轴对称线圈磁场计算

雷银照　编著

中国计量出版社

轴对称线圈磁场计算

雷银照　编著

中国计量出版社

新登（京）字024号

内 容 提 要

本书详述了轴对称线圈磁场的分析、计算方法，其中包括圆环线圈、螺线管线圈、空心圆柱线圈、高均匀磁场线圈及带有磁介质的线圈等。为了便于应用，书中还较多地给出了图表和计算程序。

本书可供从事超导电工、电磁计量、高能物理等方面工作的技术人员阅读，也可供高等学校相应专业的师生作为教学参考书。

轴对称线圈磁场计算

雷银照 编著

*

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲2号

北京昌平精工印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本 787×1092/32 印张 8.875 字数 181 千字

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数 1—3000

ISBN 7-5026-0445-6/TM·1

定价 5.40元

序　言

在总结前人实验研究和基本电磁定律的基础上，麦克斯韦 1864 年创立了电磁场学说的主要理论。他扩大了电磁感应的涵义，磁场变化伴随着电场，电场变化伴随着磁场，提出了位移电流和全电流的概念，概括得到麦克斯韦方程组，预言电磁波的存在和光波与电磁波的同一性。

自从 1888 年赫兹用实验证实了电磁波的存在和传播以后，电磁场理论研究和工程应用进入了蓬勃发展的时代。随着电工技术和电工装备的不断革新、创造和发明，为电磁场的分析与计算提出了式样繁多和复杂的物理模型。轴对称线圈是其中应用极为广泛普遍的一种，如电磁测量、高能物理研究、电磁动力装置、电信工程和超导电工技术等等领域，比比皆是。乃至现代筒型直线电机和大型电力变压器的线圈也常作为轴对称模型来处理。

为了优化结构、节省材料，设计制造供不同用途能满足特定磁场要求的轴对称线圈，就必须对其磁场的大小与分布，作出严密的分析与准确的计算。但是目前还缺少讨论这个问题的专著。雷银照同志所编著的《轴对称线圈磁场计算》一书，开创了这方面的先例。该书比较系统完整地介绍了分析轴对称线圈磁场的理论基础和解析计算方法。

作者参考大量有关文献，作了比较全面详尽的综合与整理，还有相当一部分内容是近几年来作者自己的研究成果，并附有一定数量的数据图表和计算程序，可供工程设计查阅备用。

全书共分七章。第一章介绍分析计算轴对称线圈磁场必

要的理论基础，并讨论了算法和误差。第二、三、四章分别系统地阐述圆环线圈、螺线管线圈和空心圆柱线圈的磁场分布规律和各种磁场计算方法。第五章叙述实现高均匀磁场的基本理论和方法，还简单地介绍了线圈的优化问题。第六章讨论存在各向同性、线性的磁性媒质时用表面磁荷法求解轴对称磁场的原理。第七章介绍轴对称线圈电感的多种计算公式和载流线圈磁场力的计算法。

全书理论叙述由浅入深，循序渐进，文字通顺，概念清楚，公式推导，繁简适度。可供从事电机电器设计及其他广大电工技术工作者使用，也可供高等院校有关专业师生及研究生参考。

周克定*

1990 年 10 月

---

* 现任湖北工学院教授兼电磁工程研究所所长，华中理工大学教授、博士导师。

前言

在电工技术中，轴对称线圈有着广泛的应用。如何迅速而准确地计算它的磁场，这对于设计制造轴对称线圈是件十分必要的工作。但截止目前还没有见到系统论述这方面内容的书籍。我根据几年来从事轴对称线圈磁场计算的工作体会，并参阅了国内外相关文献，写出了此书，希望它能为读者提供一些方便。

书稿写成后，承蒙周克定教授仔细审阅，并写了序言；傅克华高级工程师、舒迪前教授、冯之鑫副研究员、盛冠华副教授先后审阅了书稿，并提出了一些宝贵的意见。对于他们的热情支持和辛勤劳动，作者谨致深切的谢意。

限于本人的学识水平，书中不妥之处在所难免，诚恳欢迎专家、读者批评指正。

雷银照

1990 年 10 月 25 日

目　录

第一章　磁场理论基础

本章是分析和计算轴对称线圈磁场的基础。轴对称线圈在电工技术中有着广泛的应用，所以对它的磁场进行分析和计算是非常必要的。由于所有的磁场计算模型都是对磁场分析后得到的，因此需要对恒定磁场的基本理论先作一些介绍，从而得出轴对称线圈磁场的基本性质。另一方面，数值计算方法也必须注意。因为并不是所有的方法都是行之有效的。一般而言，对于特定的问题有特定的算法。本章的最后部分对此给予了初步分析。

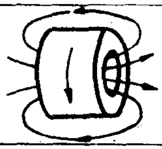
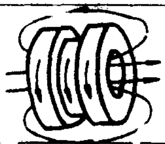
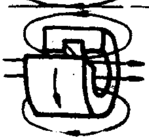
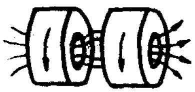
一、轴 对 称 线 圈

从外部的几何形状看，线圈有许多种，例如圆形线圈、阴阳线圈、环式线圈（toroidal coil）、鞍形线圈等。轴对称线圈是它们诸多种类中的一种。所谓轴对称，是从图形上的各点向定直线 l 作垂线并延长一倍，延长线的端点所构成的图形称为与原图形关于定直线 l 成轴对称。定直线 l 称为对称轴。本书主要讨论由多个矩形截面所组成的轴对称线圈。这里所指的截面是指通过对称轴的平面切割线圈及其周围的磁性物质后所见到的切割面。以后如无特殊说明，均同此意。

轴对称线圈具有许多优点。它易于制作，绕线作业和支撑磁场力比较容易；和其它类型线圈相比，每单位体积绕线所产生的磁场最大[1]；通过若干线圈的组合可以获得高均匀磁场或沿空间某一方向梯度均匀的磁场。正因为如此，轴对

称线圈得到了广泛的应用。例如在测量磁性材料的磁特性时，往往利用空心圆柱线圈产生的均匀磁场作磁化场。在超导电工技术中，轴对称线圈的应用更为广泛。表 1-1 给出了几种轴对称线圈的形状和用途。从外形尺寸上看，基础科学研究用的线圈直径仅有几个厘米，而电力贮存用的轴对称线圈直径

表 1-1　轴对称线圈

名　称	几何形状	用　途
空心 圆柱 线圈		基础物理学 高梯度磁分离 电力能量储存
长线圈		高能物理学 同位素分离 核聚变炉
外凹线圈		高均匀度磁场 电磁 计量 MRI 电子望远镜
内凹线圈		
分裂线圈		磁光学 核聚变
会切线圈		核聚变

达 200 米之多。从产生磁场的大小看，有磁感应强度为毫特斯拉级的线圈，也有 20 特斯拉左右的线圈。

最近 30 年来，特别是 1986 年以来，超导材料的发现层出不穷，临界温度不断提高。相信随着科学技术的不断发展，液氮温区的实用的超导材料必将开发出来，这将使轴对称线圈获得越来越广泛的应用。

实际的轴对称线圈，都是用导线一匝紧挨一匝地绕制而成的，所以每匝均有螺旋性。而且由于导线外有绝缘层，因此不论采用方形线还是用圆形线，线圈的电流密度都不是均匀分布。分析磁场时，如果把螺旋性和不均匀性都考虑在内，那么磁场计算将是极其困难的。实践表明，忽略线圈的螺旋性和电流的不均匀性后，不仅可以大大减轻计算工作量，而且计算结果和实测数值之间仅有极小的误差。因此，本书在分析和计算磁场时，一律假定

(1) 线圈的线匝都是同轴圆环回路；

(2) 线匝间具有无限薄的绝缘，所有线匝紧密地充填了线圈所占有的全部空间；

(3) 线圈线匝在径向、轴向均为均匀缠绕，电流沿截面均匀分布，且电流密度的方向和对称轴的正向构成右手螺旋关系；

(4) 轴对称线圈处于无限大真空中；

(5) 当存在轴对称结构的磁介质时，其对称轴和线圈共轴，且均处于无限大真空中。

关于单位制，除非特殊说明，所有单位均采用国际单位制 (SI)。常见的几个单位是：长度用 m (米)，电流用 A (安培)，磁感应强度用 T (特斯拉)，电感用 H (亨利)，磁通用 Wb (韦伯)，力用 N (牛顿)，磁场强度用 A/m (安培/米)。

二、恒 定 磁 场

（一）毕奥-沙伐定律

稳定的电流产生恒定磁场。表征磁场特性的基本物理量是磁感应强度，它是一个矢量，用 $\boldsymbol{B}$ 表示，单位是 T。放在磁场中的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，将受到磁场的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{1-1}$$

这就是磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的定义式。

在无限大真空中，当已知电流分布时，磁场中任意一点 P 处的磁感应强度可用毕奥-沙伐（Biot-Savart）定律计算

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V(\mathrm{Q}) \tag{1-2}$$

式中 $\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$ 表示源点 Q 周围的体积元，该源点的电流密度是 $\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})$；$R$ 是源点 Q 到场点 P 之间的距离，$\boldsymbol{R}^0$ 是由源点 Q 指向场点 P 的单位矢量；μ_0 是真空磁导率，其值为 $4\pi\times10^{-7}\mathrm{H/m}$；$V$ 是电流密度的分布区域。

毕奥-沙伐定律是电磁场理论中的基本定律。原则上讲使用该定律可以计算由任意分布的稳定电流所产生的磁场。虽然有时不直接采用毕奥-沙伐定律计算磁场而改用其它方法间接计算，但无论采用什么方法，其根源仍是毕奥-沙伐定律。

式（1-2）中的积分区域取为体积 V，具有最大的广泛性和实用性。在实际的磁场中，任何电流都是以一定的体积分布而存在的，其它形式的分布例如面分布或线分布实际上是不存在的。但是根据问题的特点，有时允许我们做一定的简化，认为是面分布或线分布。这样做不仅能使磁场计算的工

作量大大减少，而且其误差也在允许的范围内。

这里介绍一下线电流和面电流的概念。所谓线电流，是对直径无限小的导线上通过一定数值的电流的一种描述，用$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$表示线电流元，$I$是导线上通过的电流，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$是线上某点处的长度元，其方向和该点的电流同向。对于面电流的解释则需要多些笔墨。我们知道穿过一矩形平面（$\Delta l\times\Delta m$）的电流为$I=\boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{S}=J_n\Delta l\Delta m$，这里$J_n$是电流密度$\boldsymbol{J}$垂直穿过矩形区域的分量。当矩形的两短边（$\Delta m$）缩短趋于零时，就形成了在表面$S$无限薄一层中流动的电流，该电流称为面电流。面电流密度定义为

$$\boldsymbol{J}_s=\frac{I}{\Delta l}\boldsymbol{e}_\varphi\ \ (\mathrm{A/m}) \tag{1-3}$$

下标S取自英文surface（表面）的第一个字母；面电流密度是一个矢量，$\boldsymbol{e}_\varphi$是单位矢量，它在某点的方向和该点的电流同向，且垂直于Δl。

当电流为线分布时，式（1-2）可以写成

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}(\mathrm{Q})\times\boldsymbol{R}^0}{R^2} \tag{1-4}$$

式中的积分遍及整个闭合回路l。

当电流为面分布时，式（1-2）可以写成

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_s\frac{\boldsymbol{J}_s(\mathrm{Q})\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}S(\mathrm{Q}) \tag{1-5}$$

积分区域S表示面电流$\boldsymbol{J}_s$的分布区域。

（二）磁场存在性分析

这里必须明确所谓“存在”究竟是指什么。所谓存在是指描述磁场的场量（例如磁感应强度$\boldsymbol{B}$，磁场强度$\boldsymbol{H}$等）在数学的意义上可求，即是否可以用数值计算表达式表示出来。如

果能够做到，则称为磁场存在，否则称为磁场不存在。就是说必须从数学的意义出发来讨论电磁场问题。这是由于迄今为止电磁场理论均是借用数学理论而发展起来的。另一方面只有在严格的数学定义下，电磁场理论的研究才能深入进行。

下面我们研究式（1-2），（1-4）和（1-5）的积分收敛性问题。

对于式(1-2)的体积分，如果场点 P 在体积区域 V 之外，则 $R>0$，积分是常义的。即电流为体分布时，体外任意点的磁场存在。如果场点 P 位于电流分布区域 V 内部或边缘上时，在源点与场点重合处 $R=|\boldsymbol{r}(\mathrm{P})-\boldsymbol{r}(\mathrm{Q})|$ 趋于零。这里 $\boldsymbol{r}$ 是矢径。这样式(1-2)积分号内的函数在点 P 的附近不再有界，式（1-2）成为广义积分，其收敛性如何是需要研究的。

我们从区域 V 上割下一以点 P 为球心，以 a 为半径的小球 V_0，选取球坐标，坐标原点在点 P 处。此时磁感应强度

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V-V_0}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_0}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V \qquad (1\text{-}6)$$

上式右端第一个积分是常义积分，第二个积分是广义积分。如果点 P 位于区域 V 的内部，则第二个积分可以写成

$$\int_{V_0}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}R$$

假定电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是坐标的连续函数，则在球 V_0 内 $|\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0|$ 有界。令 $L=\max|\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0|$，有

$$\left|\int_{V_0}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V\right|\leqslant 4\pi aL$$

故

$$\lim_{a\to 0}\int_{V_0}\frac{\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V=0 \qquad (1\text{-}7)$$

另一方面，如果点 P 位于区域 V 的表面上时，V_0 是一残缺的

球，类似也可以证明式（1-7）成立。这样得到

结论 1 当电流为体分布时，只要电流密度是有界的，那么不论场点位于何处，磁感应强度总存在。

当电流为面分布时，设面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 有界，且电流所在的曲面 S 是光滑的。当场点 P 位于曲面 S 之外时，式（1-5）是常义积分。但场点 P 位于曲面 S 上时，式（1-5）成了广义积分。下面证明这个广义积分是发散的。

设场点 P 位于光滑的曲面 S 上。取直角坐标，坐标原点和点 P 重合，并把点 P 的切平面作为 xoy 平面。在切平面上，以点 P 为圆心作一以 a 为半径的小圆 S_0，这里 $a<\varepsilon$（ε 是任意小的正数）。由于曲面光滑是可求面积的，所以当 ε 充分小时，可以认为积分区域就是该圆形区域 S_0。从而有

$$\int_{S_0} \frac{\boldsymbol{J}_s \times \boldsymbol{R}^0}{R^2} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{\boldsymbol{J}_s \times \boldsymbol{R}^0}{R} \mathrm{d}R$$

由于 $|\boldsymbol{J}_s \times \boldsymbol{R}^0|$ 有界，则依瑕积分的敛散判别法[2]可知，上式发散。故当点 P 位于曲面 S 上时，由下式

$$\boldsymbol{B}(\mathrm{P}) = \lim_{a \to 0} \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int_{S-S_0} + \int_{S_0}\right) \frac{\boldsymbol{J}_s \times \boldsymbol{R}^0}{R^2} \mathrm{d}S$$

所决定的磁感应强度不存在。由此得

结论 2 当电流为面分布时，如果曲面光滑且面电流密度是有界的，那么当场点位于曲面 S 之外时磁感应强度存在，反之当场点位于曲面 S 上时磁感应强度不存在。

对于电流为线分布的情形，通过类似证明可以得到

结论 3 当电流为线分布时，如果曲线光滑，那么当场点位于曲线外时，磁感应强度存在，反之当场点位于曲线上时磁感应强度不存在。

在以上分析时，假定磁场中仅有通电线圈。如果磁场中还有磁性物质，那么上述结论同样成立。结论 1，2 和 3 对今

后分析计算磁场非常有用。如果某点的磁感应强度不存在，我们就不必花力气分析、计算它。反过来，如果某点的磁感应强度用上述结论判断时是存在的，而所采用的数学表达式在该点无定义，这就说明是数学模型的问题，应当采用别的分析方法求该点的数学表达式。一般情况下，场量的表达式都是以积分形式出现的，能够写出用有限个初等函数表示的表达式是极少数情况。如果仅是数学模型的问题，那么可以采用分离瑕点的方法计算，或直接使用高斯型求积公式计算。

（三）磁场的基本性质

磁场是矢量场。考察磁场的散度和旋度是研究磁场的有效办法。下面从毕奥-沙伐定律出发研究磁场。

首先求磁场的散度。由于

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\times\boldsymbol{R}^0}{R^2}\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$
$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left[\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\times\nabla\frac{1}{R}\right]\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$

利用矢量恒等式$\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})-\boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b})$，上式可以写成

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left(\nabla\frac{1}{R}\cdot\nabla\times\boldsymbol{J}-\boldsymbol{J}\cdot\nabla\times\nabla\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\boldsymbol{J}\cdot\nabla\times\nabla\frac{1}{R}\,\mathrm{d}V\tag{1-8}$$

由于算子∇是作用于场点P的，而$\boldsymbol{J}$（Q）与场点P无关，所以$\nabla\times\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})=0$。利用数性函数$f$满足恒等式$\nabla\times\nabla f=0$这一特点，式（1-8）最终成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\tag{1-9}$$

上式说明恒定磁场是散度处处为零的矢量场。

下面求磁场的旋度。利用式

$$\nabla\frac{1}{R}=-\frac{\boldsymbol{R}^0}{R^2}$$

和矢量恒等式 $\boldsymbol{A}\times\nabla h=h(\nabla\times\boldsymbol{A})-\nabla\times(h\boldsymbol{A})$，磁场的旋度可以写成

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int_V\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\times\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$
$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\nabla\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})}{R}\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$

根据矢量恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，上式可继续变形为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}(\mathrm{P})=\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})}{R}\right]\mathrm{d}V(\mathrm{Q})-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V(\mathrm{Q}$$

式中的第一个积分用高斯(Gauss)定理可写成

$$\int_V\nabla\cdot\left[\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})}{R}\right]\mathrm{d}V(\mathrm{Q})=\oint_S\frac{\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})}{R}\mathrm{d}\boldsymbol{S}(\mathrm{Q})=0$$

因区域 V 包含所有 $\boldsymbol{J}\neq0$ 的电流分布区域，所以在它的表面 S 上任意点处 $\boldsymbol{J}$ 垂直于 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，即 $\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$，故，磁场的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$
$$=\mu_0\int_V\boldsymbol{J}(\mathrm{Q})\delta(R)\mathrm{d}V(\mathrm{Q})$$
$$=\mu_0\boldsymbol{J}\tag{1-10}$$

推导上式时，利用了关系式

$$\nabla^2\frac{1}{R}=-4\pi\delta(R)$$

关于该式的证明可参阅文献[3]。式(1-10)说明，恒定磁场是有旋场。

明确了磁场的散度和旋度后，就可以借助其它量(数量或矢量)来描述磁场。这给分析和计算磁场提供了新的途径。

对于磁场 $\boldsymbol{B}$，其散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}$ 处处恒为零。但当 $\boldsymbol{B}$ 恰为某一