〔美〕G·Strang著

线性代数及其应用

侯自新　郑仲三　张延伦　译

南开大学出版社

线性代数及其应用

〔美〕G.Strang 著
侯自新 郑仲三 张延伦 译

南开大学出版社

内 容 提 要

本书是作者在麻省理工学院长期使用的教材，结合应用讲授线性代数的基本理论，颇具特色。内容包括：高斯消元法，线性方程组的理论，正交射影和最小二乘，行列式，特征值和特征向量，正定矩阵，矩阵的计算，线性规划和对策论。

该书适于理工科以及统计、经济和管理各类不同层次的大学生研究生作为教材。也适合于有关高校师生及有关科技人员作为参考书。

Linear Algebra and Its Applications
Gilbert Strang
Academic Press, New York, 1976

线性代数及其应用

C.Strang 著

侯自新 等译

南开大学出版社出版
（天津八里台南开大学校内）
邮政编码300071 电话34,9318
新华书店天津发行所发行
河北省邮电印刷厂印刷

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷
开本：850×1168 1/32 印张：15.25 插页：2
字数：378千 印数：1—5 000
ISBN7-310-00223-7/O-38 定价：3.90元

俄译本校订者序

传统的线性代数课本和参考书都很少涉及应用，而计算数学中一切方法无例外地都以线性代数为基础。从这个意义上，可以说线性代数是完全的应用学科。

本书是著名美国数学家斯特让（G.Strang)根据他在麻省理工学院所用讲义写成的。他的讲义充分考虑了线性代数的应用性质，在内容的选择和讲法上都与传统方式有实质性的不同。例如，高斯消去法，正定矩阵，线性规划都各辟为单独的一章，而线性变换和矩阵的约当标准形又只作为简短的附录。书中也讲了向量在子空间上的正交射影和有限元方法。当前，有限元方法是数理方程近似解法的基本工具，有专门的一章讲矩阵计算和线性方程组的迭代解法。迭代解法在计算数学中起着重要的作用。

每章都有着大量的例题和习题，用来培养和提高读者解应用题的习惯和能力。

本书文字叙述充分，适用范围广泛。对数学应用工作者，对综合性大学和工科院校中很多专业的研究生、大学生都适用。线性代数教师不仅会感兴趣于它的讲法，更会感兴趣于它所实现的理论与应用的结合。

Г.И.Марчук

中译者的话

G.Strang编著的《线性代数及其应用》十年前问世以来，很快就受到各国数学工作者及广大科技人员的重视。出版不久就被译成俄、日等文字出版。苏联著名的数学家、计算数学权威Г.И.Марчук还专门为俄译本写了序言。在1980年美国又发行了第二版。

这本书是作者在麻省理工学院多年所用的讲稿的基础上撰写的。它之所以被广为重视，其重要原因是在很大程度上突破了线性代数的传统讲法，作者力图将线性代数的抽象性与其应用性有机地结合起来，既保持了理论上的严谨，又尽可能早地介绍有关理论的应用，并精选了一批有关其它数学以及物理和经济等领域的例子。这就不仅使数学工作者更多地了解线性代数的应用，而且也为广大从事实际工作的科技人员和管理人员能更快更好地应用线性代数提供了一本极好的教材。

为了使本教材适用各个方面不同水平的读者，本书在讲法上也做了新的尝试。努力用语言讲清数学思想之真谛，而避免过多的形式逻辑的推导。并把一部份比较更抽象但也是很重要的理论放在附录中去讲，这样做不仅保证理论体系的完整，也为不同专业在选材上提供了方便。

基于上述理由，我们觉得将这样一本有价值的教材介绍给我国读者是很有必要的。特别是近20多年以来，由于电子计算机的飞速发展和广泛应用，线性代数已成为越来越多的科技工作者必不可少的数学工具。我们相信这本书在这方面必将对大家有所帮助。

本书第1、2、4章和序由张延伦，第6、7、8章由郑仲三译，第3、5章和附录由侯自新译。侯自新并负责全文的通校。

由于我们水平有限，译文难免有误，敬请读者指正。

序

现行线性代数课本都过于抽象。这种看法也许武断了些，但我确信线性代数课本应该既能讲清楚该学科的基本理论，又能表明该学科具有如同微积分一样的基础作用和实用价值。

当然，线性代数课本现状的形成是有它的道理的，也即由于这一入门学科立论的准确和证明的严格。我充分地意识到了这两点，并力求在我们的教学中一丝不苟地保持它。我在麻省理工学院所试行的教法表明，线性代数还具有另外一个同样重要的特点，这就是它不只允许，而且是更为适于将数学的两大因素——抽象和应用结合起来。

目前多数的学生，特别是非数学系的学生，根本不学这门课，而学这门课的学生也只在抽象的方面绞脑汁，却并不接触应用。结果是，甚至我们那些最好的学生也只在抽象的方面拿手，而在计算方面却十分蹩脚。例如，解线性方程组，他们用克莱姆规则，对特征值他们只知道那是特征方程的根。这种情况要求我们教学要实用些，开阔些。

我希望把线性代数写成为不同方面不同水平的学生都能用。这不是说要把它写成食谱，而是说不把注意力只集中在线性代数自身的严格上，而是更多地注意讲解，也即更注重的是解释而不是推导。一些定义是按传统方式给出来的，而有些则是在讨论过程中形成的。同样地，一些证明是按部就班严格进行的，但不都是这样，不管怎么样，基本理论我们都是重视的，它是核心，只是有时用例子来导出它，并用例子来加深对它的理解。

讲线性代数课首先遇到的难点是怎么开头。学这门课程的大多数学生，都不同程度地学过线性方程组。尽管这样，我们相信本课还是应该从 n 个未知数 n 个方程这一基本问题开始，从最简单最实

用的高斯消去法（不是行列式法！）开始。好在，这一虽是简单的方法中却包含着一些对几乎每一个学生来说都是新鲜的，属于线性代数的本质部分的东西。其中最重要的一件是消去法等价于矩阵因式分解，即等价于将系数矩阵变换为三角阵的乘积。由此可以自然地导出矩阵记号和矩阵乘法。

再一个难点是如何掌握进度。如果矩阵计算是已经熟悉了的，那么，第一章就不应该太慢，第二章是要求下功夫的章，这一章的目标是对方程$Ax=b$有透彻的、比从消去法得到的有更加深入的理解。这一章引入了A的行空间、列空间、它们的正交补和两个化零空间。这四种基本子空间的引入，对于得到线性相关和线性无关的例子，以及对于基底、维数和秩的解释都是行之有效的方式。当然这四种子空间也是理解$Ax=b$的得力工具，正交化是大家熟悉的三维空间几何向n维的自然推广。

第1～5章是线性代数课程的基本内容，这几章中有着大量的应用，这些应用涉及物理、工程、概率与统计、经济和生物等多方面（还有对甲烷分子结构和心理学上因子分析的应用，这两种应用是我的麻省理工学院同事们所绝对不讲的）。当然，本书不可能讲到矩阵的所有应用。它只是一本线性代数的入门教科书。讲到所有的应用，这也不是我们的目标，我们的目标是为应用做好准备，而且只是为应用在理论方面作好准备。

应用所需理论，本书中是齐备了。第2章讲过向量空间之后，第3章讲射影和内积，第4章讲行列式，第5章讲特征值。我们希望工程师和其他一些对应用感兴趣的读者特别地细读第5章。这一章中集中讲了对角化的应用，其中包括谱定理，只是把约当标准形分了出来，安排在附录中。前五章，每一章的最后都有一组复习题，每一章的最后一节都是机动的。讲广义逆矩阵的§3.4也是用做机动的。用来作为一个学期或半个学期课程时，第6章（正定矩阵）或第8章（线性规划）是否要讲，得由教师视具体情况而定。§8.1和§8.4分别是对线性规划和对策论的一个简短而有益的介

绍*。

作为基础线性代数教材的本书，可以从中抽出三种完全不同的教材来。一种是数值线性代数，这包括第1章的全部、第2～6章的基本内容、讲计算的第7章和讲单纯形法的§8.2。再一种是“统计线性代数”，应该细讲第3、6两章，第三种是把不等式视为方程的那些学科，如经济学方面的教材，此时应该尽快地从$Ax=b$过渡到线性规划和对偶性。

我们期望着讲授基础线性代数的同行们乐于采用本书，编写本书的根本意图也正在于此。希望他们不会因为，特别是在第1章中出现的一些计算数学用语，诸如“计算次数”等而将本书弃置不顾。从实用角度看，计算数学的这种知识无疑是重要的。即使从理论角度看，这种知识也非无足轻重。例如，对运算次数的计算可以加深对消去法过程的实际掌握，我每教本课，都在第一或第二次的课堂上正式要学生计算消去法的运算次数。关于运算次数等这样一些面对计算机的概念课堂上无需进行讨论，任何一本教科书都应该由讲义总结而成，也都应该有讲义作补充。

总之，需要一本结合应用来成功地讲授基本理论的教科书。我们努力完成的就是这样一本书。

本书的出版，多承Tom Slobko鼓励，Ursula为本书打字，我的家庭为我提供条件，谨在此一并深表谢意。谨把此书奉献给我报答不尽的双亲，他们对此书的贡献最大，感谢他们。

G.Strang

---

* 根据俄译本，又补进作者提供的网络内容——译者注。

目　　录

第一章　高斯消去法

§1.1　引　　言

线性代数的核心问题是解联立线性方程组。未知数的个数与方程的个数相等的联立方程组，是最重要的，也是最简单的，我们就从这样的联立方程组讲起。

解联立方程组，较为初等的课本中有不同的两种方法。一种是消去法：先消去第一个方程以外各方程中的第一个未知数。办法是从这以外的每一个方程中减去第一个方程的适当倍数。这样我们就得到一个$n-1$个未知数、$n-1$个方程的方程组。对新得到的变小了的方程组再应用刚才的办法。重复下去，直至得到一个未知数一个方程的方程组。它的解就立即可以写出了。用反向代入的回推方法，不难求出所有的未知数。后文内，我们举一个应用消去法的例子。另一种方法，更为理论一些，要用到行列式，得到的是精确解，是两个n阶行列式的比。称这个比为Cramer(克莱姆)规则。从一般教科书上所举的例子(人们应用Cramer规则的上限是$n=3$或$n=4$)中，看不出两种方法哪一种更好。

事实上，对数值大的n，Cramer规则不可能实际应用。而对实际中遇到的方程组，即使n够大，消去法也可以求出它的解来。消去法是一种算法，我们的第一件事是讲这个算法。一般地，称这个算法为Gauss(高斯)消去法。

Gauss消去法很是简单，读者可能已经熟悉了。但有比消去法本身更为重要的四点。本章要讲的正是消去法本身和这四点。这四点是：

(1)消去法可以解释为系数矩阵的因式分解。我们引进联立方程组的矩阵表示，即记n个未知数为向量x，记n个常数为向量

b，记全体系数为矩阵A，则联立方程组可记为$Ax=b$。在这样的表示方法之下，消去法就相当于把矩阵A分解为下三角矩阵L和上三角矩阵U的乘积LU。这是基本的，也是很有用的一点。

当然，我们将要系统地讲向量和矩阵，以及它们的乘法。还将要定义矩阵A的转置矩阵A^T和逆矩阵A^{-1}。

(2)在大多数情况下，消去法都可以原样应用，不产生任何困难就可以得到方程组的解。有两种情况例外。一种是方程在组中的次序要变动，变动之后可以得到方程组的解；另一种是方程组$Ax=b$没有唯一解。此时可以是无解，可以是有无穷多解。消去法本身可以判断出是无解，还是有无穷多解。

(3)用消去法解方程组时，对所需的算术运算次数很有必要有一个估计。在许多实际问题中，所引进的未知数的个数都是由数学模型的准确程度和运算次数共同决定的。

(4)我们还将直观地考察一下舍入误差对解x的影响是否显著。对影响显著的问题，就应设法控制舍入误差。电子计算机每次运算都把结果舍入成固定的位数。对影响显著的问题，如不适当控制舍入误差，那么经过千次，万次，甚至几万次运算，所得到的解会是完全无意义的。

本章要求读者掌握消去法，它行之有效，在实际中应用广泛。我们是借助矩阵来讲消去法的。矩阵是所讲理论的基础。我们用到了系数矩阵，消去步骤的矩阵表示，行交换的矩阵表示，以及三角矩阵因子等。

§1.2 Gauss消去法举例

我们通过例子来讲这一方法。先看一个三维方程组

$$\begin{aligned} 2u+v+w&=1\\ 4u+v&=-2\\ -2u+2v+w&=7 \end{aligned}\qquad(1)$$

我们用Gauss消去法（Gauss被认为是最伟大的数学家，当然不是因为这个可能只用了他几分钟的消去法。但幽默的是，Gauss的名字因这个方法被提到的次数却最多）来求未知数 u、v 和 w 的值。做法是从第二、三两个方程中减去第一个方程的适当倍数，使得第二、三两个方程中的 u 被消去，也即

（a）从第二个方程中减去第一个的2倍；

（b）从第三个方程中减去第一个的 -1 倍。

结果得到等价方程组

$$\begin{aligned} 2u+\ v+\ w&=\ 1 \\ -\ v-2w&=-4 \\ 3v+2w&=\ 8 \end{aligned} \tag{2}$$

第一个方程中 u 的系数2称为消去法第一步的主元素。

消去法第二步不考虑第一个方程。剩下的是含有未知数 v，w 的两个方程。对这两个方程我们照第一步再进行消去。这一步的主元是 -1。要从其余的方程中减去这第二个方程的倍数（这里其余的方程只有第三个方程一个），以消去 v。也即

（c）从第三个方程中减去第二个的 -3 倍。"正向"消去已经完成。结果得到一个化简了的方程组

$$\begin{aligned} 2u+v+\ w&=\ 1 \\ -v-2w&=-4 \\ -4w&=-4 \end{aligned} \tag{3}$$

该方程组的解法是明显的。由最后一个方程得 $w=1$；代 $w=1$ 入第二个方程得 $v=2$；代 $w=1$，$v=2$ 入第一个方程得 $u=-1$。称这个代入过程为反向代入。

上述求解过程不难推广到 n 个未知数 n 个方程的情形，n 多大都可以。第一步利用第一个方程的倍数消去第一个主元素正下方的所有系数。第二步消去第二列中第二个主元素正下方的所有系数、类推。最后得到含有一个未知数的一个方程。反向代入按反次序得到答案。即最先得到最后一个未知数。再得到倒数第二个，最后得

到第一个未知数。

练习1.2.1 用消去和反向代入解方程组

$$\begin{aligned} 2u-3v &= 3 \\ 4u-5v+w &= 7 \\ 2u-v-3w &= 5 \end{aligned}$$

写出主元素，列出从其余的行中减去一行倍数的三个运算。

练习1.2.2 解方程组

$$\begin{aligned} 2u-v &= 0 \\ -u+2v-w &= 0 \\ -v+2w-z &= 0 \\ -w+2z &= 5 \end{aligned}$$

我们问两个问题。可能是问得早了一些，这里我们是刚刚接触到这个消去法。但是对这两个问题的回答会使我们对消去法本身有更进一步的理解。第一个问题是，用消去法一定能得到方程组的解吗？在什么条件下消去法行不通？回答是，如果主元素都不为零，则方程组有唯一解，并可用正向消去和反向代入求得。遇到主元素为零，则消去法不能进行。

例如，第一个主元素为零，那就不能用第一个方程消去其它方程中的 u。别的主元素为零时，情况也类似。我们指出，即使构成主元素的系数在原方程中本来不为零，经过消去法的一步或几步之后也可能遇到为零的主元素（练习1.2.3中就是此情形）。粗略地说，不到消去法进行到最后一步，我们回答不了主元素是不是都不为零。

遇到主元素为零时，在多数情况下，经过调整，仍然可以用消去法求得方程组的唯一解。当然，方程组无解或者有无穷多解时，消去法肯定是不能进行到底的。

不能进行到底的问题，我们把它留到后面再加以分析。

第二个问题很实际，事实上它是关于算题费用的。这第二个问题是：用消去法解 n 个未知数 n 个方程的方程组，需进行多少次算

术运算？如果n很大，那就必须由计算机来完成消去法（你可以利用现成的消去法程序，或者你可以自己编一个），由于步骤是事先知道的，因而也就能够事先算出所需的机器时间。我们先不管方程组的右端部分，只对左端所需的计算次数进行估算。这里的运算有两类，一类是除法，用来确定从主元下面的方程中应减去主元所在方程的倍数（比如l倍）。在进行两个方程相减时，要做的是“先乘后减”，即先用l乘主元所在方程，再从主元下面的方程中减去乘上了l的主元所在方程。

我们约定把每一个除法和每一个“先乘后减”都叫做一次运算。第一步时，第一个方程的长度是n，每消去第一列的一个元素，要做n次运算（求倍数l一次，算出被消去元素所在行的新元素$n-1$次）。第一行下面共$n-1$行，要消去的元素是$n-1$个。因而，消去法第一步要进行$n(n-1)=n^2-n$次运算。完成了第一步，第一行第一列可以先不管。进行第二步时，方程和未知数的个数都是$n-1$。接下去每做一步方程和未知数的个数都减1，运算次数也随之减小。到剩下k个未知数k个方程时，消去主元素正下方元素所需的运算次数是$k(k-1)=k^2-k$。理由跟第一步，即$k=n$时一样。因而方程组左边部分所需的算术运算总次数为

$$P=(n^2-n)+\cdots+(k^2-k)+\cdots+(1^2-1)。$$

（注意，最后一步，即一个未知数一个方程时，不需进行计算，$1^2-1=0$）。我们来算出和数P

$$P=\sum_1^n k^2-\sum_1^n k=\frac{1}{3}n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)$$

$$-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n^3-n}{3}.$$

（可以用微积分来检验所得结果。x^2的从0到n的积分为$n^3/3$，x的从0到1的积分为$n^2/2$。恰是两个和号下结果的主项）。如果n够大，那么$P\approx n^3/3$就是运算次数的一个很好的估计量。

反向代入所需运算次数的计算要容易得多。求最后一个未知数

所需运算次数为1（用最后一个主元素去除），求倒数第二个未知数所需运算次数为2（一个先乘后减一个除）。类推，求倒数第k个未知数所需运算次数为k。因而反向代入所需总运算次数为

$$Q=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)\approx\frac{n^2}{2}$$

人们曾经认为求得的这两个数就是最好的了，即求解一般的n阶方程组所需的乘法运算的次数不可能少于$n^3/3$。不久以前，数学家们还几乎都这么猜测（甚至有定理对这一点加以证明。但这些定理只涉及某些方法）。令大家震惊的是，这个猜测被证明是错的。人们找到了一种方法，它只需要$Cn^{\log_2 7}$次运算！对消去法来说，上述常数C是大的，且所需进行的加法次数要很多，计算机程序又太复杂，因而新方法的重大意义还只是理论上的，实践上代替不了消去法。指数能否减小，人们似乎还一无所知。

练习1.2.3 试用消去法解方程组

$$\begin{aligned} u+v+w&=-2\\ 3u+3v-w&=6\\ u-v+w&=-1 \end{aligned}$$

遇到为零主元素时，请将它所在方程与下面的方程对调。然后继续进行消去。问：第三个方程中v的系数-1换为什么数，消去法将不能进行。

练习1.2.4 $n=2$时$P=2$。试列出用消去法解方程组

$$\begin{aligned} au+bv&=0\\ cu+dv&=1 \end{aligned}$$

时，对左端所进行的运算。

练习1.2.5 设解线性方程组所需运算次数为$n^3/3$，计算机的速度为每秒一百万次，收费标准为每小时1000元。试问化1元钱可以解多大的方程组，化1000元可以解多大的方程组？

练习1.2.6（非必做题） 两个复数相乘，通常是

$$(a+ib)(c+id)=(ac-bd)+i(bc+ad)$$