} 还应该满足：

$$\begin{cases}x_{11}+x_{21}=17,\\ x_{12}+x_{22}=23,\\ x_{13}+x_{23}=15.\end{cases}\tag{7}$$

考虑到 x_{ij} 是运量，不能是负数，所以 x_{ij} 还应满足：

$$x_{ij}\geqslant 0\quad(i=1,2;j=1,2,3).\tag{8}$$

x_{ij} 除了满足上述要求外，还应该使总的运费 S 最省.

综上所述，这个物资运输问题可以归结为：求一组 x_{11}，x_{12}，

$x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}$的值，在满足(6)，(7)，(8)式的条件下，使总的运费 S 达到最小.

于是，物资运输问题的数学模型可以写成：

$$\min S = 15x_{11} + 16x_{12} + 13x_{13} + 12x_{21} + 14x_{22} + 17x_{23}.$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 15, \\
& x_{11} + x_{21} = 17, \\
& x_{12} + x_{22} = 23, \\
& x_{13} + x_{23} = 15, \\
& x_{11} \geqslant 0, x_{12} \geqslant 0, x_{13} \geqslant 0, \\
& x_{21} \geqslant 0, x_{22} \geqslant 0, x_{23} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

上面的几个例子，虽然它们有着不同的实际内容，但从数学上来说，都可以归结为这样的一类极值问题：求一组变量的值，这组值要满足一组用线性等式或线性不等式表示的约束条件(如供求关系、生产任务、资源限制等)；同时要使某个用线性函数表示的指标(如总运费、总残料、总产值)达到最小或最大. 我们把具有这些特征的问题称为线性规划问题.

§2 线性规划问题的数学模型

线性规划问题是具有下述形式的数学问题：

$$\begin{aligned}
\min(\max)\ S &= f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\
&= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1, \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0. \tag{11}$$

这里的 $a_{ij},b_i,c_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$是常数.未知变量 x_j $(j=1,2,\cdots,n)$称为决策变量,函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为目标函数,条件(10),(11)称为约束条件.有时条件(11)也称为变量的非负性约束.

上面给出的线性规划问题的数学模型是针对不同的实际问题而言的,因此目标函数可以是求最小值,也可以是求最大值;约束条件可以是"≤"形式的不等式,也可以是"≥"形式的不等式,还可以是等式.这种多样性给讨论问题带来不便.为了方便起见,我们规定线性规划问题的标准形式为:

$$\min \quad S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \tag{13}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0. \tag{14}$$

这里我们总可以假定每一个 $b_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$,否则,在相应的等式两端乘以$-1$即可;并假定由约束条件(13)所表示的 n 个变量的 m 个方程是相互独立的,并且这个方程组有解且不是唯一的,即 $m<n$.

下面我们讨论其他形式的线性规划问题怎样化成上面这种标准形式:

(1) 如果给出的线性规划问题是要求使目标函数 S 达到最大,那么我们只要在目标函数上乘以-1,然后再求它达到最小即可.这是因为

$$\max S = -\min(-S),$$

所以只要把求 S 的最大值,换成求$-S$ 的最小值,约束条件不变,就得到了一个标准形式的新的线性规划问题.求出新的问题的最小值后,再乘以-1,便得到原来问题的最大值.

(2) 如果给出的线性规划问题的约束条件中有不等式约束，那么我们可以引入新的变量，把不等式改成等式. 例如对于不等式约束

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots a_{kn}x_n \leqslant b_k, \tag{15}$$

我们可以引入一个新变量 x_{n+k}，用下面两个约束：

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k,$$

$$x_{n+k} \geqslant 0$$

来代替原来的不等式约束(15). 同理，对于不等式约束

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n \geqslant b_l, \tag{16}$$

则可以引入另一个新变量 x_{n+l}，用下面两个约束：

$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots a_{ln}x_n - x_{n+l} = b_l,$$

$$x_{n+l} \geqslant 0$$

来代替原来的不等式约束(16).

这里的 x_{n+k}和 x_{n+l}我们统称为**松弛变量**. 需要指出的是松弛变量在目标函数中的系数为零.

(3) 如果给出的线性规划问题的约束条件中没有非负性约束：

$$x_j \geqslant 0,$$

则 x_j 可以自由取值，我们称 x_j 为自由变量. 这时我们可以引入两个非负变量 $x_j' \geqslant 0, x_j'' \geqslant 0$，并令

$$x_j = x_j' - x_j'',$$

把它代入到目标函数与约束条件中去，从而消去 x_j，并增加

$$x_j' \geqslant 0, \quad x_j'' \geqslant 0$$

这样两个约束，化为对全部变量都有非负约束的标准形式了.

例1 在 § 1的例1中，我们已经得到线性规划问题：

$$\begin{aligned}
\max \quad & S = 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4, \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 410, \\
& 2x_1 \qquad\quad + 3x_3 + 2x_4 \leqslant 440,
\end{aligned}$$

$$3x_1+x_2+2x_3+x_4\leqslant 430,$$
$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0.$$

试将上述问题化为标准形式.

解 令 $S'=-S$,把求 $\max S$ 改为求 $\min S'$. 引入松弛变量 $x_5\geqslant 0,x_6\geqslant 0,x_7\geqslant 0$,分别加到约束条件的第一、二、三不等式的左端中,使它们变为等式. 松弛变量 x_5,x_6,x_7在这个实际问题中分别表示 A_1,A_2,A_3三台设备日加工能力的剩余量,即没有被利用的资源,当然它们没有被利用加工各种产品,因此,不能转化为价值. 在目标函数中,变量 x_5,x_6,x_7的系数(通常称为收益系数或利润系数)应当为零. 于是此问题的标准形式为:

$$\min\ S'=-6x_1-4x_2-5x_3-3x_4+0x_5+0x_6+0x_7.$$
$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=410,\\ &2x_1+3x_3+2x_4+x_6=440,\\ &3x_1+x_2+2x_3+x_4+x_7=430,\\ &x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0,x_4\geqslant 0,x_5\geqslant 0,\\ &x_6\geqslant 0,x_7\geqslant 0.\end{aligned}$$

例2 试将线性规划问题

$$\min\ S=x_1-3x_2+4x_3.$$
$$\begin{aligned}\text{s.t.}\quad &x_1+2x_2-x_3\leqslant 4,\\ &2x_1+3x_2+x_3\geqslant 5,\\ &x_2+x_3\geqslant 3,\\ &x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

化为标准形式.

解 引入松弛变量 $x_4\geqslant 0,x_5\geqslant 0,x_6\geqslant 0$. 在第一个约束条件的"$\leqslant$"号左端加入 x_4;在第二、三个约束条件"$\geqslant$"号左端分别减去 x_5、x_6,于是此问题的标准形式为

$$\min\ S=x_1-3x_2+4x_3+0x_4+0x_5+0x_6.$$
$$\text{s.t.}\quad x_1+2x_2-x_3+x_4=4,$$

$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2+x_3 \quad -x_5 \quad &=5,\\
x_2+x_3 \quad -x_6&=3,\\
x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0, x_4&\geqslant 0,\\
x_5\geqslant 0, x_6&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

注意，在目标函数中，引入的松弛变量的系数一定为零.

利用向量和矩阵的记号，可以把线性规划问题的标准形式(12)，(13)和(14)简记为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & S = C'X.\\
\text{s.t.}\quad & AX = b,\\
& X \geqslant O.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

这里

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},
$$

$$
b = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix},
$$

O 表示零向量. 我们假设 $m<n, b\geqslant O, AX=b$ 所表示的方程组是相容的，且 m 个方程也是独立的，也就是假设 $m<n, b\geqslant O, \mathrm{r}(A)=\mathrm{r}(A,b)=m$.

进一步，若用

$$
P_j = \begin{bmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n)
$$

表示矩阵 A 的第 j 列，则矩阵 A 可以写成分块形式，即