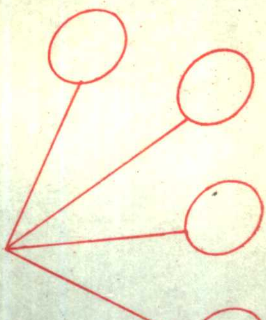
大系统的稳定性、分散控制及动态递阶控制基础

高为炳　霍伟　编著



北京航空航天大学出版社

大系统的稳定性、分散控制及动态递阶控制基础

北京航空航天大学出版社

(京)新登字 166 号

内 容 简 介

本书系统论述大系统稳定性分析、分散控制及动态递阶控制的基本理论,并详细介绍了图论方法在以上诸方面的应用,其中包括作者所在单位近年来的有关研究成果.

第一章内容包括李亚普诺夫稳定性理论基础,大系统稳定性分析的标量和向量 V 函数方法,M 阵的应用及利用大系统的多层结构分解进行稳定性分析.第二章介绍动态分散控制与固定模的关系和各种常用的固定模判据,并从结构可控性研究出发,详细论述了结构固定模的概念及其代数和图论形式的判据.第三章研究静态局部分散控制问题,着重讨论了 Siljak 等人的结构理论及对此工作的进一步推广.第四章介绍大系统动态递阶控制的概念和基本结果,以及采用部分信息的动态递阶控制系统,并用图论方法研究了相应的结构性质.

本书注重基本理论的讲述,有利于读者掌握扎实的基础,进一步深入学习及从事有关研究工作.本书可供科研和工程技术人员学习有关理论时使用,也可作为自动控制专业本科高年级学生或研究生教材或参考书.

●书　　名:大系统的稳定性、分散控制及动态递阶控制基础
●编 著 者:高为炳　霍　伟
●责任编辑:肖之中
●出 版 者:北京航空航天大学出版社(100083)
●印 刷 者:朝阳科普印刷厂
●发　　行:新华书店总店科技发行所
●经　　售:全国各地新华书店
●开　　本:850×1168　1/32
●印　　张:8.75
●字　　数:235.2 千字
●印　　数:1500
●版　　次:1994 年 10 月第 1 版
●印　　次:1994 年 10 月第 1 次印刷
●书　　号:ISBN 7-81012-469-2/TP·110
●定　　价:8.70 元

前　言

随着科学技术的发展,在工业生产和社会生活中所面临的控制和管理系统规模越来越大. 为解决用通常控制理论研究这些系统时所面临的“维数灾”问题,从本世纪 60 年代中期起,人们开始了对“大规模系统”(简称大系统)的研究. 由于大系统的理论和应用研究所涉及的领域很广,故研究的内容和角度及采用的方法和工具也是多种多样的,因此目前对“大系统”尚无一个公认的确切定义. 但从“大系统”这一名称可直观地看出,大系统通常具有较高的维数,为分析设计方便,常常将其分解为子系统,利用子系统和关联项的性质来研究整个系统的性质. 另外,对这种维数较高的系统,采用一个控制站进行统一的集中控制常常是不可能或不可取的. 这时常采用若干控制站相对独立地进行分散化控制或采用多层的递阶控制方式. 因此当前较有代表性的看法是[1]: 将其分解为若干相互关联的子系统来进行研究的系统,或是采用分散或递阶方式进行控制的系统,可称为大系统. 本书所说的大系统即是指用上述定义确定的系统.

本书是作者在讲授硕士研究生《大系统控制理论基础》课程(30 学时)的讲义基础上经多次修改而成,它不是全面论述大系统理论的著作,而是着重介绍大系统理论中研究和应用得较多的稳定性分析及分散控制这两方面的基础理论. 书中对有关的基本概念、方法和重要结论作了详细论述,并附有少量习题,以利于读者系统而扎实地掌握这两方面的基础,进一步深入学习及从事有关研究和应用工作.

考虑到大系统的研究常常基于对大系统本身信息结构的分析,而图论是进行结构分析的有力工具,因此本书详细叙述了图论方法在大系统稳定性分析、结构可控性和结构固定模、局部分散控制以及动态递阶控制中的应用. 学习这部分内容不仅可了解有关结论,还可掌握用图论方法研究控制问题时,问题的提法和所采用的基本方法和技巧.

本书中还介绍了作者所在单位近年来的若干有关研究成果,如利用大系统的多层结构分解进行稳定性分析、动态递阶控制系统、对分散控制结构理论的推广等等.

值得说明的是,由于本书着重叙述基础理论以及篇幅的限制,对国内外很多很好的工作未能提及,参考文献中也只列出了书中直接引用了的文献,一些重要论文及著作并没有全部列出,敬希鉴谅.

本书的出版得到国家自然科学基金和北京航空航天大学教材基金资助,责任编辑肖之中同志也付出了辛勤的劳动,作者对他们的大力支持和帮助深表谢意. 参加本书部分工作的还有管叔平、杜枫和王惠同志,在此一并致谢.

由于水平所限,错误及不妥之处在所难免,欢迎广大读者批评指正.

作者

1994 年

目　录

1

大系统的稳定性分析

本章所研究的大系统稳定性是指由常微分方程描述的大系统在李雅普诺夫意义下的稳定性. 大系统的稳定性分析是大系统理论中发展最早、最重要、最富有成果的方面之一,是稳定性理论不断发展的结果. 自 19 世纪末李雅普诺夫稳定性理论出现以来,本世纪 50 年代出现了大范围稳定性理论,60 年代中期又出现了大系统的稳定性理论. 1966 年 F.N.Bailey 利用微分方程比较原理和向量 V 函数的概念提出了研究大系统稳定性的向量 V 函数方法[2]; 1970 年 W.E.Thompson 提出了标量 V 函数方法[3]; 1972 年 M.Araki 利用 M 阵的概念进一步简化了稳定性判据[4]; 他们的工作为大系统稳定性理论奠定了基础.

本章将详细介绍大系统稳定性分析的基本方法和主要结果. 这些内容不仅本身具有重要意义,且其基本思想完全可推广到研究由泛函方程描述的大系统的输入–输出稳定性,由差分方程描述的离散大系统,由随机微分方程描述的随机大系统,由偏微分方程描述的分布参数大系统的稳定性以及具有时滞的大系统的稳定性等,有兴趣的读者可参阅有关专著(如[5],[6]).

§1.1 李雅普诺夫稳定性理论基础

本节简要介绍本章中要用到有关李雅普诺夫稳定性理论的基本概念和基本定理,它们是以后研究大系统稳定性的理论基础.

1. 稳定性的概念

李雅普诺夫稳定性定义起源于对力学中刚体平衡(静止)状态的研究. 按刚体受到小扰动后能否回复到原来的平衡位置定义了各种

稳定性定义. 具体地说,设刚体运动微分方程为

$$\dot{y}=g(y,t), \tag{1.1}$$

式中 $y\in\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量. 刚体的平衡状态对应于方程(1.1)的特解 $\bar{y}=y_e$(常值). 记其在初始时刻 t_0 受到一扰动后的运动为 $y=y(t)$, 可用 $\|y(t_0)-y_e\|$($\|y\|:=\sqrt{y^Ty}$ 为 y 的欧氏范数)描述初始扰动的大小, 用 $\|y(t)-y_e\|$ 描述 $y(t)$ 偏离平衡状态的程度. 若扰动 $\|y(t_0)-y_e\|$ 充分小时偏差 $\|y(t)-y_e\|$ 足够小, 则称平衡状态 $\bar{y}=y_e$ 是稳定的, 否则是不稳定的. 又若 $\|y(t_0)-y_e\|$ 充分小时 $\|y(t)-y_e\|\to 0$(当 $t\to\infty$), 则称平衡状态 $\bar{y}=y_e$ 是渐近稳定的.

运动稳定性的概念是平衡状态稳定性概念的直接推广. 研究刚体的一个特定运动, 它对应于方程(1.1)的一个特解 $y=\bar{y}(t)$. 仍记其受到一初始扰动后的运动为 $y=y(t)$, 若初始扰动 $\|y(t_0)-\bar{y}(t_0)\|$ 充分小时 $\|y(t)-\bar{y}(t)\|$ 足够小, 则认为所给定运动 $y=\bar{y}(t)$ 是稳定的, 否则是不稳定的. 又若 $\|y(t_0)-\bar{y}(t_0)\|$ 充分小时 $\|y(t)-\bar{y}(t)\|\to 0$(当 $t\to\infty$), 则称运动 $y=\bar{y}(t)$ 是渐近稳定的. 显然, 运动稳定性的概念包含了平衡状态稳定性的概念, 因为平衡状态 $\bar{y}=y_e$ 也是一种特定的运动.

为简化运动稳定性的研究, 引入扰动变量 $x(t)=y(t)-\bar{y}(t)$. 由方程(1.1)知

$$\dot{x}(t)=\dot{y}(t)-\dot{\bar{y}}(t)=g(x(t)+\bar{y}(t),t)-g(\bar{y}(t),t)=:f(x(t),t), \tag{1.2}$$

$$f(0,t)=g(\bar{y}(t),t)-g(\bar{y}(t),t)\equiv 0. \tag{1.3}$$

方程(1.2)是扰动变量 $x(t)$ 应满足的微分方程, 称为给定运动 $\bar{y}(t)$ 的扰动方程. 由定义知: $\|y(t_0)-\bar{y}(t_0)\|$ 充分小等价于 $\|x(t_0)\|=\|x(t_0)-0\|$ 充分小; $\|y(t)-\bar{y}(t)\|$ 足够小等价于 $\|x(t)\|=\|x(t)-0\|$ 足够小; $\|y(t)-\bar{y}(t)\|\to 0$ 等价于 $\|x(t)\|=\|x(t)-0\|\to 0$; 又由式(1.3)知 $x(t)\equiv 0$ 是扰动方程(1.2)的解, 从而可得出李雅普诺夫稳定性理论的一个重要结论: 任一给定运动的稳定性等价于其

扰动方程零解的稳定性．因此研究稳定性时可只研究方程 (1.2) 零解的稳定性．下面给出稳定性的精确定义．

2. **稳定性定义**

研究由常微分方程描述的系统

$$\dot{x}=f(x,t), \tag{1.4}$$

式中 $x\in\mathbf{R}^n, t\in\mathbf{J}:=[t_0,\infty)$(其中 $t_0\geqslant 0$),$f(x,t)$ 在 $\mathbf{G}\times\mathbf{J}$($\mathbf{G}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中包含原点的某区域) 上连续且满足解的右边整体存在性和唯一性条件 (即任取 $x_0\in\mathbf{G}, t_0\geqslant 0$, 方程 (1.4) 存在唯一解 $x(t)=x(t;x_0,t_0)\in\mathbf{G}$ 对所有 $t\in\mathbf{J}$ 有定义且满足初始条件 $x(t_0)=x(t_0;x_0,t_0)=x_0$), 且有 $f(0,t)\equiv 0(t\in\mathbf{J})$, 即系统 (1.4) 有零解 $x=0$.

研究系统 (1.4) 这样一般形式的系统是十分困难的，通常需要进一步考虑系统右端函数的具体形式进行分类研究．当系统 (1.4) 右端函数 $f(x,t)$ 不显含 t 时称为定常系统，否则称为非定常系统；当系统 (1.4) 右端函数是 x 的线性函数时称为线性系统，否则称为非线性系统．这样，系统 (1.4) 可分为以下四类：

1) 非定常非线性系统

$$\dot{x}=f(x,t); \tag{1.5}$$

2) 定常非线性系统

$$\dot{x}=f(x); \tag{1.6}$$

3) 非定常线性系统

$$\dot{x}=A(t)x; \tag{1.7}$$

4) 定常线性系统

$$\dot{x}=Ax. \tag{1.8}$$

对于最一般形式的系统 (1.4) 可引入以下稳定性定义．

定义 1.1 对系统 (1.4), 若任取 $\varepsilon>0, t_0\geqslant 0$ 均存在 $\delta(\varepsilon,t_0)>0$, 使得当 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon,t_0)$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\|<\varepsilon, \qquad \forall t\geqslant t_0,$$

则称系统 (1.4) 的零解 $x=0$ 是稳定的．若上述 δ 与 t_0 的选取无

关，则称零解 $x=0$ 是一致稳定的．

定义 1.2 若系统 (1.4) 的零解不是稳定的，则称其零解 $x=0$ 为不稳定的．

由定义显然可知，系统 (1.4) 的零解 $x=0$ 不稳定的充要条件是：对某个给定的 $\varepsilon>0, t_0\geqslant 0$，不管 $\delta>0$ 多么小，总可以找到满足 $\|x_0\|<\delta$ 的某一初值 x_0，使得解 $x(t;x_0,t_0)$ 在某一 $t_1\geqslant t_0$ 时有 $\|x(t_1;x_0,t_0)\|=\varepsilon$.

定义 1.3 对系统 (1.4)，若 i) 其零解 $x=0$ 是稳定的；ii) 存在 $\eta(t_0)>0$，使得当 $\|x_0\|<\eta(t_0)$ 时有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t;x_0,t_0)=0$；则称系统 (1.4) 的零解 $x=0$ 是渐近稳定的．当零解渐近稳定时，集合

$$S(t_0)=\{x_0 | x_0\in \mathbf{G}\subset \mathbf{R}^n,\ \lim_{t\to\infty} x(t;x_0,t_0)=0\}$$

称为零解 $x=0$ 的吸引区．

若在空间 $\mathbf{R}^n$ 中画出系统 (1.4) 的解 $x(t;x_0,t_0)$ 的轨迹（称为解轨线，其上的箭头表示随着 t 的增加解轨线的走向），则系统 (1.4) 零解 $x=0$ 稳定，不稳定和渐近稳定的定义可以用图 1.1 来直观地解释.

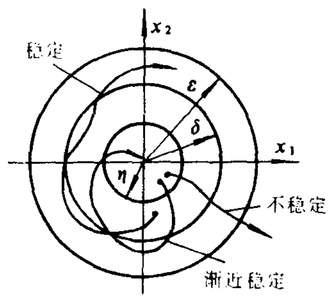


图 1.1

定义 1.4 对系统 (1.4)，若 i) 其零解 $x=0$ 是一致稳定的；ii) 存在 $\eta>0$ 满足：任取 $\varepsilon>0, t_0\geqslant 0$，都可找到与 t_0 无关的 $T(\varepsilon,\eta)>0$，使得当 $\|x_0\|<\eta$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\|<\varepsilon, \quad \forall t\geqslant t_0+T(\varepsilon,\eta),$$

则称系统 (1.4) 的零解 $x=0$ 是一致渐近稳定的．

引入一致稳定性和一致渐近稳定性的概念是由于非定常系统与定常系统有一基本差异是：在 $\mathbf{R}^n\times \mathbf{J}$ 中定常系统解的形状与 t_0 无关，而非定常系统解的形状与 t_0 有关．事实上，若记定常系

统 (1.6) 满足初始条件 $x(t_0)=x_0$ 的解为 $x^{(1)}(t)$, 则当将初始时间 t_0 改为 $t_0^*=t_0+T$(T 为一有限常数) 后, 很容易证明定常系统 (1.6) 满足初始条件 $x(t_0^*)=x_0$ 的解为 $x^{(1)}(t-T)=:x^{(2)}(t)$. 显然, 在 $\mathbf{R}^n\times\mathbf{J}$ 中 $x^{(2)}(t)$ 与 $x^{(1)}(t)$ 的形状完全一样, 只是平移了时间 T. 这表明定常系统解的形状与初始时刻无关, 故对定常系统来说, 稳定与一致稳定等价; 渐近稳定与一致渐近稳定等价. 但非定常系统却没有这种性质. 例如, 可以证明[7]: 一阶非定常系统

$$\dot{x}=(4t\sin t-2t)x$$

的零解 $x=0$ 是稳定且渐近稳定的, 但不是一致稳定的, 因而也不是一致渐近稳定. 这个例子表明: 对于非定常系统,(渐近) 稳定与一致 (渐近) 稳定是有区别的.

在研究系统 (1.4) 零解的稳定性时, 有时不仅要求零解是一致渐近稳定的, 而且对受到初始小扰动的解趋于零的速度有一定要求, 从而引入一种特殊的一致渐近稳定性 — 指数稳定性的定义.

定义 1.5 对系统 (1.4), 若存在 $\alpha>0$ 且对任何 $\varepsilon>0, t_0\geqslant 0$ 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 使得当 $\|x_0\|<\delta(\varepsilon)$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\|\leqslant \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \forall t\in\mathbf{J},$$

则称系统 (1.4) 的零解 $x=0$ 是指数稳定的, 并称 α 为其衰减度.

从工程实际角度看, 引入一致 (渐近) 稳定性和指数稳定性的概念是很有必要的. 由定义, 所谓 "一致", 具有 "与 t_0 无关" 的含义. 若没有这种一致性, 系统在不同起始时间下将有不同的动态行为, 这就使得系统的过渡过程品质毫无保证; 而指数稳定性中的衰减度概念, 则是刻划系统过渡过程品质的最简单的性能指标.

从定义可看出, 上述几种稳定性定义都是研究当初始扰动充分小时解的渐近性质, 所以称为局部稳定性. 但在实际工程问题中, 所可能产生的初始扰动并非总是很小的, 而有时可能是相当大的, 所以有必要研究所谓全局稳定性问题.

定义 1.6 对系统 (1.4), 若 i) 零解 $x=0$ 是稳定的; ii) 任取

$x_0 \in \mathbf{R}^n, t \geqslant 0$, 均有 $\lim\limits_{t \to \infty} x(t;x_0,t_0) = 0$; 则称系统 (1.4) 的零解 $x = 0$ 是全局渐近稳定的 .

显然 , 当系统 (1.4) 的零解是全局渐近稳定时 , 其吸引区是全空间 $\mathbf{R}^n$.

定义 1.7 对系统 (1.4), 若 i) 零解 $x = 0$ 是一致稳定的 ; ii) 系统 (1.4) 的解是一致有界的 , 即任取 $\alpha > 0, t_0 \geqslant 0$, 都存在与 t_0 无关的 $\beta(\alpha) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \alpha$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\| < \beta(\alpha), \qquad \forall t \in \mathbf{J};$$

iii) 对任意 $\eta > 0, \varepsilon > 0, t_0 \geqslant 0$, 存在与 t_0 无关的 $T(\varepsilon,\eta) > 0$, 使得当 $\|x_0\| < \eta$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geqslant t_0 + T(\varepsilon,\eta);$$

则称系统 (1.4) 的零解 $x = 0$ 是全局一致渐近稳定的 .

定义 1.8 对系统 (1.4), 若存在 $\alpha > 0$, 且对任意 $\beta > 0$ 都存在 $K(\beta) > 0$, 使得当 $t_0 \geqslant 0, \|x_0\| < \beta$ 时有

$$\|x(t;x_0,t_0)\| \leqslant K(\beta)\|x_0\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad \forall t \in \mathbf{J},$$

则称系统 (1.4) 的零解 $x = 0$ 是全局指数稳定的 .

对于线性系统 (1.7), 由微分方程知识知它的解 $x(t;x_0,t_0) = X(t)x_0$, 其中 $n \times n$ 阵 $X(t)$ 满足矩阵方程

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \qquad X(t_0) = I_n (I_n \text{ 为 } n \text{ 阶单位阵 })$$

为线性系统 (1.7) 的基本解阵 . 故若初始状态从 x_0 变为 kx_0(k 为任一常数), 则解从 $x(t;x_0,t_0)$ 按同样比例变为 $kx(t;x_0,t_0)$. 这样由定义立即可知 : 对线性系统来说 , 局部稳定性与全局稳定性的概念是一致的 . 但非线性系统却不同 , 其解的性质与初始状态有关 . 例如对系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2 - 0.01), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 0.01), \end{cases}$$

记 $x = [x_1, x_2]^T$, 可以证明[8]: 当初始状态满足 $\|x_0\| < 0.1$ 时 ,

$\lim\limits_{t\to\infty} x(t;x_0,t_0)=0$; 而当 $\|x_0\|>0.1$ 时, $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t;x_0,t_0)\|=\infty$. 因此对非线性系统来说，局部稳定性与全局稳定性是有区别的.

至此，可将上述各种稳定性定义之间的关系小结如下：

1) 对非定常非线性系统，各稳定性定义间有以下关系 (→ 表示隐含):

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{全局指数稳定} & \rightarrow & \text{全局一致渐近稳定} & \rightarrow & \text{全局渐近稳定} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{指数稳定} & \rightarrow & \text{一致渐近稳定} & \rightarrow & \text{渐近稳定} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\text{一致稳定} & \rightarrow & \text{稳定} & &
\end{array}
$$

2) 对定常非线性系统，一致性概念消失，各稳定性定义间有以下关系：

$$
\begin{array}{ccc}
\text{全局指数稳定} & \rightarrow & \text{全局渐近稳定} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{指数稳定} & \rightarrow & \text{渐近稳定} \\
\downarrow & & \\
\text{稳定} & &
\end{array}
$$

3) 对非定常线性系统，全局性概念消失，并且可以证明指数稳定性等价于一致渐近稳定性[7]，故各稳定性定义间有以下关系：

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{指数稳定} & = & \text{一致渐近稳定} & \rightarrow & \text{渐近稳定} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\text{一致稳定} & \rightarrow & \text{稳定} & &
\end{array}
$$

4) 对定常线性系统，一致性与全局性概念消失，各稳定性定义间有以下关系：

$$
\text{指数稳定} = \text{渐近稳定} \rightarrow \text{稳定}
$$

3. 研究运动稳定性问题的方法

众所周知，对系统(1.4)，除少数情况外，一般是不可能将其解用初等函数表示为有限形式的. 因而在研究稳定性时，先将解求出，再用定义判断其稳定性的可能性是极小的. 为此，1892 年

A.M.李雅普诺夫在其著名的博士论文《运动稳定性一般问题》中提出了两种解决问题的方法.

李雅普诺夫第一方法即大家所熟悉的级数展开法．它是将解表示成级数形式并在此基础上研究其稳定性．这种方法在理论上是比较完整的，但将解表为级数及判断级数的收敛性却是一个沉重的负担，这就使得这一方法在实用上有很大的局限性．

李雅普诺夫第二方法不需要求解微分方程，它是寻找具有某种特性的辅助函数 $v(x,t)$, 通过研究 $v(x,t)$ 及其沿系统 (1.4) 解的时间导数的符号性质来直接判断稳定性，故又称为 V 函数方法或直接方法．这种方法发展到今天已成为研究运动稳定性问题的基本方法．至于函数 $v(x,t)$ 的名称，各书的定义不同，本章中称能够用来判定零解稳定性的函数 $v(x,t)$ 为李雅普诺夫函数，而当还不知道能否用它来判定零解的稳定性时，则称其为 V 函数．

以下介绍本书中用到的有关 V 函数方法的一些重要结果，因其证明都可在常见的教科书（如 [7],[8],[9]）中找到，故均从略．

4. **定常系统的稳定性**

(1)**V 函数** 先研究定常系统 (1.6) 的稳定性．因系统 (1.6) 的右端函数是不显含 t 的，故 V 函数也取为不显含 t 的形式 $v(x)$. 以下先研究 $v(x)$ 的性质，且在以后总假设 $v(x)$ 是定义在 $\mathbf{G}$（或 $\mathbf{R}^n$）上的单值连续可微实函数并满足 $v(0)=0$.

定义 1.9 函数 $v(x)$ 称为

1)（在 Ω 中）正定的（负定的），若存在原点邻域 Ω, 使得任取 $x\in\Omega, x\neq 0$ 均有 $v(x)>0(v(x)<0)$.

2)(在 Ω 中)半正定的(半负定的),若存在原点邻域 Ω,使得任取 $x\in\Omega, x\neq 0$ 均有 $v(x)\geqslant 0(v(x)\leqslant 0)$.

3) 变号的，若在原点任一邻域 Ω 中，$v(x)$ 既可为正，又可为负．

定义 1.10 若 $v(x)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中正定且 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} v(x)=\infty$, 则称 $v(x)$ 是（径向）无限大正定的．