21

线性代数复习指导

主　编　北京大学数学科学学院　马杰
编　写　双博士高等数学课题组
总策划　胡东华

机械工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导/马杰主编.-北京：机械工业出版社，2002.2

（高等学校数学教材配套辅导丛书）

ISBN 7-111-09822-6

Ⅰ.线… Ⅱ.马… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 001200 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮编：100037）

责任编辑：王春雨　　责任校对：杨　林

封面设计：胡东华　　责任印制：何全君

北京铭成印刷有限公司印刷　机械工业出版社出版发行

2002 年 3 月第 1 版　第 1 次印刷

850mm×1168mm　1/32　印张 14.625　字数 363 千字

定价：16.00 元

http://www.bbdd.cc（中国教育考试双博士网站）

http://www.cmpbook.com（机械工业出版社网站）

凡购买本书，如有字迹不清、缺页、倒页、脱页，由本社发行部负责调换。

订书电话：新华书店系统：(010)68993821　(010)68326094

邮购及各省图书批发市场：(010)62579473　(010)62534708

前言

本书是《高等数学辅导》的姊妹篇。

本书属于"双博士"品牌系列丛书中的黄金品牌。

本套丛书从2002年起由科学技术文献出版社改为由机械工业出版社出版，其内容、用纸及印装质量在原基础上均上了一个大台阶，故称之为"双博士精品"系列。

本书采用60克黄色胶版纸印刷，且每印张的定价不上涨，其直接目的是以学生利益为中心，并遏制盗版。

其体例为：

【基础知识导学】：详细叙述了每章、节的基本概念，基本定理和基本方法，便于读者复习。

【重点难点突破】：针对每一章节的重点难点加以详细分析，用具体的例子帮助读者学习掌握。

【典型题型解析】：本书对每一章节的典型题型进行了分类，解答评析。不仅指出同类题的解题思路和程序，并且指出了在应用方法和运算过程中常犯的错误，读者可以举一反三，触类旁通。

【同步强化训练】：在所附的习题中，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有选自全国高教自考、全国研究生统考和全国MBA联考中的考题，读者可以有选择的进行训练，以检验自己对所学知识的掌握程度。

【考研试题讲析】：每章最后对近十年来全国研究生考试高等数学(一)、(二)、(三)、(四)线性代数部分的考题进行了归类、讲解和分析，以便对报考研究生的读者有所帮助。

这次修订根据读者的需求，我们对全国流行的经典教材——同济大学《线性代数》第三版的习题作了相应参考答案，附在本书后面，供读者在学习过程中使用。

欢迎垂询中国教育考试网站 http://www.bbdd.cc，该网站将在2002年4月~2002年5月、2002年11月~2002年12月举行"大学英语四、六级考试押题讲座"。

“双博士”品牌系列丛书大学类辅导书包括以下内容:
大学英语(精读)课文辅导(1~6分册)
大学英语(精读)辅导丛书(1~4分册)
新编大学英语课文辅导(1~4分册)
新编大学英语双博士课堂(1~4分册)
21世纪大学英语读写教程课文辅导(1~4分册)
大学基础英语课文辅导(1~5分册)
当代大学英语课文辅导(1~4分册)
新编大学俄语基础读写教程课文辅导(1~4分册)
大学英语四、六级考试全真模拟试卷(共2分册)(配磁带)
大学英语四、六级考试应试教程(共10分册)(配磁带)
大学英语四级词汇考点记忆手册
大学英语六级词汇考点记忆手册
大学英语词汇考点记忆法典型考题(1~4级、1~6级共2分册)
大学英语考试历年真题解析(共2分册)(配磁带)
最新大学英语四、六级阅读100篇
高等数学辅导
高等数学习题集
高等数学习题解析
线性代数复习指导
概率统计辅导
概率统计习题集
此外,还有:
大学英语口语考试教程(配2盒磁带)
最新英美流行口语(配1盒磁带)
新世纪英语口语(初级、中级、高级)(配磁带)
国际音标教程(配磁带),托福、GRE词汇考点手册等

双博士数学课题组

2002年1月北京

目　录

前　言

第一章　行列式

第二章　矩　　阵

第三章　线性方程组

第四章　向量空间

第五章 矩阵的特征值与特征向量

第六章　二次型

第一章　行列式

§1　n 阶行列式的定义

【基础知识导学】

1. n 阶行列式的归纳定义

对由 n^2 个数组成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

当 $n=1$ 时，$|a_{11}|=a_{11}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

其中 $M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为 a_{1j} 的余子式，

$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为 a_{1j} 的代数余子式.

2. n 阶行列式的“排列逆序”定义

(1)排列

由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列的总数是 $n!$ 个.

(2)逆序和逆序数

在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中,若 $i_t > i_s$,则称这两个数 $i_t i_s$ 组成一个逆序.一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.若 τ 为奇数,则称 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为奇排列;若 τ 为偶数,称此排列为偶排列.

(3)对换

在排列 $i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中,交换任意两数 i_t 和 i_s 的位置,称为一次对换.对换改变排列的奇偶性.任意一个 n 排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

(4)n 阶行列式的“排列逆序”定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和,故 n 级行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和,每一项的符号取决于组成该项的 n 个元素的列下标排列的逆序数(行下标按自然顺序排列),即当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时取正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时取负号.

应该指出的是,行列式采用上述两种方式的定义是等价的.通常如果用“排列逆序”定义行列式,则归纳定义就成为行列式按一行展开的性质.

【重点难点突破】

行列式是研究线性方程组、矩阵、特征多项式等问题的重要工具.对初学者而言,其定义也是一个难点.掌握行列式的“排列逆序”

定义必须抓住三个特点,即:

(i)由于 n 级排列的总数是$n!$ 个,故展开式中共有 $n!$ 项;

(ii)每项必须是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;

(iii)每项前的符号取决于 n 个元素列下标所组成排列的奇偶性.

行列式的计算有许多技巧,但灵活掌握其定义是计算行列式的基础.

【典型题型解析】

1. 一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 的逆序数 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$ 后比 i_1 小的数的个数 $+ i_2$ 后比 i_2 小的数的个数 $+ \cdots + i_{n-1}$后比 i_{n-1}小的数的个数 $= i_n$ 前比 i_n 大的数的个数 $+ i_{n-1}$前比 i_{n-2}大的数的个数 $+ \cdots + i_2$ 前比 i_2 大的数的个数.

例 1.1 求下列排列的逆序数,从而决定它们的奇偶性:

(1)1347265;　　　　(2)$n(n-1)\cdots 21$;

(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

解:(1)$\tau(1347265) = 0+1+1+3+0+1=6$,故 1347265 为偶排列.

(2)
$$\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

易知,当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,故此时排列为偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数,故此时排列为奇排列.

(3)该排列中前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$不构成逆序,后 n 个数 $246\cdots(2n)$也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 0+1+2+\cdots+(n-1)$

$$= \frac{n(n-1)}{2}$$

故奇偶性与排列(2)一致.

例 1.2 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I,排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

解:设原排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中 x_1 后比 x_1 小的数的个数为 k_1,则比 x_1 大的数的个数为$(n-1)-k_1$,于是新排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中 x_1 前比 x_1 大的数为$(n-1)-k_1$ 个;同理,设原排列中 x_2 后比 x_2 小的数为 k_2 个,则新排列中 x_2 前比 x_2 大的数为$(n-2)-k_2$ 个;……依此类推,原排列 x_{n-1}后比 x_{n-1}小的数为 k_{n-1}个,则新排列中 x_{n-1}前比 x_{n-1}大的数为$[n-(n-1)]-k_{n-1}$个,而 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=I$,故新排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}
&\tau(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)\\
&=[(n-1)-k_1]+[(n-2)-k_2]+\cdots\\
&\quad+\{[n-(n-1)]-k_{n-1}\}\\
&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1-I=\frac{n(n-1)}{2}-I.
\end{aligned}$$

2. 灵活运用行列式的定义,判断行列式展开项的性质.

例 1.3(1)在 6 阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$应带什么符号?

(2)写出 4 阶行列式中,带负号且包含因子 a_{23}和 a_{31}的项.

(3)在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0\\ 1 & x & 2 & 3\\ 2 & 3 & x & 2\\ 1 & 1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中,求 x^3 的系数.

解:(1)适当调整该项元素位置,使 6 个元素的行下标(即第一个下标)按自然顺序排列,则列下标排列为 431265,其逆序数 $\tau(431265)=6$,故取正号.

(2)由行列式的定义可知,包含因子 a_{23}和 a_{31}的项必为 $a_{12}a_{23}a_{31}$

a_{44}和 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其列下标排列的逆序数分别为 $\tau(2314)=2$ 和 $\tau(4312)=5$. 已知所求项带负号，故取列下标为奇排列的 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$.

(3)根据行列式的定义，仅当 $a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$ 四个元素相乘才会出现 x^3 项，这时该项列下标的排列的逆序数为 $\tau(2134)=1$，故含 x^3 的项的系数为 -1.

3. 对于含零元素较多的行列式，可直接用定义计算.

由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，若某一项 n 个元素的乘积中有零因子，则该项为零，若行列式中零元素较多，则为零的项就较多，故只须找出那些不为零的项就可求出行列式的值.

例 1.4 计算

$$(1)D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2)D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

解:(1)在 D 中只有 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个元素不为零，且恰处于不同行不同列，所以 D 中不为零的项为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=1\cdot2\cdot3\cdots n=n!$$

由于 $a_{1j_1}=1$，它位于第 1 行第 2 列，故 $j_1=2$，又 $a_{2j_2}=2$ 位于第 2 行第 3 列，故 $j_2=3$，同理 $j_3=4,\cdots,j_{n-1}=n, j_n=1$，从而

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=\tau(23\cdots n1)=n-1$$

而行列式的其余各项中都至少有一个元素为零,所以其余各项均为零,故

$$D=(-1)^{n-1}n!$$

(2)与(1)完全类似,由于行列式中不为零的项只有 $1\cdot2\cdots(n-1)\cdot n$ 这一项,而把这 n 个元素行下标按自然顺序排列时,列下标的排列为 $(n-1)(n-2)\cdots21n$,而 $\tau(n-1,n-2,\cdots,2,1,n)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$所以

$$\begin{aligned}D&=(-1)^{\tau((n-1)(n-2)\cdots1n)}1\cdot2\cdots(n-1)\cdot n\\&=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}n!\end{aligned}$$

例 1.5 证明行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\\b_1&b_2&b_3&b_4&b_5\\c_1&c_2&0&0&0\\d_1&d_2&0&0&0\\e_1&e_2&0&0&0\end{vmatrix}=0.$$

证明:由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到 $j_1=1,2,3,4,5;j_2=1,2,3,4,5;j_3=1,2;j_4=1,2;j_5=1,2$.

因为 $j_1j_2j_3j_4j_5$ 在上述可能取的数值中,不能组成一个 5 级排列,故由行列式定义得 $D_5=0$.

例 1.6 利用

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\&\cdots\cdots&\cdots&\\1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=0$$

证明 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中,奇偶排列各半.

证明:根据行列式的定义有

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 个数 $1,2,\cdots,n$ 的某一排列，该和式中共有 $n!$ 项，且每项的绝对值都是 1．由已知 $D_n=0$，知上面和式中 1 和 -1 的个数相等，均为 $\frac{n!}{2}$ 个，这说明 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列中，奇偶排列各占一半．

例 1.7 证明：

(1)上、下三角形行列式等于主对角线（从左上角到右下角这条对角线）上的元素的乘积．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2)对角行列式也等于主对角线上的元素的乘积．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

证明：(1)先考察上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的定义,展开项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项.在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1$,n 这两个可能.由于 $j_n = n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$.这样逐步推上去,不难看出,除去

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是零.而这一项的列下标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

对下三角形行列式,完全类似地有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

(2)作为 D 的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$