王友方
葛钟美　主编
王树泽

SHIBIAN
HANSHULITI
XITIJI

实变函数例题习题集

山东教育出版社

实变函数例题习题集

王友方
葛钟美　编
王树泽

山东教育出版社

1991年·济南

鲁新登字2号

实变函数例题习题集

王友方　葛钟美　王树泽 编

*

山东教育出版社出版

(济南经九路胜利大街)

山东省新华书店发行　山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　15.5印张　334千字

1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷

印数 1—1,000

ISBN 7—5328—1143—3/G·959

定价 4.50元

前　言

众所周知，数学这门课程，足够数量的例题和习题是十分必要的。否则，教学工作将难以进行。自60年代以来，在历年的实变函数论这一学科的教学实际中，我们都遇到教材中例题习题太少这样一个突出的问题，这给教学工作带来诸多不便。为了解决这个问题，使学生切实掌握其基础理论和应用方法并提高解决问题的能力，我们根据多年教学经验和所积累的资料即讲稿、例题和习题，结合当前高等学校教学工作的实际，编成了这本《实变函数例题习题集》，以供参考。由于实变函数论不仅是大学数学专业的重要基础课程，也是其它理工科专业现代数学分析的重要基础部分，所以相信本书对理工科大学师生将会有广泛的使用价值。

在编写过程中，我们按综合大学及师范院校教学大纲的要求，参照已出版的北京大学、吉林大学、南京大学、山东大学、复旦大学和华东师范大学等校编写的教材，对已积累的材料进行了精选，不仅使其尽量适用于本专科在校师生，也充分顾及到函授生以及中学数学教师进修的需要。

全书分为6章，每章中包括概念与定理、例题选解、习题三部分内容。全书共编选例题356道，习题366道。题目类型较多，其中一部分具有较高难度。书末附有习题解答或提

示。

限于水平，书中难免缺点错误，恳请读者批评指正。

王友方

1990年12月于山东教育学院

目　录

第一章 集 合

§1 集合及其运算

一、概念与定理

集合（或集）是指“在一定范围内，明确的能互相区别的个体事物构成的整体”．组成集合的每个个体事物称为该集合的元素，简称元．

设A是一个集合，如果a是它的元素，则记为$a\in A$，读作a属于A．如果a不是A的元素，则记为$a\overline{\in}A$或$a\notin A$，读作a不属于A．任何对象对某一集合而言，或者属于该集合，或者不属于该集合，二者必居其一，且只居其一．

表示集合的方法有两种：列举法和描述法．前者是在花括号内将集合的元素一一列举出来，如$A=\{1,\ 2,\ 3\}$；后者则是将集合之元素的特征描述出来，如$A=\{x:\ x<4$且x为自然数$\}$．

若集合A的元只有有限个，则称A为有限集．不含任何元素的集合称为空集，记作ϕ．一个不空的集合，如果不是有限集，就称为无限集．

定义1.1　如果集合A的每个元都属于集合B，则称A为B的子集，记作$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B，或B包含A．规定空集是任一集合的子集．

定义1.2　如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A与B相等．记作$A=B$。

定理1.1　对任意集合A，B，C，均有

（1）$A\subset A$；

（2）若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

定义1.3　设A，B是两个集合，

（1）由A和B中的一切元所组成的集合称为A和B的并集（或称和集）．记作$A\cup B$。即

$$A\cup B=\{x:\ x\in A\text{或}x\in B\}$$

（2）由同时属于A和B的所有元素构成的集合称为A和B的交集（或称通集）．记作$A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x:\ x\in A\text{且}x\in B\}$$

（3）由属于A但不属于B的那些元所组成的集合称为A与B差集，记作$A-B$，即

$$A-B=\{x:\ x\in A\text{且}x\bar{\in} B\}$$

当$B\subset A$时，差集$A-B$又称为B关于A的余集（或补集）．记作$\mathscr{C}_A B$。

当我们只讨论某个固定集合S的一些子集时，称S为基本集，B关于S的余集$\mathscr{C}_S B$简记为$\mathscr{C}B$。

（4）称集合$(A-B)\cup(B-A)$为A与B的对称差，记作$A\triangle B$。

并与交的运算可以推广到任意个集合的情形．设$\{A_\alpha:\ \alpha\in I\}$是一族集合，这里$I$是指标集，$\alpha$在$I$中取值．这一族集合的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\ \text{存在某个}\alpha\in I,\ \text{使}x\in A_\alpha\}$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{x: \text{对一切}\alpha\in I, \text{有}x\in A_\alpha\}$$

定理1.2 集合并与交的运算满足

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

(3) 分配律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

一般地有

$$A\cap(\bigcup_{\alpha\in I}\beta_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}(A\cap B_\alpha),$$

$$A\cup(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}(A\cup B_\alpha);$$

(4) 幂等律 $A\cup A=A$，$A\cap A=A$。

定理1.3 集合的补运算具有性质

(1) $\mathscr{C}S=\Phi$，$\mathscr{C}\Phi=S$；

(2) $A\cup\mathscr{C}A=S$，$A\cap\mathscr{C}A=\Phi$；

(3) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$；

(4) $A-B=A\cap\mathscr{C}B$；

(5) 若$A\subset B$，则$\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$。

定理1.4 笛摩根(De・Morgan)法则

$$\mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha,\quad \mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$$

定理1.4 设A_1，A_2，…，A_n，…是一列集合，称集 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i$为集列$\{A_n\}$的上限集，记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$，称$\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty}A_i$

为$\{A_n\}$的下限集，记作$\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$。当$\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n$时，则称集列$\{A_n\}$收敛．称其上限集（等于下限集）为极限集，记为$\lim\limits_{n\to\infty}A_n$。

如果$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，则称集列$\{A_n\}$是单增集列；若$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，则称$\{A_n\}$为单减集列。

定理1.5　设$\{A_n\}$是一列集合，则

(1) $x\in\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n\Leftrightarrow$有无限多个$A_n$含有$x$；

(2) $x\in\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\Leftrightarrow$只有有限多个$A_n$不含$x$；

(3) $\varliminf\limits_{n\to\infty}A_n\subset\varlimsup\limits_{n\to\infty}A_n$。

定义1.5　设A，B是两个非空集合，称一切可能的有序元素对(a, b)（其中$a\in A$，$b\in B$）所构成的集合为A与B的乘积（或直积），记作$A\times B$。即

$$A\times B=\{(a, b): a\in A, b\in B\}$$

空集ϕ与任何集合的乘积仍为空集．

二、例题选解

例1　设集合$A=\{1, \{2\}, 3\}$，问下述表达式是否正确？(a) $1\subset A$；(b) $\{1\}\subset A$；(c) $\{2\}\in A$；(d) $2\in A$；(e) $\{1\}\overline{\in}A$；(f) $\{1\}\in A$。

解　(a)不正确。因为“1”是A的一个元素，不是A的子集。所以$1\subset A$不正确．

(b) 正确。因为$\{1\}$是含一个元素“1”的集合，而“1”也是A的元素，所以$\{1\}$是A的子集．

(c) 正确。因为$\{2\}$是A的一个元素，所以有$\{2\}\in A$，

(d) 不正确．因为A中没有“2”这个元素，所以$2 \overline{\in} A$。

(e) 正确．这是因为$\{1\}$不是A的元素。

(f) 不正确．理由同(e)。

例 2　设A是一个非空集，ϕ是空集，问是否有(a)$A\in A$；(b)$\phi\in A$；(c)$\{\phi\}\subset A$；(d)$\phi\subset A$。

解　(a) 不对．任何集合都不能作为它自己的元素。

(b) 当ϕ是A的元素时，有$\phi\in A$．否则$\phi\overline{\in} A$。

(c) 当ϕ是A的元素时，$\{\phi\}\subset A$，否则$\{\phi\}\not\subset A$。

(d) 对任何集合A，总有$\phi\subset A$。

注　当ϕ是A的一个元素时，表达式“$\phi\in A$”中的ϕ是元素，而表达式“$\phi\subset A$”中的ϕ则是集合，必须分清ϕ所充当之不同角色。

例 3　设$A_n=\{x：-1+\frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,\cdots$，

求$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$和$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

解　容易看出，$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，由集合的运算定义可得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x：-1<x<1\}；\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A_1=\{0\}.$$

例 4　设$A_n=\left(-1+\frac{1}{n},\ 1+\frac{1}{n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，

求$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_1-A_2$，$A_2-A_1$及$A_1\triangle A_2$。

解 由定义1.3知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cup \cdots \cup \left(-\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right) \cup \cdots = (-1, 2,),$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = (0, 2) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cap \cdots \cap \left(-\frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n}\right) \cap \cdots = (0, 1],$$

$$A_1 - A_2 = (0, 2) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left[\frac{3}{2}, 2\right),$$

$$A_2 - A_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - (0, 2) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right],$$

$$A_1 \triangle A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 2\right)$$

例 5 设$A_\alpha = \{x: \alpha - 1 < x \leqslant \alpha\} = (\alpha - 1, \alpha]$，$\alpha \in I$，$I$为实数集．求$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$，$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$及$A_\alpha - A_\beta$。

解 由定义1.3得

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = (-\infty, +\infty), \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \phi$$

$$A_\alpha - A_\beta = \begin{cases} A_\alpha & \text{当}\beta \leqslant \alpha - 1\text{或}\beta \geqslant \alpha + 1, \\ (\beta, \alpha] & \text{当}\alpha - 1 < \beta \leqslant \alpha, \\ (\alpha - 1, \beta - 1] & \text{当}\alpha < \beta < \alpha + 1. \end{cases}$$

例 6　设$f(x)$是$[a, b]$上的实函数，证明

$$\{x\in[a, b]: f(x)>a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in[a,b]: f(x)\geqslant a+\frac{1}{n}\}.$$

证　记$A=\{x\in[a, b]: f(x)>a\}$，$B_n=\{x\in[a, b]: f(x)\geqslant a+\frac{1}{n}\}$. $n=1, 2, \cdots$.

若$x_0\in A$，则$f(x_0)>a$，故存在n_0使得$f(x_0)\geqslant a+\frac{1}{n_0}$，即$x_0\in B_{n_0}$，从而$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，故有$A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$。

反之，若$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，则存在$n_0$使$x_0\in B_{n_0}$，从而$f(x_0)\geqslant a+\frac{1}{n_0}>a$，即$x_0\in A$．故有$A\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$。总之，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$。

例 7　证明，(1)若$A-B=C$，则$A\subset B\cup C$．问$A=B\cup C$成立吗？

(2) 若$A=B\cup C$，则$A-B\subset C$，问$A-B=C$成立吗？

证　(1) 设$x\in A$，若$x\in B$，则$x\in B\cup C$，若$x\notin B$，则$x\in A-B=C$，也有$x\in B\cup C$。因此$A\subset B\cup C$。

但$A=B\cup C$不一定成立。如取$A=\{1, 2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=A-B=\{1\}$，则$B\cup C=\{1, 2, 3\}\neq A$。

(2) 设$x\in A-B$，则$x\in A$，$x\notin B$，由条件$A=B\cup C$知$x\in C$，从而$A-B\subset C$。

但是得不出$A-B=C$。如取$B=\{1,\ 2\}$、$C=\{2,\ 3\}$，$A=B\cup C=\{1,\ 2,\ 3\}$，则$A-B=\{3\}\neq C$。

例 8　证明集合的下述等式

(1) $A\setminus(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$；

(2) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(3) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

(4) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$。

证　证明两集相等，一是利用定义直接证明，一是利用运算性质进行证明。下面用定义证明(1)，其余等式用运算性质证明。

(1) $x\in A-(B\cap C)\Leftrightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B\cap C$

$\Rightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B$。或者$x\in A,\ x\overline{\in}C$

$\Rightarrow x\in A-B$或$x\in A-C$

$\Rightarrow x\in(A-B)\cup(A-C)$。

所以，$A-(B\cap C)\subset(A-B)\cup(A-C)$

反之，$x\in(A-B)\cup(A-C)\Rightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B$或$x\in A$、$x\overline{\in}C\Rightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B$或$x\overline{\in}C\Rightarrow x\in A,\ x\overline{\in}B\cap C\Rightarrow x\in A-(B\cap C)$。

所以，$(A-B)\cup(A-C)\subset A-(B\cap C)$

因此，$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$。

(2) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap\mathscr{C}C=(A\cap\mathscr{C}C)\cup(B\cap\mathscr{C}C)=(A-C)\cup(B-C)$。

(3) $A-(B\cup C)=A\cap\mathscr{C}(B\cup C)=A\cap(\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C)$

$=A\cap\mathscr{C}B\cap\mathscr{C}C\cap A=(A\cap\mathscr{C}B)\cap(A\cap\mathscr{C}C)$

$=(A-B)\cap(A-C)$。

(4) $(A\cap B)-C=(A\cap B)\cap\mathscr{C}C=A\cap B\cap\mathscr{C}C\cap\mathscr{C}C$

$$=(A\cap\mathscr{C}C)\cap(B\cap\mathscr{C}C)=(A-C)\cap(B-C).$$

例 9　问，等式

$$(A-B)\cap C=A-(B-C)\tag{1}$$

成立的充要条件是什么？

解　由于

$$\begin{aligned}A-(B-C)&=A\cap\mathscr{C}(B\cap\mathscr{C}C)\\&=A\cap(\mathscr{C}B\cup C)\\&=(A-B)\cup(A\cap C),\end{aligned}$$

所以，(1)成立的充要条件是

$$(A-B)\cup C=(A-B)\cup(A\cap C).\tag{2}$$

当$A\cap C=C$，即 $C\subset A$ 时(2)式成立．当(2)式成立时，因为右端是A的两个子集之并，仍是A的子集，从而左端的C也是A的子集．

所以，(1)式成立的充要条件是$C\subset A$．

例10　化简表达式

$$\mathscr{C}[\mathscr{C}(A\cup B)\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B)].$$

解　利用笛摩根法则(定理1.4)得

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\mathscr{C}\mathscr{C}(A\cup B)\cup\mathscr{C}(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}B)\\&=(A\cup B)\cup(\mathscr{C}\mathscr{C}A\cap\mathscr{C}\mathscr{C}B)\\&=(A\cup B)\cup(A\cap B)\\&=A\cup B.\end{aligned}$$

例11　证明对于集合列$\{A_n\}$，

(1) 若 $A_1\subset A_2\subset\cdots$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$；

(2) 若 $A_1\supset A_2\supset\cdots$，则$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$．

证 (1) 由于$\{A_n\}$单增，则对于任何$k\geqslant 1$，有

$$B_k=\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=B_1,\quad C_k=\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n=A_k.$$

根据上限集、下限集的定义得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k=B_1=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

(2) 因为$\{A_n\}$是单减集列，则对$k\geqslant 1$，有

$$B_k=\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n=A_k,\quad C_k=\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=C_1.$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n=C_1=\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

例12 设A_n是如下一列点集：

$$A_{2m+1}=\left[0,2-\frac{1}{2m+1}\right],\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$A_{2m}=\left[0,\ 1+\frac{1}{2m}\right],\ m=1,\ 2,\ \cdots$$

试求$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$。

解 对于每个$n=1,\ 2,\ \cdots$，有

$$[0,\ 1]\subset A_n\subset[0,\ 2),$$

因此

$$[0,\ 1]\subset\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\subset[0,\ 2). \tag{1}$$