

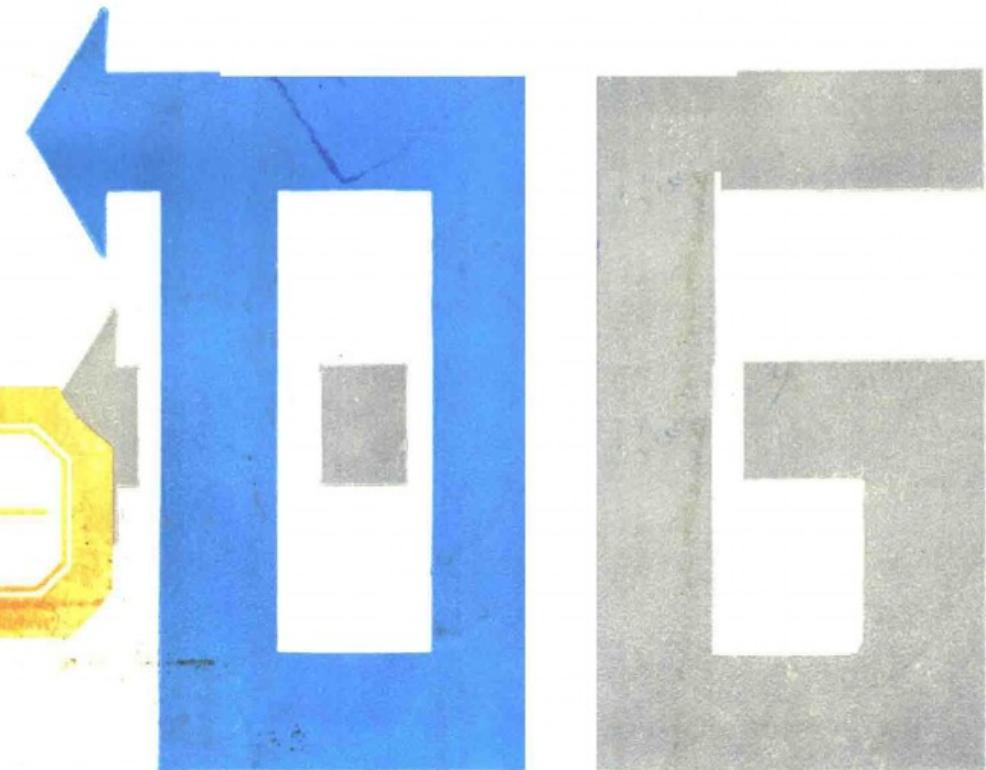
高等学校教材

电工理论基础

中 册

(电路瞬态、磁路及离散系统分析)

周克定 张文灿 主编



高 等 教 育 出 版 社

高等学校教材

电工理论基础

中 册

(电路瞬态、磁路及离散系统分析)

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是为宽口径、强弱电结合的电气技术类专业编写的教材，内容符合国家教委工科电工课程教学基本要求，该书体系结构合理，注重物理概念的阐述，例题习题难易适度，有助于对基本概念、定律的理解，书后配有部分习题答案。

本书中册为磁路瞬态、磁路及离散系统分析，共分六章，内容为：动态电路的时域分析；动态电路的复频域分析，状态变量法，非线性电路，磁路和有铁心线圈的交流电路、离散系统分析。

本书可供高等工业学校电气技术专业及相近专业师生使用，也可供科技人员参考。

高等学校教材

电工理论基础

中 册

(电路瞬态、磁路及离散系统分析)

周克定 张文灿 主编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国农业出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.5 字数 205 000

1994年6月第1版 1994年6月第1次印刷

印数 00 001—1 285

ISBN 7-04-004790-X/TM·232

定价 3.90 元

目 录

第九章 动态电路的时域分析	1
§9-1 电路的过渡过程和初始值的确定	1
§9-2 一阶电路的零输入响应	10
§9-3 一阶电路的零状态响应和阶跃响应	18
§9-4 一阶电路的全响应 三要素法	24
§9-5 当输入为 $U_m \sin \omega t$ 和 $\delta(t)$ 函数时, 一阶电路的响应	28
§9-6 二阶电路的零输入响应	36
§9-7 二阶电路的零状态响应和全响应	42
§9-8 任意激励下的零状态响应——卷积积分	47
习题	49
第十章 动态电路的复频域分析	58
§10-1 拉普拉斯变换的数学基础	58
§10-2 用部分分式法进行拉普拉斯反变换	66
§10-3 基尔霍夫定律和 R, L, C 元件电压-电流关系的 复频域形式	73
§10-4 复频域阻抗和复频域导纳	78
§10-5 应用拉普拉斯变换分析线性电路	80
§10-6 网络函数	83
§10-7 网络函数的零、极点及其分布	87
§10-8 傅里叶变换	90
*§10-9 电路综合的概念	95
习题	97
第十一章 状态变量法	101
§11-1 状态和状态变量	101
§11-2 状态方程和输出方程	104
§11-3 状态方程的列写	108

§11-4 状态方程的解法	112
习题	124
第十二章 非线性电路	127
§12-1 非线性电路元件及其特性和应用	127
§12-2 非线性直流电路的图解法	135
§12-3 非线性电路方程的列写	138
§12-4 非线性电阻电路的小信号分析法和折线法	142
*§12-5 相平面法分析非线性二阶自治网络	148
习题	156
第十三章 磁路和有铁心线圈的交流电路	159
§13-1 磁路的概念和铁磁材料的磁特性	159
§13-2 磁路的基本定律	165
§13-3 磁路计算方法	169
§13-4 永磁体和有永久磁铁的磁路	174
§13-5 磁饱和与磁滞对电压、电流及磁通波形的影响	177
§13-6 铁心中的功率损耗	181
§13-7 有铁心线圈的交流电路	186
习题	191
第十四章 离散系统分析	196
§14-1 离散时间信号	197
§14-2 离散时间系统和差分方程	208
§14-3 离散系统的时域分析法——经典法	210
§14-4 零输入响应和零状态响应	216
§14-5 卷积和	222
§14-6 z 变换的定义	224
§14-7 z 变换的收敛域	227
§14-8 一些重要序列的 z 变换	231
§14-9 z 变换的性质	234
§14-10 z 反变换	239

§14-11 离散时间系统的 z 域分析.....	243
§14-12 离散系统的系统函数(网络函数)	246
§14-13 抽样定理	251
习题	255
部分习题答案	260

第九章 动态电路的时域分析

本章讨论含有电感和(或)电容等储能元件的动态电路的时域分析。描述这类电路的方程是微分方程。对于只含有一个储能元件或经简化后只含一个储能元件的电路，它的微分方程是一阶的，故称为一阶电路。本章分析动态电路的初始条件，一阶电路的零输入响应、零状态响应、自由分量、强制分量以及阶跃响应、冲激响应等重要内容。

本章还介绍二阶电路的零输入响应、零状态响应和全响应，主要研究这种电路在过阻尼、欠阻尼和临界状态下的电压-电流关系和能量转换情况。

根据对微分方程求解方法的不同，分析过渡过程有三种方法。本章的分析方法是以时间 t 作为自变量，直接求解微分方程的方法，称为时域分析或称经典法。下章将讨论复频域分析或称运算法，这是一种应用某种积分变换来求解微分方程的方法。第十一章将讨论状态变量法。经典法物理概念清晰，但分析复杂电路的过渡过程时不如复频域分析法简便。

§ 9-1 电路的过渡过程和初始值的确定

一、电路的过渡过程

从第三章已知储能元件 L 和 C 的电压-电流关系是微分关系，存在微分关系的元件又称为动态元件，含有动态元件的电路称为动态电路，描述动态电路的数学模型是微分方程。这种电路的

响应不仅与外加激励有关，还与电路的动态元件及其经历的历史有关。即使在直流电源激励下，电压和电流也是一个随时间变化的函数，只有达到稳定状态后，才建立直流响应。这说明，接通电路后，将有一个从一个稳态到另一个稳态的运动过程，这一运动过程就称为过渡过程或瞬变过程，也称为暂态过程^①。

一个动态电路，如 RC 串联电路，接通直流电压，电容电压不可能马上达到外加电压值，中间有一个充电的过渡过程。过渡现象不仅存在于动态电路，也广泛存在于其他物理系统，如热学系统、力学系统等。譬如火车必须经过一段起动的过渡过程，才能达到稳定速度；冷水必须经过不断加热，才能达到 100°C 的稳定温度。

一个电路是否有过渡过程，首先要看电路有无换路（产生过渡过程的外因），所谓换路是电路的接通、断开、短路、换接、电源或电路参数突然变动的通称。但是有些电路如纯电阻电路，即使有换路，也不会出现过渡过程，因此还要看电路有无储能元件，储能元件的存在，是产生过渡过程的必要条件（产生过渡过程的内因），但不是充分条件。譬如一个电压为 U 的电容，接到一个电压也为 U 的激励源，就不产生过渡过程，这是因为电路接通时，电容中的能量和稳态下电容应有的能量完全一致，所以产生过渡过程的充分条件是接通电路时，储能元件的能量储存与稳态时的能量储存不一致。一般而言，很难满足这种一致性，所以动态电路换路后，中间的过渡过程是必然存在的。

过渡过程的时间虽然短暂（往往只是几秒或几微秒），但却会出现稳定状态中一般不出现的特殊现象。一些电子电路、自动控

① 只有在周期（包括直流和正弦等）电源作用下，线性电路才会建立稳定状态。当电路由非周期电源激励时，不会出现稳态，而只有某种变化的过程。电路中稳态的建立过程或状态变化的过程，即称为瞬态或过渡过程。

制电路和电子计算机电路等，它们的工作状况经常处于过渡过程之中。研究这些电路的电压、电流变化规律，据以正确设计，使它们按预定要求动作，以达到预期的效果。另外，在过渡过程中，还可能出现比正常稳定状态大出许多倍的电压和电流（过电压和过电流），如果事先没有预防措施，可能造成电气设备和机械设备的损坏，因此，研究过渡过程的重要性，决不亚于稳定状态的研究。

二、换路定律和初始值的确定

电路发生换路后，首先遇到的问题是电压、电流初始值的确定。通常把换路瞬间作为计算时间的起点，即认为换路是在 $t = 0$ 瞬间完成的。为了区分换路前后瞬间的原始值和初始值，用 $t = 0_-$ 表示换路前瞬时，它是 t 由负值趋于零的极限； $t = 0_+$ 表示换路后瞬时，它是 t 由正值趋于零的极限， $t = 0_-$ 和 $t = 0_+$ 之间的时间间隔趋于零。当电感电压为有限值（有界）和电容电流为有限值时，在 $t = 0_-$ 到 $t = 0_+$ 时间内，电感电流（或磁链）不能跳变，电容电压（或电荷）也不能跳变，即有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-), \Psi(0_+) = \Psi(0_-) \quad (9-1)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-), q(0_+) = q(0_-) \quad (9-2)$$

通常把电感电流不能跳变和电容电压不能跳变称为换路定律，就是说，在换路瞬间，电感中电流的初始值等于其原始值，电容电压的初始值等于其原始值。至于电感电压和电容电流以及电阻的电压和电流都是可以跳变的，就是说 $t = 0_+$ 的初始值可以不等于 $t = 0_-$ 时的原始值。

为什么电感电流和电容电压不能跳变呢？前边已谈过，电感和电容中的能量转移需要时间。功率 $p = \frac{dW}{dt}$ ， W 为能量，能量的跳变，意味着功率为无限大，这在实际中是不可能的。磁场能量与

电感电流的平方或磁链的平方成正比；电场能量与电容电压的平方或电荷的平方成正比，能量的不能跳变，必然导致式(9-1)、(9-2)的数学关系。而电感电压、电容电流或电阻的电压、电流跳变并不会引起电感和电容能量的跳变。这些能够跳变的电压、电流初始值，可以根据换路后的电路和电容电压、电感电流初始值以及 $t=0_+$ 时的电路的外加激励源，应用KCL和KVL以及元件的电压-电流关系(元件特性)求出。

从高等数学知道， n 阶常系数线性微分方程通解中的积分常数需由初始条件确定。描述动态电路的 n 阶微分方程的初始条件，是指方程中输出变量的初始值及1阶至 $(n-1)$ 阶导数的初始值，亦即 $t=0_+$ 瞬间的量值。如果在 $t=0_-$ 时，各电容电压和电感电流均为零，则称为零原始状态，简称零状态。这种仅由外加激励源产生的电压、电流响应，称为零状态响应，而对于外加激励(输入)为零，仅由动态元件的初始储能(表现为初始值电压或电流)产生的响应，称为零输入响应。如果同时有外加激励和动态元件初始储能，所得到的响应称为全响应。

下面举例说明初始值的求法。

例1 图9-1所示为 RLC 串联电路，求开关S合上瞬间电路的电流 $i(0_+)$ 及各元件上的电压 $u_c(0_+)$ ， $u_L(0_+)$ 和 $u_R(0_+)$ ，设电容原已充电至电压 U_0 。

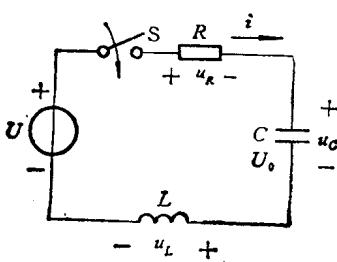


图9-1

解：开关S闭合前， $u_C(0_-)=U_0$ ，S闭合后，根据换路定律有 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0$ ， $i(0_+)=i(0_-)=0$ 。应用KVL于S闭合后的电路，得

$$\begin{aligned} U &= u_R(0_+) + u_L(0_+) + u_C(0_+) \\ &= R i(0_+) + u_L(0_+) + u_C(0_+) \end{aligned}$$

$$= 0 + u_L(0_+) + U_o$$

$$\text{故 } u_L(0_+) = U - U_o; \quad u_R(0_+) = 0$$

全部非导数值被确定。

例 2 如图 9-2(a)所示, S 闭合前, 电路处于稳态, 求 S 闭合后瞬间各个电压、电流的初始值。

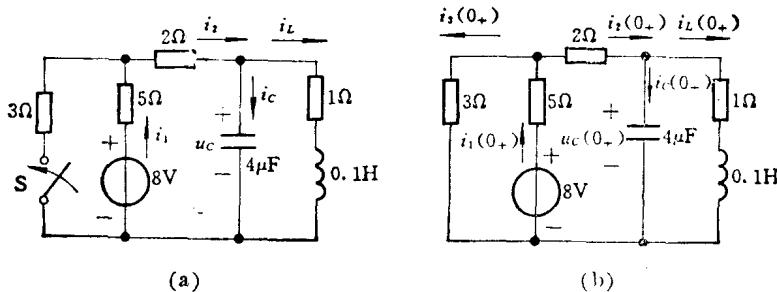


图 9-2

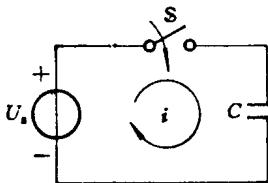
解: S 闭合前, 电路处于直流稳态, 电容相当于开路, 电感相当于短路, 故电容电压和电感电流的原始值分别为 $i_1(0_-) = i_2(0_-) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}$, $u_C(0_-) = 1 \text{ V}$ 。开关 S 闭合瞬间的电路如图 9-2(b)所示, 根据换路定律有 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 1 \text{ V}$, $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1 \text{ A}$ 。由图(b), 应用 KCL 和 KVL, 列出方程为

$$\begin{cases} 5i_1(0_+) + 3i_3(0_+) = 8 \text{ V} \\ 5i_1(0_+) + 2i_2(0_+) + u_C(0_+) = 8 \text{ V} \\ -i_1(0_+) + i_2(0_+) + i_3(0_+) = 0 \end{cases}$$

联立求解, 得初始值电流 $i_1(0_+) = 1.19 \text{ A}$, $i_2(0_+) = 0.52 \text{ A}$, $i_3(0_+) = 0.68 \text{ A}$ 。然后可以求得 3Ω 、 5Ω 、 2Ω 和 1Ω 上的电压初始值分别为 2.04 V 、 5.95 V 、 1.04 V 和 1 V 。至于电感上的电压初始值, 由 $u_C(0_+)$ 及 1Ω 上的电压初始值确定为 0 V ; 电容中的电流初始值为 $i_2(0_+) - i_L(0_+) = 0.52 \text{ A} - 1 \text{ A} = -0.48 \text{ A}$, 至此, 全部电压电流初始值被确定。

三、电容电压和电感电流初始值有跳变的分析

对于理想化的电路模型，电容电压和电感电流的初始值可以



发生跳变，某些电路很接近这种理想化情况。例如一个电容接于直流电压 U_s ，若电路电阻很小，忽略不计，如图 9-3 所示。设电容原未充电，即 $u_c(0_-) = 0$ ，则开关 S 闭合瞬间，应有

图 9-3

$$u_c(0_+) = U_s$$

电容电压发生跳变，电容上的电荷也由 $q(0_-) = 0$ 跳变到 $q(0_+) = CU_s$ ，电容中的电流 $i \rightarrow \infty$ ；而在 $t > 0$ 时间，电荷保持为 CU_s ，所以电流又变为零。若用单位阶跃函数 $\varepsilon(t)$ 和单位冲激函数 $\delta(t)$ 表示上述关系，则为

$$u_c = U_s \varepsilon(t)$$

$$i = C \frac{du_c}{dt} = CU_s \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = CU_s \cdot \delta(t)$$

因为电路中没有电阻，接通瞬间电流的大小不受限制，瞬时电流出现无限大是可以理解的。

由以上讨论看到，当有冲激电流强迫作用于电容时，电容电压初始值 $u_c(0_+)$ 将发生跳变。如果换路后出现由纯电容组成的回路或由纯电容及电压源组成的回路，在换路时，由于电流不受限制，将出现冲激电流，从而回路内的电容电压可以跳变，但电压跳变的规律应遵守电荷守恒原理，或者说，在节点上应遵守

$$\sum q(0_+) = \sum q(0_-) \text{ 或 } \sum Cu_c(0_+) = \sum Cu_c(0_-) \quad (9-3)$$

即节点电荷守恒。电容电压跳变后的初始值 $u_c(0_+)$ ，可通过节点电荷守恒原理进行计算，也可以通过换路瞬间电容中的冲激电流进行计算。参见下面例 3。

如果换路后的电路中出现了全由电感组成的节点或全由电感及电流源组成的节点，则这些电感电流也会发生跳变。如图 9-4(a)所示电路，S 打开前，设电路已达到稳态， I_s 为直流电源。首先求出 S 打开前的原始电流为

$$\begin{cases} i_1(0_-) = \frac{R_0 R_2 I_s}{R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0} \\ i_2(0_-) = \frac{R_0 R_1 I_s}{R_0 R_1 + R_1 R_2 + R_2 R_0} \end{cases} \quad (9-4)$$

开关 S 在 $t=0$ 时打开，则有

$$i_1(0_+) + i_2(0_+) = I_s$$

电感中的电流 i_1 和 i_2 在 $t=0$ 时必须跳变，才能满足上面式子。

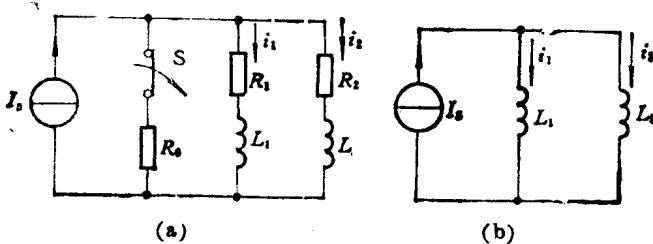


图 9-4

但电流跳变，由 $v_L = L \frac{di}{dt}$ 关系，将使电感电压出现无限大。

由于电流为有限值，电阻电压也为有限值，因此可以不计这些有限值电压，而将电路画成如图 9-4(b)所示电路。在这一电路中由 L_1 和 L_2 构成的回路，有

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$$

用 Δi 代替 di ，消去 dt ，上式成为

$$L_1(\Delta i_1) = L_2(\Delta i_2)$$

或 $L_1[i_1(0_+) - i_1(0_-)] = L_2[i_2(0_+) - i_2(0_-)]$

又可写为 $L_1 i_1(0_+) - L_2 i_2(0_+) = L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-)$,

即

$$\sum Li(0_+) = \sum Li(0_-) \text{ 或 } \sum \Psi(0_+) = \sum \Psi(0_-) \quad (9-5)$$

上式反映了回路磁链的守恒。联立求解(9-4)和(9-5)两式，即可求得电流初始值 $i_1(0_+)$ 及 $i_2(0_+)$ 。以上分析表明，换路瞬间电感电流初始值可通过回路磁链守恒进行计算。

例 3 如图 9-5(a)所示电路,已知 $C_1 = C_2 = C_3 = 1 \text{ F}$, $R = 1 \Omega$ 。设换路前电路处于直流稳态。 $t = 0$ 时,开关 S 由“1”投向“2”。求 $u_{c1}(0_+)$ 、 $u_{c2}(0_+)$ 及 $u_{c3}(0_+)$ 。

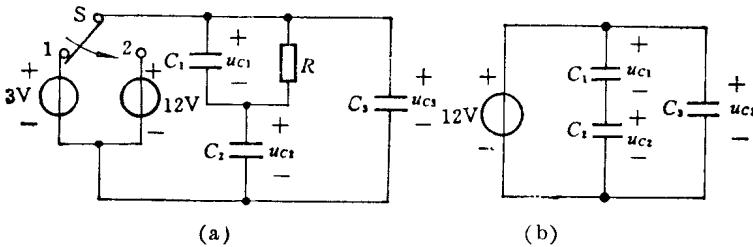


图 9-5

解：换路前电路处于直流稳态,电容相当于开路,于是有 $u_{c1}(0_-) = 0$, $u_{c2}(0_-) = u_{c3}(0_-) = 3 \text{ V}$ 。

$t = 0$ 时,开关投向“2”,出现了纯电容回路和冲激电流,电阻中的电流为有限值(如有电感,其中电流也为有限值),可忽略不计。或者说,电阻 R (电感 L)对 C 来说相当于开路。可画出如图 9-5(b)所示的纯电容电路。由 KVL 及节点电荷守恒原理可得

$$u_{c1}(0_+) + u_{c2}(0_+) = 12 \text{ V}, \quad u_{c3}(0_+) = 12 \text{ V}$$

$$-C_1 u_{c1}(0_-) + C_2 u_{c2}(0_-) = -C_1 u_{c1}(0_+) + C_2 u_{c2}(0_+)$$

将参数值代入,联立求解,得

$$u_{c1}(0_+) = 4.5 \text{ V}, \quad u_{c2}(0_+) = 7.5 \text{ V}, \quad u_{c3}(0_+) = 12 \text{ V}.$$

对以上电路,也可通过电容中的冲激电流进行计算。由图 9-5

(b) 电路, C_1 和 C_2 串联电容为 $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1}{2}$ F, 其上电压 $u_C(0_+) = 12$ V, 而 $u_C(0_-) = u_{C1}(0_-) + u_{C2}(0_-) = 3$ V, $t = 0$ 时, u_C 的跳变值为 9V, 可写为 $9\delta(t)$ V, 故得

$$i_{C1}(t) = i_{C2}(t) = i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{2} \left[9 \frac{d\delta(t)}{dt} \right] = 4.5\delta(t) \text{ A}$$

从而 $u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) + \frac{1}{C_1} \int_{0_-}^{0_+} i_{C1}(t) dt = 4.5$ V

$$u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) + \frac{1}{C_2} \int_{0_-}^{0_+} i_{C2}(t) dt = 7.5$$
 V

换路后, C_3 上的电压等于电源电压, 即 $u_{C3}(0_+) = 12$ V。

例 4 图 9-6(a) 电路中, $R_1 = R_2 = 10 \Omega$, $L_1 = 2 \text{ H}$, $L_2 = 4 \text{ H}$, $M = 1 \text{ H}$, $U_s = 40 \text{ V}$, 电路稳定后, 打开开关 S, 求电流的初始值。

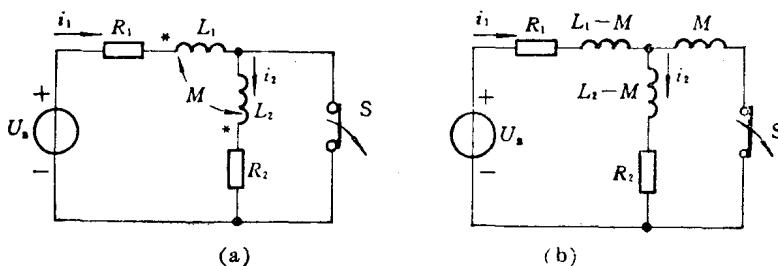


图 9-6

解: 互感消去后的电路如图 9-6(b) 所示 (互感消去法 参见第四章)。S 打开前

$$i_1(0_-) = \frac{U_s}{R_1} = 4 \text{ A}, \quad i_2(0_-) = 0$$

S 打开后, 由 KCL, 必有 $i_1(0_+) = i_2(0_+)$, 故电流必有跳变。 $t = 0$ 打开开关瞬间, 根据磁链守恒原理, 得

$$(L_1 - M)i_1(0_+) + (L_2 - M)i_2(0_+) = (L_1 - M)i_1(0_-) \\ + (L_2 - M)i_2(0_-)$$

将已知数值代入，即得

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = 1 \text{ A}$$

这里的处理方法是因为在 0_- 到 0_+ 时间内，由于电流跳变，将使电感电压出现无限大，因此可把回路中的电阻、电压源等全部短接，只考虑电感，列出磁链守恒方程解出电流初始值。

应注意，电感电流或电容电压值的跳变只出现于理想化模型中，只能看成是物理量迅速变化的极限描述，并非实际情况。

§ 9-2 一阶电路的零输入响应

一阶电路可用图 9-7 所示电路概括，含源电阻电路部分可用戴维南定理化成如图 9-7 (b) 所示电路。动态元件可以是电容或电感。本节研究一阶电路的零输入响应。

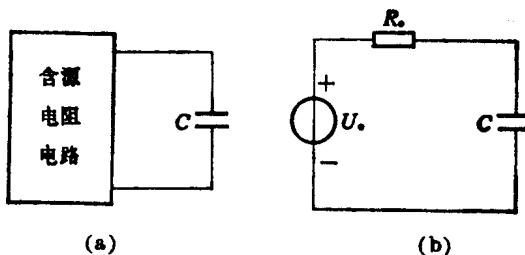


图 9-7

用经典法分析电路的过渡过程，一般分三步。首先根据换路后的电路用基尔霍夫定律列出微分方程，并给出初始条件，其次是求解方程，最后是利用初始条件确定解中的积分常数。

一、 RC 电路的零输入响应

如图 9-8 所示 RC 串联电路，开关 S 闭合前，电容原已充电至 U_0 ，S 闭合瞬间作为计时起点 ($t = 0$)，并注意 $i = -C \frac{du_c}{dt}$ 和 $u_R =$

Ri , 电容元件的特性方程中出现负号, 是因为 i 和 u_c 参考方向不一致。由 KVL, 电路的微分方程和初始条件分别为

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0 \quad (9-6)$$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = U_0. \quad (9-7)$$

由式(9-6)看到, 满足此方程的通解 u_c 应为指数函数, 设其解为

$$u_c = Ae^{pt} \quad (t \geq 0) \quad (9-8)$$

代入式(9-6)后, 得特征方程 $RCp + 1 = 0$ 或 $p = -\frac{1}{RC}$ 。特征根 p 的 SI 单位是 $\frac{1}{s}$, 它具有频率的量纲, 故又称为固有频率, 它是由电路参数和结构确定的常数。式(9-8)中的常数 A 由初始条件式(9-7)确定, 代入式(9-8)得

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = Ae^0 = U_0$$

故

$$A = U_0$$

将 p, A 之值代入式(9-8), 所求解答为

$$u_c = U_0 e^{-t/RC} \quad (t \geq 0)$$

电路中电流和电阻电压分别为

$$i = -C \frac{du_c}{dt} = -C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-t/RC}) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \quad (t > 0) \quad (9-9)$$

$$u_R = Ri = U_0 e^{-t/RC} \quad (t > 0) \quad (9-10)$$

u_c 和 i 的曲线如图 9-9 所示, 它们都是按同样的指数规律衰减到零。可以看出, 换路后, 电流和电阻电压在 $t = 0$ 时发生了跳变。

电容的初始储能和电阻的热损耗分别为

$$W_c(0) = \frac{1}{2} C U_0^2$$

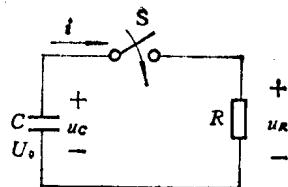


图 9-8