硕士研究生入学考试指南

丁大公 编

捕捉考研最新动态
适应考研最新大纲
配合考研最新试卷

数学

$y'=\frac{1}{2}(x+2)$

$ax+dx=(2x+1)xdx$

$ax+dx=(2x+1)xdx$

$ax+dx=(2x+1)xdx$

上海交通大学出版社

硕士研究生入学考试指南

数　　学

丁大公　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是根据全国硕士研究生入学考试高等数学考试要求编写的.

本书通过对各种典型题型的解释,介绍各种解题思路、方法和运算技巧,帮助读者拓宽解题思路,掌握解题的技巧,提高分析解决问题的能力,从而提高考生研究生入学考试的成绩.

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试指南．数学/丁大公编．—上海:上海交通大学出版社,2002
ISBN 7-313-03102-5

Ⅰ．硕…　Ⅱ．丁…　Ⅲ．高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料　Ⅳ．G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 045416 号

硕士研究生入学考试指南
数 学
丁大公　编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030)
电话:64071208　出版人:张天蔚
上海交通大学印刷厂印刷　全国新华书店经销
开本:787mm×1092mm 1/16　印张:27.25　字数:673 千字
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷
印数:1～1500
ISBN 7-313-03102-5/G·493　**定价:32.00 元**

前　言

近年来，我国的研究生教育规模迅速增长，已经连续两年全国硕士研究生的招生名额增长率都接近30%。尽管今后的一两年的增长率也许会有所回落，但是增长的趋势依然。研究生扩招与报考研究生的人员增长紧密相连，已经说不清孰因孰果。2002年的硕士研究生招生人数突破16万。研究生招生规模的扩大不但带动了经济发展，而且直接提高了国民的总体文化水平，对中国在进入WTO后国际竞争力的增长有着决定性的作用。

近几年研究生入学考试情况说明，专业课的考试成绩较好，公共课的成绩相对较差。每年都有大批考生在公共课上失分，从而失去了入学资格。究其原因主要是由于公共课学得较早，到参加考试时已经有些忘记了；而专业课学得晚，同时专业相互联系较多，从而应用机会也比较多，记忆更清晰些；再者，研究生入学考试的公共课由教育部统一命题，学生的盲目性较大，不像专业课由本校老师命题，学生可找老师咨询、答疑。

鉴此，我们组织了一批有指导考研经验的教师编写了这套考研复习丛书，这套丛书的编写目的在于帮助考生熟悉考试题型，提高考生的答题能力，在考试中夺取高分。教育部最近颁布了考研的新大纲，大纲表明，从2003年起，考试会有很大的变化，专业课考专业基础知识，科目由2门减少到1门，而且强调考题的基础性和综合性。数学、英语和政治等公共课的考试内容和题型都有所变化，题目量有所增加。这套丛书是根据教育部颁布的最新考试大纲编写的，旨在使学生适应新大纲的第一次考试，考出好成绩来。

这本数学由华东师范大学丁大公教授主编。

数学课程是全国工学、经济学、管理学等门类各学科专业硕士研究生入学考试必考课目。数学考试在考核学生对数学基本概念和基本方法的理解和对数学基本方法掌握的同时，注重考核学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力和综合运用所学的数学知识分析问题、解决问题的能力。

与往年相比，2003年的数学考题，不仅在内容上有所调整，且卷面分数也从100分调整为150分。因此考场的时间将更显得紧张。考生需要进一步熟悉大纲规定的知识，熟练地应用这些知识答题。针对考试，本书内容主要分成两部分，一部分是习题讲解和知识性练习，考生只要跟随习题讲解，掌握知识点，再通过练习能应用知识，那么就能掌握这部分知识，就不会成为考试的困难；第二部分是模拟考题，这些模拟考题都是教师在指导考研复习中所用的，是根据新大纲编写的，提供考生作综合训练。考生可以通过这些模拟考卷来热身，适应新大纲的考试。

本书按新大纲明确标志数学一、数学二、数学三、数学四对知识的不同要求。所讲的例题紧扣大纲，不追求难题、偏题，融入作者多年考研辅导的经验，是一本与实战考试最接近的考研辅导书。

上海交通大学　韩正之

2002.8

目　录

第一部分　例题解评与练习

第一部分

例题解评与练习

1 一元函数微积分

1.1 函数、极限、连续

1.1.1 例题解评

1. 设 $f(x)$满足方程 $2f(x)-f(1-x)=x^2-1, x\in(-\infty,+\infty)$，求 $f(x)$.

解 令 $1-x=t$ 得 $2f(1-t)-f(t)=(1-t)^2-1$，即

$$2f(1-x)-f(x)=(1-x)^2-1.$$

解方程组 $\begin{cases}2f(x)-f(1-x)=x^2-1\\2f(1-x)-f(x)=(1-x)^2-1\end{cases}$，得

$$f(x)=\frac{1}{3}(3x^2-2x-2),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

评注 函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，即 $f(x)=f(t)=f(u)=\cdots$. 因此通过变量替换再利用这个特性，是求 $f(x)$表达式很有用的方法.

2. 判别下列函数的奇偶性

(1) $F(x)=f(|\sin x|-1)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x-\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\mathrm{sgn}(\sin x)$.

(2) $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为偶函数.

解 (1) $f(|\sin x|-1)=f[|\sin(-x)|-1]$，故它是偶函数；而 a^x-a^{-x}为奇函数，a^x+a^{-x}是偶函数，$\mathrm{sgn}(\sin x)$是奇函数，故$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}\mathrm{sgn}(\sin x)$是偶函数. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 为常数，故也是偶函数. 因此 $F(x)$是三个偶函数之代数和，所以是偶函数.

(2) $F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t\xlongequal{令 t=-u}\int_0^x f(-u)\mathrm{d}(-u)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=-F(x)$，故 $F(x)$ 为奇函数.

评注 判别函数奇偶性的方法，主要是根据函数奇偶性的定义及利用奇偶函数的性质. 若 $f(x)$的定义域关于原点不对称，则 $f(x)$一定不是奇函数或偶函数. 由(2)的解法可知，奇函数的一切原函数都是偶函数. 但要注意，偶函数的原函数不一定是奇函数. 因奇函数在"O"点的值为零，故偶函数只有一个原函数是奇函数.

3. 设函数 $y=f(x), x\in(-\infty,+\infty)$的图形与 $x=a, x=b$ 均对称($a<b$). 求证，$y=f(x)$是周期函数，并求其周期.

证 由题设 $f(a+x)=f(a-x), f(b+x)=f(b-x)$，所以 $f(x)=f[a+(x-a)]=f[a-(x-a)]=f(2a-x)=f[b+(2a-x-b)]=f[b-(2a-x-b)]=f[x+2(b-a)]$；则 $f(x)$是周期函数，其周期为 $2(b-a)$.

评注 判定函数是否为周期函数，主要根据定义，有时也用其运算性质.

4. 设 $f(x)$为可微的周期函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$. 证明 $f(x)$是常数.

证 设 T 为 $f(x)$周期，则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

所以 T 也是 $f'(x)$的周期；又因为 $f'(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f'(x+nT)=\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A$，$f(x)=Ax+B$. 所以 $f(x)$是周期函数，则 $A=0$，$f(x)=B$ 是常数.

评注 可微周期函数的导函数是周期函数. 常数是没有最小正周期的周期函数.

5. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)$单调增加. 证明 $F(x)=\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，在$(a,b)$内单调增加.

证 $F'(x)=-\dfrac{1}{(x-a)^2}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{f(x)}{x-a}$，因为 $f(x)$ 单调增加. 所以 $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x)(x-a)$，$F'(x)\geqslant\dfrac{f(x)}{x-a}-\dfrac{1}{(x-a)^2}\cdot f(x)(x-a)=0$，则 $F(x)$ 在(a,b) 内单调增加.

评注 判断函数单调性，若不知其是否可导，则用定义来判断；若知其可导，则用导数来判断较为简便.

6. 求证 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界.

证 $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x t\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

同理 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$.

所以当 $x\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$时，$f(x)$有界；又 $f(x)$在$[-M,M]$上连续，则 $f(x)$在$[-M,M]$上有界，故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

评注 证明或判别函数有界一般可利用：(1)有界性定义，(2)闭区间上连续函数的有界性，(3)有极限数列必有界，(4)$x\to x_0$($x\to\infty$)时，有极限的函数 $f(x)$在 x_0 的邻域中[$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$中]必有界.

7. 求下列函数的反函数

(1) $y=\dfrac{10^x+10^{-x}}{10^x-10^{-x}}+1,\quad x\neq 0.$

(2) $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x<0\\ \ln x, & 0<x\leqslant 1.\\ 2\mathrm{e}^{x-1}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$

解 (1) $y(10^x-10^{-x})=10^x+10^{-x}+10^x-10^{-x}=2\cdot 10^x$，$y(10^{2x}-1)=2\cdot 10^{2x}$，$(y-2)10^{2x}=y$，解得 $x=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{y}{y-2}$，故所求反函数为 $y=\dfrac{1}{2}\lg\dfrac{x}{x-2}$.

(2) 当$-1\leqslant x<0$ 时，由 $y=x^2$ 可得 $x=-\sqrt{y}$，$y\in(0,1]$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，由 $y=\ln x$ 可得 $x=\mathrm{e}^y$，$y\in(-\infty,0)$；当 $1<x\leqslant 2$ 时，由 $y=2\mathrm{e}^{x-1}$可得 $x=1+\ln\dfrac{y}{2}$，$y\in(2,2\mathrm{e}]$，故所求反函数

为

$$y=\begin{cases}e^x, & -\infty<x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1\\ 1+\ln\dfrac{x}{2}, & 2<x\leqslant 2e\end{cases}.$$

评注 求反函数一般先从方程 $y=f(x)$ 中解出 x,然后再将所得结果中 x 与 y 互换位置即可.对分段函数,只要分段求出反函数便可.但要注意不要把例 7(2)中的反函数写成 $y=e^x(-\infty<x\leqslant 0)$,$y=-\sqrt{x}(0<x\leqslant 1)$和 $y=1+\ln\dfrac{x}{2}(2<x\leqslant 2e)$,这样容易误解为三个反函数.

8. 求下列复合函数

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,求 $f[f(x)]$.

(2) 设 $f(x)=e^x$,$g(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$,求 $f[g(x)]$和 $g[f(x)]$.

解 (1) 易见$|f(x)|\leqslant 1$,故 $f[f(x)]=1$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) $f[g(x)]=\begin{cases}e, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1\end{cases}$;

$$g[f(x)]=g(e^x)=\begin{cases}1, & e^x<1\\ 0, & e^x=1\\ -1, & e^x>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0.\\ -1, & x>0\end{cases}$$

评注 对分段函数求复合函数的关键是对内层函数确定区间段,使得它的值域属于外层函数的某段定义域中.

9. 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f\cdots f(x)\cdots)}_{n\text{次}}$,若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,$x\in(-1,1)$,求 $f_n(x)$.

解 $f_2(x)=f[f(x)]=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x^2}}$,$x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

设 $f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}$,$x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{k}},\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$,则

$$f_{k+1}(x)=f[f_k(x)]=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1-kx^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1-kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1-(k+1)x^2}},x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{k+1}},\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

故由归纳法可得:$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-nx^2}}$,$x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{n}},\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

评注 将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来替代，是求复合函数最基本的方法. n 次复合就要进行 n 次替代，一般是先进行 2,3 次复合后再找出其规律.

10. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

解 方法 1 因为 $\dfrac{x^2}{x+1}=x-1+\dfrac{1}{1+x}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-a)x-(b+1)+\dfrac{1}{1+x}\right]=0$，故 $a=1,b=-1$.

方法 2 $\dfrac{x^2}{x+1}=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-1}=x\left[1-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]=x-1+o(1)$，故 $a=1,b=-1$.

方法 3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{x+1}\right]'=1$，故 $a=1$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-x+b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-x}{x+1}+b\right)=0,b=-1$.

方法 4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x+1}\cdot\dfrac{1}{x}=1$，故 $a=1$，代入原式后可知 $b=-1$.

评注 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-b]=0$ 表明 $y=ax+b$ 是 $f(x)$ 的渐近线. 一般教材用方法 4 求渐近线，其他用初等变形的方法、泰勒公式及求导的方法都可解决这个问题.

11. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

解 (1) 因为 $\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\left[\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^2\right]^{\frac{x}{2}}=\left[1+\sin\dfrac{2}{x}\right]^{\frac{x}{2}}$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}\cdot\frac{x\sin\frac{2}{x}}{2}}\right]=\mathrm{e}.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{(n+1)n}{n^2}}=\mathrm{e}$.

评注 利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，一般先在括号内凑一个 1 加一个无穷小量，再在指数上凑这个完全相同的无穷小的倒数.

12. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{200}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1+t^2)^2\mathrm{d}t}{x(\arcsin x)^4}$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\arctan x}{\mathrm{e}^x+x}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{4x\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{4\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\cdot$

$\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$(先提取非零因子)$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x}{x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}=-\dfrac{1}{4}$.

(2) 原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(3\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

因为有界变量乘无穷小量为无穷小量，故 $\lim\limits_{x\to0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$，则原式 $=\dfrac{3}{2}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}(\mathrm{e}^x-\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x+\sin x}{1}=1$.

(4) 原式 $\xlongequal{令\ u=\frac{1}{x^2}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^{100}}{\mathrm{e}^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{100u^{99}}{\mathrm{e}^u}=\cdots=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{100!}{\mathrm{e}^u}=0$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x(\mathrm{e}^{t^2}-1+t^2)^2\mathrm{d}t}{x^5}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2)^2}{5x^4}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2(\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2)(2x\mathrm{e}^{x^2}+2x)}{20x^3}=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1+x^2}{x^2}$

$=\dfrac{2}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}+2x}{2x}=\dfrac{4}{5}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-3x}}{3\mathrm{e}^{-x}+2}=\dfrac{1}{2}$.

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{x^2}+2x^2\mathrm{e}^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\arctan x}{\mathrm{e}^x+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\arctan x}{1+\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}}=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\arctan x}{\mathrm{e}^x+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x-\arctan x}{\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^x+1}=\dfrac{\pi}{2}$.

故原式极限不存在.

评注 求"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型极限常用方法为：① 通过恒等变形约去分子、分母中极限为零或 ∞ 的因子，然后再用极限运算法则或连续函数极限的求法求解；② 用洛必达法则；③ 用泰勒公式或等价无穷小代换；④ 变量替换，用无穷小代换要注意：乘除可用等价无穷小代换，加减运算最好不用等价无穷小代换，因为掌握不好"度"易出错. 常用的等价无穷小为：当 $x\to0$ 时，$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\mathrm{e}^x-1\sim\ln(1+x)$，$(1+x)^2-1\sim2x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$. 做题时看到未定式不要急于用洛必达法则，应先看清其特点，本例(4)，(6)若用洛必达法则将越做越繁. 运算时要注意及时将非零因子提取出去，以简化运算. 本例(1)，(2)，(3)，(5)都有这种

情况.变量替换时,注意将原变量极限过程改换成相应的新变量极限过程.求 $x\to\infty$ 时极限要分别求 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 的极限.两者存在且相等才算极限存在,本例子说明了这个问题,但在求数列极限时 $n\to\infty$ 就是 $n\to+\infty$(一般不写 $n\to+\infty$).

13. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right)$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.　　(4) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x)^{\tan x}$.　　(6) $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}$.　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}$,其中 $a_1>a_2>\cdots>a_n>1$.

解 (1) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sec x\sec x\tan x}{6x}=\frac{1}{3}.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{1+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(1+x)^2+x^2}=\frac{1}{2}.$$

(3) $$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\text{令 }x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to0}\frac{\ln(\sin2t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2\cos2t-\sin t}{\sin2t+\cos t}=2.$$
故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=e^2$.

(4) $$\lim_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\lim_{x\to0^+}\exp\left(\frac{\pi}{x}\ln\cos\sqrt{x}\right)=\exp\left(\pi\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}\right)$$
$$=\exp\left[\pi\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]=e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

(5) $$\lim_{x\to0}(\arcsin x)^{\tan x}=\lim_{x\to0}e^{\tan x\cdot\ln\arcsin x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln\arcsin x}{x^{-1}}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{x^{-2}}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=e^0=1.$$

(6) 因为 $$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{\tan\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2\tan\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}=\frac{1}{2},$$ 所以 $\lim\limits_{x\to0^+}(\tan x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\frac{1}{2}}$.

(7) $$\lim_{x\to0}(\cot x)^{\sin x}=\exp\lim_{x\to0}(\sin x\cdot\ln\cot x)=\exp\lim_{x\to0}\frac{\ln\cot x}{\csc x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{\cot x}\cdot(-\csc^2x)}{-\csc x\cdot\cot x}$$
$$=\exp\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{\sin x}=\exp\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=e^0=1.$$

(8) 方法 1　因为 $a_1>a_2>\cdots>a_n>1$,所以当 $x>0$ 时,有 $a_1=(a_1^x)^{\frac{1}{x}}<(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}<(na_1^x)^{\frac{1}{x}}=n^{\frac{1}{x}}a_1$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}n^{\frac{1}{x}}a_1=n^0a_1=a_1$,由夹逼定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a_1^x+\cdots+a_n^x)^{\frac{1}{x}}=a_1$.

方法 2　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}a_1\left[1+\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^x+\cdots+\left(\dfrac{a_n}{a_1}\right)^x\right]^{\frac{1}{x}}=a_1\cdot 1^0=a_1$.

评注　求"$\infty-\infty$","$0\cdot\infty$","1^∞","0^0","∞^0"型未定式的极限,往往先通过变形,将其化成"$\dfrac{0}{0}$"或"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式(或 e 的指数上的 $\dfrac{0}{0}$,$\dfrac{\infty}{\infty}$ 未定式),然后根据"$\dfrac{0}{0}$","$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式求极限的方法求其极限. 本例(8)是"∞^0"型,可先化为"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型未定式来求其极限. 但本例给出的两种解法是利用函数特点用其他方法来求解的.

14. 求下列各极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解　(1) 方法 1　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)+\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}-\dfrac{k}{n^2}\right)\right]=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{-kn-k^2}{n^2(n^2+n+k)}$,而 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{kn+k^2}{n^2(n^2+n+k)}\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}}{n^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{n^2}=\dfrac{2}{n}\to 0$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\right)=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$.

方法 2　因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+1)^2}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2+n+k}\right)=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$

$\frac{2}{\pi}$.

评注 求"无限个无穷小之和"的极限常用方法有:① 通过恒等变形化为可用极限四则运算法则的情形;② 利用幂级数求和法;③ 利用定积分定义;④ 利用夹逼定理.若数列的每一项可提出一个因子$\frac{1}{n}$,使得所求极限为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$形式,则利用定积分定义.否则可考虑用夹逼定理解题.本例(3)因不便于直接写成积分和,故先作适当的放缩,然后再利用定积分定义和夹逼定理.

15. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$.

解 (1) 因$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$,又$\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$,$\prod\limits_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{3}$.则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}=\frac{2}{3}.$$

(2) $x\neq0$ 时,原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}\Big/\sin\frac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=1$,$x=0$时原式显然也为1.

(3) 取对数得$\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$,

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)=\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2}=\ln2-2\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln2-2+\frac{\pi}{2}$.

故原式$=\exp\ln2-2+\frac{\pi}{2}=2\exp\frac{\pi-4}{2}$.

评注 n项乘积的极限求法通常为:① 通过恒等变形化为可用极限四则运算法则的情形;② 取对数后变成n项和的形式,然后利用n项和极限的方法来求解.

16. 求下列各极限中的参数

(1) 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\int_{-\infty}^{a}t\,\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$,求$a$的值.

(2) 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=2$,求$a,b$的值.

(3) 已知$\lim\limits_{x\to0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq0)$,求$a,b,c$的值.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$.

$$\int_{-\infty}^{a}te^{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}t\mathrm{d}e^{2t}=\frac{1}{2}te^{2t}\Big|_{-\infty}^{a}-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{a}e^{2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}ae^{2a}-\frac{1}{4}e^{2a}.$$

$e^{2a}=\dfrac{1}{2}ae^{2a}-\dfrac{1}{4}e^{2a}$；故 $a=\dfrac{5}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{ax^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(3-\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)=2$. 所以 $3-\sqrt{a}=0$，即 $a=9$，代入原式：$\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+bx+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-bx-1}{3x+\sqrt{9x^2+bx+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-b-\dfrac{1}{x}}{3+\sqrt{9+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{b}{6}=2$，

故 $b=-12$.

(3) 当 $x\to0$ 时 $ax-\sin x\to0$，且 $c\neq0$，所以 $\int_{b}^{x}\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t\to0$，故 $b=0$. 又因为

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_{0}^{x}\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-\cos x}{x^2}=c(c\neq0)$，所以 $a=1, c=\dfrac{1}{2}$.

评注 求极限式中的常数值时，要以极限存在为前提条件，一般可利用等价无穷小和洛必达法则等方法来求解. 本例(3)因分子趋于0，且有非0极限，故必为“$\dfrac{0}{0}$”型极限. 若求极限的函数中有积分上限函数，则必须利用洛必达法则.

17. 证明下列递归数列的极限

(1) 设 $a>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $\begin{cases}a_0>0\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right), & n=0,1,2,\cdots\end{cases}$，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{a}$.

(2) 设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少，且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在.

证 (1) $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{a}{a_n}}=\sqrt{a}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)-a_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a_n}-a_n\right)=\dfrac{1}{2a_n}(a-a_n^2)\leqslant0$ $(n\geqslant1)$.

故 $\{a_n\}$ 单调下降 $(n\geqslant1)$，且有下界 $\min\{a_0,\sqrt{a}\}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

递归方程的极限方程为 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$，解之取正根得 $A=\sqrt{a}$.

(2) 由题设 $f(k+1)\leqslant\int_{k}^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k)$ $(k=1,2,\cdots)$，所以 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_{1}^{n}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\sum\limits_{k=1}^{n-1}\int_{k}^{k+1}f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_{k}^{k+1}f(x)\mathrm{d}x\right]+f(n)\geqslant0$. 则 $\{a_n\}$ 有下界.

又 $a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_{n}^{n+1}f(x)\mathrm{d}x\leqslant0$. 所以 $\{a_n\}$ 单调下降，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.