力学与工程应用

（第六卷）

杜庆华　主编

中国林业出版社

力学与工程应用

（第六卷）

杜庆华　主编

中国林业出版社

图书在版编目(CIP)数据

力学与工程应用　第六卷/杜庆华主编．—北京:中国林业出版社,1996.10
ISBN 7-5038-1707-0

Ⅰ.力…　Ⅱ.杜…　Ⅲ.①力学-学术会议-文集②工程力学-学术会议-文集
Ⅳ.TB12-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 18144 号

中国林业出版社出版
(100009　北京西城区刘海胡同 7 号)
北京林业大学印刷厂印刷　中国林业出版社发行
1996 年 10 月第 1 版　1996 年 10 月第 1 次印刷
开本:787mm×1092mm 1/16　印张 27.5
字数:620 千字　　印数:1～300 册
定价:60.00 元

前言

北方七省、市、区(北京、河北、天津、山西、山东、内蒙古、河南)力学学会联合组织的学术工作委员会，自1986年以来成功地举办过五届力学与工程应用学术交流大会。这次在河北省石家庄市举行的第六届大会，是这一系列学术会议的继续，也是我们七省、市、区力学学会联合进行学术交流十周年的庆祝会。

十年来，北方七省、市、区学术交流会受到很多著名专家学者的关注与指导，如雷天觉院士，胡海昌院士都曾应邀做了特邀报告。这种联合的学术会议，广泛交流了力学在工程应用中的研究成果，以及力学教学中的改革经验，推动了力学的繁荣和发展。这种联合的学术活动加强了信息交流，增进了相互了解，得到广大力学工作者的积极支持与广泛参与，并为青年力学工作者开辟了发表研究成果的园地。本届学术交流大会的召开和对十年来工作的总结、回顾，必将进一步推动力学与工程实践的联系、提高力学教学水平、促进力学更好地为国民经济建设服务。

第六届北方七省、市、区力学学术交流会有论文101篇，另有胡海昌院士特邀报告一篇，共计102篇文章。分固体力学、计算力学、力学教学、流体力学、生物力学、实验力学、一般力学、工程应用八个部分。它代表了七省、市、区力学同仁部分工作的基本情况。七省、市、区力学学会学术委员会，以及《力学与工程应用》编审委员会的同仁大多参加了过去十年来的历届会议的工作。他们的辛勤劳作，使本文集得以完成。在此，还要对中国林业出版社的编辑们表示感谢，由于他们的认真工作，使得这部文集有了质量保证。

最后预祝第六届北方七省、市、区力学学术交流大会圆满成功，并祝愿我们为之勤奋工作的研究事业不断前进!

杜庆华

1996. 9.

目　录

特邀报告

弹性力学平面问题的等价的边界积分方程 …………………………………… 胡海昌 (1)

固体力学

1. Mathematica 在椭圆截面柱体扭转中的初步应用 ………………… 王 清 孙希芳 (6)
2. 断裂力学在材力科学应用中的几个问题 ……………………………………………… 侯晓宁 文 健 郭 锋 曾国鑫 周承恩 (10)
3. 二级应力作用下复合材料层板疲劳损伤加载次序效应的研究 ……………………………………………………… 轩福贞 孙树勋 汤红卫 程德明 (15)
4. 复合材料层板疲劳损伤的动态模量法 ………… 慈国庆 孙树勋 汤红卫 程德明 (19)
5. 复合材料厚层板的 Rayleigh—Ritz 法自由振动分析 ……………………………………………………………… 任勇生 张根全 郭秀峰 (23)
6. 关于疲劳裂纹扩展的若干问题 ………………………………………… 沈 珉 杨海元 (27)
7. 接管断裂失效概率估算的一种新方法 ……………………………… 丁克勤 柳春图 (33)
8. 金属材料的力学性能与剩余寿命预测 ……………………………… 杨浩泉 王德俊 (37)
9. 李雅庄矿泥岩巷道围岩弹塑性—蠕变力学计算模型研究 ……………………………………………………………… 翟英达 郭胜亮 曹龙飞 (40)
10. 梁极限载荷分析的富氏级数方法 ………………………… 钟岱辉 高秀华 张晓杰 (44)
11. 密间距加劲圆柱壳整体结构分析 ……………… 刘宪亮 刘东常 白新理 孟闻远 (48)
12. 平面钝缺口应力场的解析计算方法 ……………………………… 牛莉莎 姚振汉 (53)
13. 三边固定一边自由的正交各向异型板的非线性弯曲问题 ……………………………………………………………… 黄家寅 秦圣立 闫 伟 (57)
14. 塑性分析提纲 ……………………………………………………… 高万章 李跃军 (62)
15. 微分算子法证明最小势能原理及其推论 …………………………… 路玉敏 刘少令 (67)
16. 一种处理疲劳损伤局部性问题的代表性单元 ……………………………… 曹天捷 (71)
17. 锥模挤压变形区内金属位移增量与挤压力的确定 ……… 温殿英 叶金铎 张 建 (75)

计算力学

1. Burgers 方程的小波法数值求解 …………………………………… 刘世民 黄克服 (80)
2. 薄板弯曲加权残值法的进一步研究 ……………………………………… 林继德 (85)
3. 并行计算模型与有限元并行算法设计 ……………………………… 姚振汉 程建钢 (89)
4. 定常无旋流动的样条边界元法 ………………………………… 刘建秀 李李林 马 马 (93)
5. 二维梁的完整有限变形理论 …………………………………………………… 李明瑞 (97)
6. 刚性地基梁非线性分析的线性互补法 …………………………… 周欣竹 郑建军 (102)
7. 横向倒圆槽孔板的应力集中分析 ……………………………………… 田宗漱 田 炯 (106)

8. 结构振动的动画显示技术研究 ………………………… 王增忠 于金兰 于洪智（111）
9. 解动力学问题的时空半解析法在不规则板振动中的应用
…………………………………………………… 邢金华 王鹏林 樊素英 张敬宇（115）
10. 空间轴对称结构八结点等参元及其计算机程序实施的简化方法
…………………………………………………………… 刘少令 路玉敏（120）
11. 连铸机的有限元计算 ………………………… 庄孝君 唐委校 郑效忠 任 泽（124）
12. 梁板壳的完整有限变形应变分析 ……………………………………… 李明瑞（129）
13. 平行四边形弹性薄板近似算法的精度分析 …………………………… 徐志锋（135）
14. 三油叶轴承边界应力和压力及内点压力的数值解 ……………… 林长圣 李金华（140）
15. 线性打靶法解连续梁 ………………………………………… 范慕辉 石铁君（144）
16. 用非线性打靶法解梁的大挠度问题 ………………… 范慕辉 李彦华 石铁君（148）
17. 在有限元中分布载荷处理新设想 …………………… 刘 玮 韩志军 于国平（152）
18. 组合梁悬臂振动分析 ……………………………… 张方春 王锡平 李传奇（156）

力学教学

1. T 形截面杆在弯曲时的翘曲正应力 …………………………………… 申向东（160）
2. “力的平移定理”和“力的传递原理” ………………………………… 王 宣（164）
3. 初等力学中的变分原理 ……………………………………………… 冯 垣（167）
4. 单自由度物体在大阻尼和临界阻尼情况下的运动图形 ………… 马焕英 孙 宁（173）
5. 动载荷作用下梁的弯曲内力微分方程 ……………… 孙浩江 藏永虹 罗 静（177）
6. 对一个采用质心坐标系问题的质疑 …………………………………… 王振起（180）
7. 非自由质点运动微分方程的处理 ……………………………………… 扬佩兰（183）
8. 复矢量法在点的合成运动中的应用 …………………………………… 琚贻宏（187）
9. 改革实验教学 加强能力培养 ………………………………………… 赵永茂（191）
10. 计算机在运动学中的应用 ………………………… 张敦福 刘桂斋 王卫平（194）
11. 结构力学中的加减因素论 ………………………… 张霁雯 张霁霞 张喜卝（198）
12. 曲梁平衡方程的几个形式及其应用 …………………………………… 刘光好（201）
13. 三向应力状态应力求解方程和电算化 ………… 王文忠 徐爱莉 张 霞 许春明（205）
14. 谈谈结构力学教学中的点滴体会 ……………………………… 李 平 扬萌曾（209）
15. 探讨振动问题的多种解法 ………………………… 黄秋和 史东海 孙瑞章（215）
16. 完整与非完整系统中的理想约束 ………………… 鞠志林 王玲华 刘太强（219）
17. 一种计算变截面梁变形的方法 ……………………………… 高秀华 钟岱辉（222）
18. 一种弯矩图形心计算公式 …………………………………………… 刘光好（226）
19. 以计算机分析为主线改革弯曲变形教学内容初探
……………………………………………… 王复兴 林祖森 孙华东 曹昭煌（231）
20. 用坐标变换证明牵连运动为平面运动时点的加速度合成定理
……………………………………………………………… 马焕英 黄秋和（236）
21. 运用多种教学手段，优化材力课堂教学 ……………………………… 冯叔忠（239）

22. 在理论力学教学改革中加强对学生综合能力培养 ………………………………………………… 杜惠英 李祥琴 孟庆珍 刘正华 (243)
23. 在理论力学教学中加强素质和能力培养 ……………………… 张 玲 王桂珍 (246)

流体力学

1. 垂向振动中液体对容器壁的动压力分析 ……………… 孙利民 朱明霞 丁遂栋 (250)
2. 数值模拟粘弹性流体的二维流动 ………………………… 王保国 王 栋 武弘峨 (254)
3. 双折射液体流动显示数字图象处理 ……………………… 王 强 李 欣 舒 伟 (259)
4. 旋转叶片通道内三维 N——S 流场的隐式求解以及粘性与源项的处理 ………………………………………………………… 王保国 刘秋生 沈孟育 (262)
5. 压力缝隙螺旋流的冲沙效率 ………………………………… 彭龙生 武鹏林 宋天权 (268)
6. 轴对称钝体前缘分离流声振控制的实验研 …………… 董宇飞 魏中磊 徐 诚 (272)

生物力学

1. 人颅干骨力学性质的实验研究 ………… 徐晋斌 张宏民 杨育勇 朱 健 刘嘉诚 (276)
2. 用弹性力学方法模拟环状 DNA 的超螺旋构象 ………… 索 瑾 崔平生 吴文周 (280)

实验力学

1. 35CrMnSi 钢在不同热处理工艺下动态试验后的电镜分析研究 ………………………………………………………………………… 吴 斌 魏德敏 (284)
2. 独塔斜拉桥静、动载电测应力分析 …………… 高丛峰 佟景伟 李鸿琦 乌时毅 (288)
3. 独塔斜拉桥梁锚固区光弹性和有限元分析 ………………………………… 陆海翔 李鸿琦 岳 澄 佟景伟 刘旭锴 徐殿平 (292)
4. 附加质量对试验模态分析的影响 ………………………………………………… 丁思远 (296)
5. 固体废弃物作为建筑地基的实验研究 ………………………… 张振营 王谦源 (300)
6. 湿骨内动态力一电性质的测试装置 …………………… 王国安 侯振德 高瑞亭 (304)
7. 输电线路杆塔基础风积沙地基抗拔机理试验研究 ……………………… 刘文白 (308)
8. 陶瓷基复合材料热残余应力的计算 ……………………………………… 李 革 (316)
9. 轴向力测量灵敏度高的整体式空间力测量装置的分析研究 … 丁至成 曾国平 (320)

一般力学

1. H∞鲁棒控制理论在结构主动控制中的应用与分析 …………………… 刘栋栋 (324)
2. 六自由度主机械手平衡技术研究 ………………………………………… 陈 丰 (330)
3. 挠性机械手控制问题的研究 ………………… 刘文定 李 珠 王显耀 李元宗 (334)
4. 一维混沌吸引子轨道遍历性的若干应用 ………………………… 段志信 王 晔 (338)

工程应用

1. 变截面等压活塞环的开口间隙与强度计算 …………… 金树达 张红霞 禹海全 (344)

2. 带孔悬臂梁的弯曲应力分析 ………………………………………… 阎晓瑗 廖湘荣（348）
3. 弹性体边坡最大剪应力作用面的确定 ……………………………… 齐建业 蔡中民（351）
4. 道碴桥面后张法超低高度预应力混凝土梁的研制 ………………… 刘敬棉 尤俊芳（355）
5. 对向六斜辊管材矫直机矫直力研究 ………………………………… 朱美珍 刘相贵（359）
6. 非对称截面梁的弹塑性弯曲 ……………………………… 穆建春 刘嘉诚 张宏民（364）
7. 改善三次抛物线型缓和曲线的力学分析及合理性 ………………………………… 张滨（368）
8. 高效能叶片的优化设计 ……………………………………………… 刁晨光 贺正辉（373）
9. 构件无限寿命设计及其断裂事故 ……………………………………… 程强 程德明（376）
10. 框架—剪力墙高层建筑结构抗震优化设计 … 李银山 刘世平 蔡中民 郝黎明（380）
11. 梁拱组合体系的受力分析 ……………………………………………… 李黎 柴成元（384）
12. 螺旋板换热器中心筒结构优化设计及计算 …… 唐委校 庄孝君 冷霞 徐继涛（388）
13. 喷锚网技术在边壁加固工程中的成功应用 ………… 陈德兴 曾宪明 胡远金（392）
14. 浅埋梁两种大变形计算法 ……………………………… 李福厚 伍俊 裴广勇（396）
15. 求径向力作用下的圆弧杆内力的替代法 …………… 张昌春 李祥葆 李忠叶（400）
16. 疏松砂岩地层套管受力与变形的力学模型 ……………………… 杨秀娟 岳伯谦（404）
17. 双曲抛物面网壳结构的动力分析 …………………… 吴桂英 李海旺 刘志芳（408）
18. 油田开发分层地应力模型研究 ………………………… 闫相祯 葛洪魁 李丛解（412）
19. 有前置分流回路的线圈炮的运行分析 ……………… 韦广梅 朱应敏 王德满（416）
20. 钻井 A 形井架地震响应分析 ………………………………… 王伟 陈淮 胡少伟（421）
21. 座式直线振动筛耦合振动分析 …………………………………… 顾铁凤 宋选民（425）
22. FEM 在圆锯片动态设计中的应用……………………………………… 崔文彬 鹿振友（429）

弹性力学平面问题的等价的边界积分方程

胡 海 昌

(中国空间飞行器总体设计部 北京 100080)

摘 要

本文严格地推导出与弹性力学平面问题的微分方程边值问题等价的间接和直接未知量边界积分方程，用实例指出有些习用的边界积分方程有时不必要或不充分。

一、 边界积分方程的等价性

近数十年来，边界积分方程 (BIE) 一边界元法获得了很大的发展。但其中还有一些基本理论问题不清楚。BIE 理论中最关键的一个问题是什么样的 BIE 与原微分方程边值问题 (BVPD) 等价。间接未知量的 BIE 依赖于齐次微分方程解的某种边界积分表示 (BIR)。以往文献中提出的 BIR 只证明了它满足微分方程，而未证明它是完备的。由于这一疏忽，致使某些 BIR 在某些情况下有遗漏，从而导致相应的间接未知量 BIE 有时无解。我们发展了一种非解析开拓法用于推导无遗漏、无重复的 BIR。以往文献中提出的直接未知量 BIE 只证明了它必须成立，但未证明方程是否完备。由于这一疏忽，致使某些直接未知量 BIE 虽属必要，但不充分，从而导致它的解有时多于相应的 BVPD 的解。我们提出了超定问题，并把超定问题有解的充要条件作为直接未知量 BIE 的一般形式，然后把上述无遗漏无重复的 BIR 引入该充要条件，这就得到了等价于原 BVPD 的直接未知量 BIE。

我们已经把上述理论体系[1]和求解思路应用于平面调和函数问题[2]-[7]和薄板弯曲问题[8][9]，在间接和直接未知量 BIR 两方面都获得了预期的结果。

本文介绍我们在弹性力学平面问题中的成果。

二、 弹性力学超定问题有解的充要条件

先定义如下的超定问题：在一有限区域 Ω (它的边界为 B)中求位移矢量 $\mathbf{u}$，使它满足下列弹性力学齐次微分方程和边界条件:

在 Ω 内: $\mathbf{Au} \equiv [G\Delta + (\lambda + G)\mathrm{graddiv}]\mathbf{u} = 0$, (1)

在 B 上: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_B$， $\mathbf{p}(\mathbf{u}) \equiv \sigma(\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t}$, (2)

式中 $\mathbf{n}$ 是 B 的向外单位法向矢量，σ (u) 和 p(u) 分别是与 u 对应的应力张量和边界面力矢量，$\mathbf{u}_B$ 和 $\mathbf{t}$ 是给定的量，满足方程(1)和(2)的解一般是不存在的，所以上述问题是超

定的，它只有当u_B，t 满足一定的条件时才有解。

定理 超定问题(1)、(2)有解的充要条件是：对于Ω 内任一满足方程(1)的函数 H，都有

$$\int_B \left[H \cdot t - u_B \cdot p(H) \right] dB = 0 , \tag{3}$$

这里 p(H) 是与位移 H 对应的边界面力矢量。

必要性的证明很简单。若超定问题有解，则对 u 和 H 两个位移应用功的互等定理便有

$$\int_B \left[H \cdot p(u) - u \cdot p(H) \right] dB = 0 。 \tag{4}$$

再将边界条件(2)代入，即得到(3)。

充分性的证明较复杂。先将原来的问题分解为两个适定的问题用以确定两个函数u^{I}和u^{II}如下

$$\text{在}\Omega\text{内：}\quad A u^{\mathrm{I}} = 0, \qquad \text{在 B 上：}\quad u^{\mathrm{I}} = u_B , \tag{5/6}$$

$$\text{在}\Omega\text{内：}\quad A u^{\mathrm{II}} = 0, \qquad \text{在 B 上：}\quad p(u^{\mathrm{II}}) = t , \tag{7/8}$$

$$\int_\Omega (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) d\Omega = 0, \int_\Omega x_1 (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) d\Omega = 0, \int_\Omega x_2 (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) d\Omega = 0 。 \tag{9}$$

由上列方程确定的u^{I}，u^{II}都存在唯一。依次利用边界条件(6)、充要条件(3)、边界条件(8)以及关于u^{II} 和 H 的功的互等定理，可以得到下列一联串的等式

$$\int_B u^{\mathrm{I}} \cdot p(H) dB = \int_B u_B \cdot p(H) dB = \int_B H \cdot t dB = \int_B H \cdot p(u^{\mathrm{II}}) dB = \int_B u^{\mathrm{II}} \cdot p(H) dB$$

于是有

$$\int_B (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) \cdot p(H) dB = 0 \tag{10}$$

由于在 B 上的 H 可以任意取，我们可以取

$$\text{在 B 上：}\quad H = u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} \tag{11}$$

这样(10)式变为

$$\int_B (u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) \cdot p(u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}}) dB = 0 \tag{12}$$

再往下从(12)和(9)两式不难证明

$$u^{\mathrm{I}} - u^{\mathrm{II}} = 0 \tag{13}$$

既然u^{I}和u^{II}相同，它们即是超定问题的解。充分性证毕。

充要条件(3)实际上是直接未知量 BIE 的一般形式。

三、 齐次方程解的边界积分表示

本文自此以下限于讨论弹性力学平面问题。设在Ω 中已有一个满足方程(1)的函数 H。现按下列要求把它非解析地开拓到补域Ω_c(从全平面上扣除Ω 和 B 后所剩的区域)中去：

在 Ω_c 内: $A H_c = 0$，　　在 B 上: $H_c = H$，　　(14/15)

在 ∞ 远处: $\mathbf{H}_c = \mathbf{C} + D\mathbf{x} \times \mathbf{k}$，　　(16)

其中 **k** 是与该平面垂直的单位矢量，C 和 D 是待定的常数矢量和标量，这些常数不能事先指定，否则将使方程(14)~(16)无解。

把各向同性弹性介质平面应变问题的基本解记为 $\mathbf{u}^*(\mathbf{x},\xi) = \mathbf{u}^*(\xi,\mathbf{x})$，其中 x 和 ξ 分别是场点和奇点的坐标。$\mathbf{u}^*$ 的分量为

$$u^*_{ij} = \frac{1}{8\pi(1-\mu)G}\left[(3-4\mu)\ln\frac{a}{\rho}\delta_{ij} + \rho_{,i} + \rho_{,j}\right], \tag{17}$$

$$\rho = \sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2}, \tag{18}$$

其中 a 是任意常数，其量纲应为长度，$\mathbf{u}^*$ 满足下列方程

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^* = -\delta(\mathbf{x}-\xi)\mathbf{I}, \tag{19}$$

其中 **I** 是单位球张量。

在 Ω 内对 **H** 和 $\mathbf{u}^*$ 应用功的互等定理，得到

当 $\xi \in \Omega_\xi$ 时，$$\mathbf{H}(\xi) = \int_B\left[\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}(\mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\right] dB。 \tag{20}$$

Ω_c 是无限域，在 Ω_c 内无法应用功的互等定理。为此在无穷远处划一个边界 B_∞。于是 B 与 B_∞ 所包围的区域 Ω_{cl} 是个有限域。在 Ω_{cl} 内对 H_c 和 $\mathbf{u}^*$ 应用功的互等定理，得到

当 $\xi \in \Omega_\xi$ 时，$$0 \equiv J_\infty - \int_B\left[\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}(\mathbf{H}_c) - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\right] dB。 \tag{21}$$

其中 $$J_\infty \equiv \int_{B\infty}\left[\mathbf{u}^* \cdot \mathbf{p}(\mathbf{H}_c) - \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\right] dB_\infty = \mathbf{C} + D\xi \times \mathbf{k}。 \tag{22}$$

将此代入(21)，然后与(20)相加，注意到边界条件(15)，得到

当 $\xi \in \Omega_\xi$ 时，$$\mathbf{H}(\xi) = \int_B \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{q}(\mathbf{x}) dB + \mathbf{C} + D\xi \times \mathbf{k}, \tag{23}$$

其中 $$\mathbf{q} = \mathbf{p}(\mathbf{H}) - \mathbf{p}(\mathbf{H}_c)。 \tag{24}$$

q 是边界 B 上的未知矢量。不难证明 q 满足自相平衡的条件

$$\int_B \mathbf{q} dB = 0, \qquad \int_B \mathbf{q} \times \mathbf{x} dB = 0。 \tag{25}$$

为了便于应用，在公式(23)、(25)中互换 x 与 ξ 的位置，这样得到

当 $\mathbf{x} \in \Omega$ 时，$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \int_{B_\xi} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{q}(\xi) dB_\xi + \mathbf{C} + D\mathbf{x} \times \mathbf{k}, \tag{26}$$

$$\int_{B_\xi} \mathbf{q}(\xi) dB_\xi = 0, \qquad \int_{B_\xi} \mathbf{q}(\xi) \times \xi dB_\xi = 0 \tag{27}$$

BIR(26)、(27)与文[10]用力学概念得到的结果相同。本文的推导证明了它是完备独立的。若用此 BIR 直接去满足 H 的边界条件，便可得到与原 BVPD 等价的间接未知量 BIE。

目前习用的 BIR 是

当 $\mathbf{x}\in\Omega$ 时，$\mathbf{H}(\mathbf{x})=\int_{B_\xi}\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{q}(\xi)dB_\xi$ (28)

其中的 q 不受任何约束。但这 BIR 有时有遗漏，即有时方程 (1) 的某些解无法表示成 (28) 的形式。

作为一个实例，考虑在半径为 R 的圆内的系数

$$\mathbf{H}=\mathbf{h}=\text{常数矢量} \tag{29}$$

若用本文的 BIR (26)，易知其为

$$\mathbf{q}=0\,,\quad \mathbf{C}=\mathbf{h}\,,\quad D=0\text{。} \tag{30}$$

若用习用的 BIR (28)，则当基本解中的 a 满足

$$\ln\frac{a}{R}=-\frac{1}{2(3-4\mu)} \tag{31}$$

时，无论 q 取何值，都不能得到(29)。

四、等价的直接未知量边界积分方程

现将公式(26)代入充要条件(3)，得到

$$\begin{aligned}&\int_B\left\{-\gamma\cdot\mathbf{u}_B(\mathbf{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\left[\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{t}(\xi)-\mathbf{u}_B(\xi)\cdot\mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\right]dB_\xi\right\}\cdot\mathbf{q}dB\\&+\int_B\mathbf{C}\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})dB+D\int_B(\mathbf{x}\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})dB=0\end{aligned} \tag{32}$$

上式第二个积分号后的函数在 $\xi=\mathbf{x}$ 处有一 $1/\rho$ 的奇点，因而该积分是指柯西主值积分。为了清楚地表明此含义，特把积分域记为 $\dot{B}_\xi$。由于该积分少了 $\xi=\mathbf{x}$ 这一点，所以前面多出一项，其中 γ 是已知量。在光滑的边界上 $\gamma=1/2$。

在方程(32)中，q、C、D 是可变的，但 q 须满足约束条件，所以它是带约束的变分方程，用拉氏乘子法，引用拉氏乘子 α,β 解除约束(27)，则从(32)可得到

$$\gamma\cdot\mathbf{u}_B(\mathbf{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\cdot\mathbf{u}_B(\xi)d\xi=\int_{B_\xi}\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{t}(\xi)dB_\xi+\alpha+\beta\mathbf{x}\times\mathbf{k} \tag{33}$$

$$\int_B\mathbf{t}(\mathbf{x})dB=0\,,\qquad\int_B(\mathbf{x}\times\ \mathbf{k})\cdot\mathbf{t}(\mathbf{x})dB=0\,, \tag{34}$$

方程 (33)、(34) 便是本文新建立的与原 BVPD 等价的直接未知量 BIE。它们的未知量是 $\mathbf{u}_B(\mathbf{x})$或 $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ 或它们的一半，以及 α、β 两个常量。

习用的直接未知量 BIE 是

$$\gamma\cdot\mathbf{u}_B(\mathbf{x})+\int_{\dot{B}_\xi}\mathbf{p}(\mathbf{u}^*)\cdot\mathbf{u}_B(\xi)dB_\xi=\int_{B_\xi}\mathbf{u}^*\cdot\mathbf{t}(\xi)dB_\xi\text{。} \tag{35}$$

在变分方程(32)中假设 $\mathbf{C}=0$，$D=0$而 q 不受任何约束，即可得到(35)。上述假设相当于认为习用的 BIR (28) 是完备的。但实际上(28)有时不完备，因而方程(35)有时不能保证充要条件(3)成立。

作为一个例子，继续考虑半径为 R 的圆内域问题。给定

在 B 上：　u_B= 常量，　(36)

要求确定 B 上相应的 t，BVPD 和本文的 BIE (33)、(34) 的解都为

$$\mathbf{t} = 0。\tag{37}$$

但在(31)式成立的情况下，习用的 BIE (35)却给出

$$\mathbf{t} = \text{任意常数矢量。}\tag{38}$$

这显然是多余的解。

参考文献

[1] 胡海昌. 边界积分方程的若干理论问题. 力学与实践，1993年15卷6期1页

[2] 胡海昌. 调和函数边界积分方程的充要条件. 固体力学学报，1989年10卷2期99页

[3] 胡海昌. 平面调和函数的充要边界积分方程. 中国科学 A 辑，1992年4期398页

[4] 何文军. 充分必要边界积分方程与边界元方法. 浙江大学力学系博士学位论文，1993

[5] 何文军，丁皓江，胡海昌. 充分必要的边界元法在势问题中的应用. 计算力学理论及应用 — 全国第三届计算力学大会文集. 科学出版社，1992

[6] He Wenjun, Ding Haojang, Hu Haichang. Numerical comparison of two boundary integral methods for plane harmonic functions. Acta Mechanica Sinica, V.9 n.4 p.312, 1993

[7] 丁皓江，王国庆，何文军. 各向异性柱体扭转的充分必要的边界积分方程. 固体力学学报，1995年16卷3期216页

[8] Hu Haichang, A necessary and sufficient set of boundary integral equations with indirect unknowns for plate bending problem. Acta Mechanica Sinica, V.8 n.2 0.127, 1992

[9] 胡海昌，弹性薄板弯曲理论中充要的间接变量边界积分方程. 上海力学，1993年14卷1期1页

[10] 张有天，王镭，陈平，弹性问题间接边界元法的修正. 工程力学，1987年4卷2期1页

Mathematica 在椭圆截面柱体扭转中的初步应用

王 清
（山东工业大学材料系，济南，250061）

孙希芳
（济南第一机床厂）

摘 要

本文应用 Mathematica 符号运算软件推导了椭圆截面柱体扭转时的应力分布。这个方法可以免除理论分析过程中大量复杂而易出错的人工推导过程。本文给出了用 Mathematica 语言编制的解决以上扭转问题的程序。

1. 前言

计算机符号运算做为数学和计算机科学的交叉学科自 70 年代开始发展起来，目前已经涉及到整个数学领域的各个方面[1]。作为计算机符号运算学科发展的重要成果，已经推出许多可以进行符号运算和公式推导的可靠商业软件包，如 Mathematica[2]，REDUCE[3]，DERIVE[4]，MAPLE[5]以及 MACSYMA[6]等。这些符号运算系统可以极大地帮助各学科领域的学者减少分析推导的繁重工作并且提高这些推导结果的可靠性。在 90 年代以前计算机符号运算的研究工作主要集中在如何用计算机实现数学公式的推导，随着成熟可靠的商业软件系统的推出，符号运算的思想已经逐渐从数学领域渗透到自然科学和工程的许多领域[7]。

1990 年 11 月美国机械工程师学会在德州的 Dallas 召开了一次关于“符号运算及其对力学的冲击”研讨会，肯定和确认了符号运算思想在力学学科发展中的作用和地位[8]。从会议出版的论文集中可以看出许多美国学者已经在这个领域进行了艰难的开拓性工作，当时他们研究的主要对象是材料力学中的杆、柱、梁等简单的力学问题。1995 年 10 月欧洲力学学会在德国的 Hamburg 也召开了一次“计算机符号运算在力学中的应用”研讨会。这次会议属于小型会议，仅局限于欧洲各国的研究者，会后也未见会议文集发表，但相信该会议对 90 年代以来符号运算在力学中的应用进行了评价和总结。

目前，计算机符号运算系统在力学中的应用主要可分成两大类。其一是在有限元方法中的应用，利用符号运算系统形成有限元计算中的刚度阵以及实现数值计算的可视化[9]。其二是利用符号运算系统建立力学问题的基本方程并且给出符号运算的结果，这一发展方向将会对力学的产生相当大的影响。目前我们熟悉的数值计算方法将会受到符号运算方法的挑战，这是由于符号运算方法不仅可以给出力学问题的数值计算结果外，还可以得到该问题的分析形式的结果。Ioakimidis[10]就此提出了一个与数据计算方法平行的概念——符号运算方法，也称为半分析半数值方法。这一新的分析方法将随着符号运算算法的丰富以及计算机硬件技术的发展被更多的学者所采纳。

在前面提到的几种比较出色的符号运算软件包中，即 Mathematica，REDEUE，DERIVE，MAPLE，MACSYMA，以 Mathematica 为最优秀的一种，它不仅可以像 C 语言

和 FORTRAN 语言那样进行数值计算，而且可以进行符号的运算，公式的推导并且可以把最后得到的公式转化为标准C语言和 FORTRAN 语言程序。本文作为 Mathematica 的初步应用，对椭圆截面柱体扭转问题应用 Mathematica 推导出了应力分布公式，从而说明了 Mathematica 工具能够免除大量的复杂而易出错的人工推导过程。

2. 符号运算方法

本文研究椭圆截面柱体承受扭转作用，其周边方程为

$$L(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{1}$$

其中，a，b 分别为椭圆的长、短半轴。

设 $\Psi(x,y)$ 为扭转应力函数，其与剪应力的关系为

$$\tau_{ZX}=\frac{\partial\Psi}{\partial Y} \tag{2}$$

$$\tau_{ZY}=-\frac{\partial\Psi}{\partial X} \tag{3}$$

$\Psi(x,y)$ 满足的平衡方程为

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 X}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial^2 Y}=-2G\theta \tag{4}$$

其中，G 为剪切模量，θ 为单位长度扭转角。

扭转问题的解析解为

$$\tau_{ZX}=-2G\theta\frac{a^2}{a^2+b^2}Y \tag{5}$$

$$\tau_{ZY}=2G\theta\frac{b^2}{a^2+b^2}X \tag{6}$$

以下给出用 Mathematica 语言编写的解决以上扭转问题的一个模块。

```
Twisting:=Block[{},
        (* stress Function *)L(x_,y_]:=(x/a)^2+(y/b)^2-1;
        Phi[x_,y_]:=a*L[x,y];
        (* differential operator *)
        F[x_,y_]:=D[L[x,y],{x,2}}]+D[L[x,y],{y,2}];
        (* coefficient of stress function *)
        A=-2*G*theta/F[x,y];
        (* shear stress distributions *)
        Tauzx[x_,y_]:=D[Phi[x,y],y];
        Tauzy[x_,y_]:=D[phi[x,y],x];
        (* end of the block *)
        ]
```

以上程序仅应用了 Mathematica 的核心部分内容，在486/33计算机上运算，得到了与人工推导相同的结果。下面给出的是 Mathematica 运算得到的椭圆周边方程，扭转应力函

数以及最后的应力分布。

```
In[1]:=
    Twisting:=Block {{ },(* stress function *)
                    L[x_,y_]:={x/a)^2+(y/b)^2-1;
                    Phi[x_,y_]:=A * L[x,y];
                    (* differencial operator *)
                    F[x_,y_]:=D[L[x,y],[x,2}]
                              +D[L[x,y],{y,2}];
                    (* coefficient of stress function *)
                    A=-2 * G * theta/f[x,y];
                    (* shear stress distributions *)
                    Tauzx [x_,y_]:=D[Phi[x,y],y];
                    Tauzy[x_,y_]:=-D[Phi[x,y],x];
                    (* end of the block *)
                   ]
In[2]:=
    Twisting
In[3]:=
    L[x,y]
Out[3]=
```

$$-1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

```
In[4]:=
    Phi[x,y]
Out[4]=
```

$$\frac{-2\,G\,theta\,(-1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})}{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

```
In[5]:=
    Tauzx[x,y]
Out[5]=
```

$$\frac{-4\,G\,theta\,y}{(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2})b^2}$$

```
In[6]:=
    Tauzy[x,y]
Out[6]
```

$$\frac{4\,G\,theta\,x}{a^2(\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2})}$$