

21

0151.2
M15

线性代数复习指导

主 编 北京大学数学科学学院 马杰
编 写 双博士高等数学课题组
总策划 胡东华



机械工业出版社

声明:本书封面及封底均采用双博士品牌专用图标
(见右图);该图标已由国家商标局注册登记。
未经本策划人同意,禁止其他单位或个人使用。



图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导/马杰主编.-北京:机械工业出版社,2002.2

(高等学校数学教材配套辅导丛书)

ISBN 7-111-09822-6

I. 线... II. 马... III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001200 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮编:100037)

责任编辑:王春雨

责任校对:杨 林

封面设计:胡东华

责任印制:何全君

北京铭成印刷有限公司印刷 机械工业出版社出版发行

2002 年 3 月第 1 版 第 1 次印刷

850mm×1168mm 1/32 印张 14.625 字数 363 千字

定价:16.00 元

©版权所有 违法必究

盗版举报电话:(010)62534708(著作权者)

封面无防伪标及正文非黄色胶版纸均为盗版

(注:防伪标揭开困难或揭起无号码皆为盗版)

为了保护您的消费权益,请使用正版图书。所有正版双博士品牌图书均贴有电码电话防伪标识物(由 16 位数字组成的密码)。在查询时,只需揭开标识的表层,然后拨打全国统一免费防伪查询电话 16840315 或 0898-95315000,按照语音提示从左到右依次输入 16 位数字后按 # 键结束,您就可以得知所购买的图书是否为正版图书。

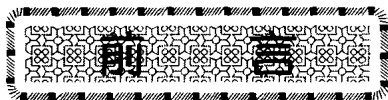
<http://www.bbdd.cc>(中国教育考试双博士网站)

<http://www.cmpbook.com>(机械工业出版社网站)

凡购买本书,如有字迹不清、缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换。

订书电话:新华书店系统:(010)68993821 (010)68326094

邮购及各省图书批发市场:(010)62579473 (010)62534708



本书是《高等数学辅导》的姊妹篇。

本书属于“双博士”品牌系列丛书中的黄金品牌。

本套丛书从 2002 年起由科学技术文献出版社改为由机械工业出版社出版,其内容、用纸及印装质量在原基础上均上了一个大台阶,故称之为“双博士精品”系列。

本书采用 60 克黄色胶版纸印刷,且每印张的定价不上涨,其直接目的是以学生利益为中心,并遏制盗版。

具体例为:

【基础知识导学】:详细叙述了每章、节的基本概念,基本定理和基本方法,便于读者复习。

【重点难点突破】:针对每一章节的重点难点加以详细分析,用具体的例子帮助读者学习掌握。

【典型题型解析】:本书对每一章节的典型题型进行了分类,解答评析。不仅指出同类题的解题思路和程序,并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误,读者可以举一反三,触类旁通。

【同步强化训练】:在所附的习题中,既有一般教科书和习题集中的典型题目,也有选自全国高教自考、全国研究生统考和全国 MBA 联考中的考题,读者可以有选择的进行训练,以检验自己对所学知识的掌握程度。

【考研试题讲析】:每章最后对近十年来全国研究生考试高等数学(一)、(二)、(三)、(四)线性代数部分的考题进行了归类、讲解和分析,以便对报考研究生的读者有所帮助。

这次修订根据读者的需求,我们对全国流行的经典教材——同济大学《线性代数》第三版的习题作了相应参考答案,附在本书后面,供读者在学习过程中使用。

欢迎垂询中国教育考试网 <http://www.bbdd.cc>,该网站将在 2002 年 4 月 ~ 2002 年 5 月、2002 年 11 月 ~ 2002 年 12 月举行“大学英语四、六级考试押题讲座”。

“双博士”品牌系列丛书大学类辅导书包括以下内容:

大学英语(精读)课文辅导(1~6分册)

大学英语(精读)辅导丛书(1~4分册)

新编大学英语课文辅导(1~4分册)

新编大学英语双博士课堂(1~4分册)

21世纪大学英语读写教程课文辅导(1~4分册)

大学基础英语课文辅导(1~5分册)

当代大学英语课文辅导(1~4分册)

新编大学俄语基础读写教程课文辅导(1~4分册)

大学英语四、六级考试全真模拟试卷(共2分册)(配磁带)

大学英语四、六级考试应试教程(共10分册)(配磁带)

大学英语四级词汇考点记忆手册

大学英语六级词汇考点记忆手册

大学英语词汇考点记忆法典型考题(1~4级、1~6级共2分册)

大学英语考试历年真题解析(共2分册)(配磁带)

最新大学英语四、六级阅读100篇

高等数学辅导

高等数学习题集

高等数学习题解析

线性代数复习指导

概率统计辅导

概率统计习题集

此外,还有:

大学英语口语考试教程(配2盒磁带)

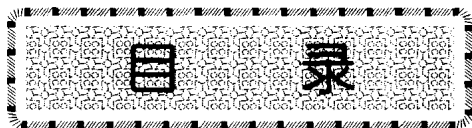
最新英美流行口语(配1盒磁带)

新世纪英语口语(初级、中级、高级)(配磁带)

国际音标教程(配磁带),托福、GRE词汇考点手册等

双博士数学课题组

2002年1月北京



前 言

第一章 行列式

§ 1 n 阶行列式的定义	(1)
【基础知识导学】	(1)
【重点难点突破】	(2)
【典型题型解析】	(3)
【同步强化训练】	(13)
【参考答案】	(15)
§ 2 n 阶行列式的性质和计算	(16)
【基础知识导学】	(16)
【重点难点突破】	(19)
【典型题型解析】	(19)
【同步强化训练】	(55)
【参考答案】	(58)
§ 3 克莱姆法则	(60)
【基础知识导学】	(60)
【重点难点突破】	(61)
【典型题型解析】	(61)
【同步强化训练】	(65)
【参考答案】	(66)

§ 4 考研试题讲析	(69)
------------------	------

第二章 矩 阵

§ 1 矩阵及其运算	(75)
【基础知识导学】	(75)
【重点难点突破】	(77)
【典型题型解析】	(79)
【同步强化训练】	(88)
【参考答案】	(91)
§ 2 逆矩阵	(94)
【基础知识导学】	(94)
【重点难点突破】	(98)
【典型题型解析】	(98)
【同步强化训练】	(111)
【参考答案】	(116)
§ 3 矩阵的分块	(118)
【基础知识导学】	(118)
【重点难点突破】	(121)
【典型题型解析】	(122)
【同步强化训练】	(133)
【参考答案】	(135)
§ 4 考研试题讲析	(138)

第三章 线性方程组

§ 1 消元法	(151)
【基础知识导学】	(151)
【重点难点突破】	(153)
【典型题型解析】	(154)
【同步强化训练】	(162)

	【参考答案】	(164)
§ 2	n 维向量 线性相关性	(166)
	【基础知识导学】	(166)
	【重点难点突破】	(169)
	【典型题型解析】	(171)
	【同步强化训练】	(189)
	【参考答案】	(193)
§ 3	矩阵的秩	(195)
	【基础知识导学】	(195)
	【典型题型解析】	(196)
	【同步强化训练】	(205)
	【参考答案】	(206)
§ 4	线性方程组解的结构	(206)
	【基础知识导学】	(206)
	【重点难点突破】	(208)
	【同步强化训练】	(231)
	【参考答案】	(236)
§ 5	考研试题讲析	(242)

第四章 向量空间

§ 1	向量空间的概念与性质	(253)
	【基础知识导学】	(253)
	【重点难点突破】	(255)
	【典型题型解析】	(257)
	【同步强化训练】	(266)
	【参考答案】	(268)
§ 2	向量的内积	(269)
	【基础知识导学】	(269)
	【典型题型解析】	(270)

【同步强化训练】	(276)
【参考答案】	(277)
§ 3 标准正交基和正交矩阵	(279)
【基础知识导学】	(279)
【典型题型解析】	(280)
【同步强化训练】	(304)
【参考答案】	(306)
§ 4 考研试题讲析	(308)

第五章 矩阵的特征值与特征向量

§ 1 矩阵的特征值与特征向量	(310)
【基础知识导学】	(310)
【重点难点突破】	(311)
【典型题型解析】	(313)
【同步强化训练】	(329)
【参考答案】	(331)
§ 2 矩阵相似对角化的条件	(335)
【基础知识导学】	(335)
【重点难点突破】	(335)
【典型题型解析】	(340)
【同步强化训练】	(358)
【参考答案】	(360)
§ 3 实对称矩阵的相似对角化	(365)
【基础知识导学】	(365)
【重点难点突破】	(365)
【典型题型解析】	(366)
【同步强化训练】	(377)
【参考答案】	(378)
§ 4 考研试题讲析	(382)

第六章 二次型

§ 1	二次型的矩阵表示	(391)
	【基础知识导学】	(391)
	【重点难点突破】	(393)
	【典型题型解析】	(394)
	【同步强化训练】	(399)
	【参考答案】	(401)
§ 2	化二次型为标准形和规范形	(403)
	【基础知识导学】	(403)
	【重点难点突破】	(404)
	【典型题型解析】	(406)
	【同步强化训练】	(426)
	【参考答案】	(427)
§ 3	正定二次型	(431)
	【基础知识导学】	(431)
	【重点难点突破】	(432)
	【典型题型解析】	(433)
	【同步强化训练】	(445)
	【参考答案】	(447)
§ 4	考研试题讲析	(452)

第一章 行列式

§ 1 n 阶行列式的定义

【基础知识导学】

1. n 阶行列式的归纳定义

对由 n^2 数组成的 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时, $|a_{11}| = a_{11}$.

当 $n \geq 2$ 时,

$$D = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j}$$

其中 $M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 a_{1j} 的余子

式,

$A_{1j} = (-1)^{1+j} M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

2. n 阶行列式的“排列逆序”定义

(1) 排列

由 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列.

n 级排列的总数是 $n!$ 个.

(2) 逆序和逆序数

在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中,若 $i_t > i_s$,则称这两个数 $i_t i_s$ 组成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.若 τ 为奇数,则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列;若 τ 为偶数,称此排列为偶排列.

(3)对换

在排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.任意一个 n 排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

(4) n 阶行列式的“排列逆序”定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

应该指出的是,行列式采用上述两种方式的定义是等价的.通常如果用“排列逆序”定义行列式,则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

【重点难点突破】

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具.对初学者而言,其定义也是一个难点.掌握行列式的“排列逆序”

定义必须抓住三个特点,即:

- (i) 由于 n 级排列的总数是 $n!$ 个,故展开式中共有 $n!$ 项;
- (ii) 每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;
- (iii) 每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

行列式的计算有许多技巧,但灵活掌握其定义是计算行列式的基础.

【典型题型解析】

1. 一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$ 后比 i_{n-1} 小的数的个数 $= i_n$ 前比 i_n 大的数的个数 $+ i_{n-1}$ 前比 i_{n-2} 大的数的个数 $+ \cdots + i_2$ 前比 i_2 大的数的个数.

例 1.1 求下列排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性:

(1) 1347265; (2) $n(n-1)\cdots 21$;

(3) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解: (1) $\tau(1347265) = 0 + 1 + 1 + 3 + 0 + 1 = 6$, 故 1347265 为偶排列.

$$\begin{aligned} (2) \tau(n(n-1)\cdots 21) &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

易知, 当 $n = 4k$ 或 $n = 4k + 1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}$ 为偶数, 故此时排列为偶排列; 当 $n = 4k + 2$ 或 $n = 4k + 3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2}$ 为奇数, 故此时排列为奇排列.

(3) 该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 不构成逆序, 后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 也不构成逆序, 只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1)$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

故奇偶性与排列(2)一致.

例 1.2 如果排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 的逆序数为 I , 排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数是多少?

解: 设原排列 $x_1 x_2 \cdots x_n$ 中 x_1 后比 x_1 小的数的个数为 k_1 , 则比 x_1 大的数的个数为 $(n-1) - k_1$, 于是新排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 中 x_1 前比 x_1 大的数为 $(n-1) - k_1$ 个; 同理, 设原排列中 x_2 后比 x_2 小的数为 k_2 个, 则新排列中 x_2 前比 x_2 大的数为 $(n-2) - k_2$ 个; $\cdots$ 依此类推, 原排列 x_{n-1} 后比 x_{n-1} 小的数为 k_{n-1} 个, 则新排列中 x_{n-1} 前比 x_{n-1} 大的数为 $[n - (n-1)] - k_{n-1}$ 个, 而 $k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = I$, 故新排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned} & \tau(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) \\ &= [(n-1) - k_1] + [(n-2) - k_2] + \cdots \\ & \quad + \{[n - (n-1)] - k_{n-1}\} \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 - I = \frac{n(n-1)}{2} - I. \end{aligned}$$

2. 灵活运用行列式的定义, 判断行列式展开项的性质.

例 1.3(1) 在 6 阶行列式中, 项 $a_{23} a_{31} a_{42} a_{56} a_{14} a_{65}$ 应带什么符号?

(2) 写出 4 阶行列式中, 带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项.

(3) 在函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中, 求 x^3 的系数.

解: (1) 适当调整该项元素位置, 使 6 个元素的行下标 (即第一个下标) 按自然顺序排列, 则列下标排列为 431265, 其逆序数 $\tau(431265) = 6$, 故取正号.

(2) 由行列式的定义可知, 包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{12} a_{23} a_{31}$

a_{44} 和 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$, 其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(2314) = 2$ 和 $\tau(4312) = 5$. 已知所求项带负号, 故取列下标为奇排列的 $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$.

(3) 根据行列式的定义, 仅当 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项, 这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134) = 1$, 故含 x^3 的项的系数为 -1 .

3. 对于含零元素较多的行列式, 可直接用定义计算.

由定义知, n 阶行列式共有 $n!$ 项, 每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, 若某一项 n 个元素的乘积中有零因子, 则该项为零, 若行列式中零元素较多, 则为零的项就较多, 故只须找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

例 1.4 计算

$$(1) D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解: (1) 在 D 中只有 $1, 2, \cdots, n$ 这 n 个元素不为零, 且恰处于不同行不同列, 所以 D 中不为零的项为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$$

由于 $a_{1j_1} = 1$, 它位于第 1 行第 2 列, 故 $j_1 = 2$, 又 $a_{2j_2} = 2$ 位于第 2 行第 3 列, 故 $j_2 = 3$, 同理 $j_3 = 4, \cdots, j_{n-1} = n, j_n = 1$, 从而

$$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau(23 \cdots n1) = n-1$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零,所以其余各项均为零,故

$$D = (-1)^{n-1} n!$$

(2)与(1)完全类似,由于行列式中不为零的项只有 $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ 这一项,而把这 n 个元素行下标按自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2) \cdots 21n$, 而 $\tau(n-1, n-2, \cdots, 2, 1, n) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ 所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau((n-1)(n-2) \cdots 1n)} 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \\ &= (-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} n! \end{aligned}$$

例 1.5 证明行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证明:由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到 $j_1 = 1, 2, 3, 4, 5; j_2 = 1, 2, 3, 4, 5; j_3 = 1, 2; j_4 = 1, 2; j_5 = 1, 2$.

因为 $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5$ 在上述可能取的数值中,不能组成一个 5 级排列,故由行列式定义得 $D_5 = 0$.

例 1.6 利用

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中,奇偶排列各半.

证明:根据行列式的定义有

$$D_n = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为 n 个数 $1, 2, \cdots, n$ 的某一排列, 该和式中共有 $n!$ 项, 且每项的绝对值都是 1. 由已知 $D_n = 0$, 知上面和式中 1 和 -1 的个数相等, 均为 $\frac{n!}{2}$ 个, 这说明 $1, 2, \cdots, n$ 的所有排列中, 奇偶排列各占一半.

例 1.7 证明:

(1) 上、下三角形行列式等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$$

证明: (1) 先考察上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项.在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1, n-1}, a_{n-1, n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能.由于 $j_n = n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$.这样逐步推上去,不难看出,除去

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是零.而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,完全类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2) 作为 D 的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$