最优化技术应用

韦鹤平 编著

同济大学出版社

02?
C15?
2

最优化技术应用

韦鹤平 编著

同济大学出版社

内 容 提 要

最优化技术是近廿年发展起来的一门学科。作者根据多年的教学经验，在书中详细介绍了该技术的应用方法，并列举较多的工程算例。全书分线性规划、非线性规划、动态规划、几何规划和网络技术等几篇，内容取舍主要以工程系统中建立数学模型的需要为依据，书中解题思路清晰，便于读者举一反三。在附录中，列出各类典型算例的计算机程序(用 BASIC 和 FORTRAN 两种语言)，更具有实用价值。

本书可作为理工科大学的教材和工程技术人员的参考。

责任编辑 洪建华
封面设计 王肖生

最优化技术应用
韦鹤平 编著
同济大学出版社出版
(上海四平路 1239 号)
新华书店上海发行所发行
常熟市信谊 印刷厂印刷
开本 787×1092×1/16 印张：18.125 字数：464 千字
1987 年 3 月第一版 1987 年 3 月第一次印刷 印数：1—8000
统一书号：13335.024 科技新书目：132—265 定价：3.00 元

前　　言

最优化技术是从所有可能的方案中选择最合理的一种以达到最优目标的科学。这种技术是近二、三十年来随着电子计算机的普遍应用而发展起来的。推广运用最优化技术，将会取得显著的经济效果。

为了便于广大读者学习应用这门技术，本书在内容上力求浅显易懂，而不过分追求严密的数学论证，适于教学和自学。具有一般微积分、线性代数等基础知识的读者都能读懂本书。书中选用了许多结合环境工程、土木工程、管理等工程实际问题的例题。为了使读者不仅能掌握有关的基本原理和算法，而且还能掌握一些基本实用程序，书中用目前国内外广泛使用的BASIC和FORTRAN两种算法语言编写了20余只程序。凡书中出现的程序都在同济大学环境工程系计算机室86/330A和APPLE-Ⅱ微机上验证过，并已投入实际应用。

本书一些基本内容曾在国家环保总局同济大学科学技术干部培训班，作为教材，讲授了五期。这次编者受同济大学出版社之委托，在原有教材的基础上，作了较广泛的修订补充。在编写过程中，承杨钦教授热忱指导和同济大学环境工程系主任顾国维付教授热情帮助，大力支持，在此表示衷心的感谢。编者还要感谢上海机械学院院长赵学端教授，华东水利学院张乃良老师以及同济大学数学系吴庭芳副教授，他们详细审阅了手稿，提出了一些宝贵意见。附录中的一些程序承同济大学环境系统工程教研室部分同志协助上机，在此一并表示谢意。

由于最优化技术涉及的范围广泛，加之编者的水平有限，时间仓促，书中一定存在不少缺点和错误，敬希读者批评指正。

编　　者

一九八六年十月于同济

目　　录

第一篇　线 性 规 划

第二篇 非线性规划

第三篇 动态规划和几何规划

第四篇 网 络 技 术

第一篇
线性规划

第一章　线性规划的基本概念

线性规划(Linear Programming)是运筹学中研究较早、应用较广、比较成熟的一个重要分支。它所研究的问题主要有两个方面：一是如何统筹安排一项任务，以尽量用最少的资源来完成它；二是如何利用一定量的人力、物力和资金等来完成最多的任务。线性规划的数学模型可以叙述为：在满足一组线性约束条件下，求多变量线性函数的最优值(最大值或最小值)。

§1-1　线性规划的应用例子

先举几个简单的例子以说明什么是线性规划。

例1-1　某车间有四台机床，每台机床均可加工三种不同的产品，其每小时生产定额及所得利润指标分别见表1-1和表1-2。现计划生产各产品的数量分别为700,500和400件，而四台机床所能利用的工时最多分别为90，75，90，85小时，问应如何安排各台机床的生产，才能得到最大利润。

表1-1　每小时生产定额表(单位：件)

定额 \ 机床 / 产品	1	2	3	4
1	8	2	4	9
2	7	6	6	3
3	4	8	5	2

表1-2　每小时利润表(单位：元)

利润 \ 机床 / 产品	1	2	3	4
1	5	6	4	3
2	5	4	5	4
3	6	7	2	8

解：令 x_{ij} 为第 j 台机床加工第 i 种产品的小时数，$j=1, 2, 3, 4$；$i=1, 2, 3$。其约束条件为

$$\left.\begin{array}{l}8x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+9x_{14}=700\\7x_{21}+6x_{22}+6x_{23}+3x_{24}=500\\4x_{31}+8x_{32}+5x_{33}+2x_{34}=400\end{array}\right\}\text{需求量的等式约束}$$

$$\begin{array}{l}x_{11}+x_{21}+x_{31}\leqslant 90\\ \left.\begin{array}{l}x_{12}+x_{22}+x_{32}\leqslant 75\\x_{13}+x_{23}+x_{33}\leqslant 90\end{array}\right\}\text{机床加工工时的不等式约束}\\x_{14}+x_{24}+x_{34}\leqslant 85\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}x_{ij}\geqslant 0\\i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{array}\right\}\text{非负约束}$$

在以上约束条件下，要求生产利润最大，即求以下的目标函数的最大值

$$\begin{aligned}\max Z=&5x_{11}+6x_{12}+4x_{13}+3x_{14}+5x_{21}+4x_{22}+5x_{23}\\&+4x_{24}+6x_{31}+7x_{32}+2x_{33}+8x_{34}\end{aligned}$$

这就是线性规划问题，简称 LP 问题 约束条件有等式和不等式两种；目标函数为求极大值。用单纯形法（将在下一章讨论）求出最优生产调度方案如下表，最大利润为 2062 元.

表 1-3　最优生产调度方案表

产品 \ 工时 \ 机床	1	2	3	4
1	70.12	56.19	6.67	0
2	0	0	83.33	0
3	19.88	18.81	0	85.0

例 1-2　一个工厂单位时间内生产 x 个产品单位。这种产品卖 10 元一个，生产成本是每个 2.7 元。每个产品单位产生三个废水单位。废水必须排走。废水的一部分 y 可以直接排入一条河里，其余的可以经过附近一个处理效率为 85% 的处理厂再排入河里（见图 1-1）。该处理厂的最大处理能力是每个时间单位处理 9 个废水单位；处理成本是每个污水单位 0.5 元。而当局对每个排入河流的废水单位收费 1.76 元，当局还进一步要求单位时间内最多排入河流 2.25 个废水单位。为了得到最大的利润，工厂应如何选择 x 与 y 呢？

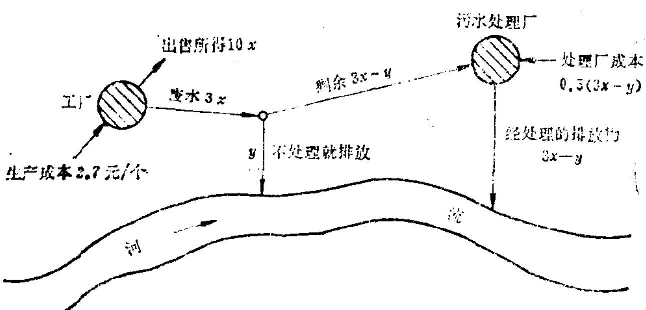

图　1-1

解：按题意，建立一个目标函数，如下：

$$\begin{aligned}z&=10x-2.7x-0.5(3x-y)-1.76(y+0.15(3x-y))\\&=5x-y\qquad\text{（为了方便，小数点后四舍五入）}\qquad(1\text{-}1)\end{aligned}$$

必须使这个函数在下述条件下取最大值：

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{处理厂的能力：} & 3x-y\leqslant 9 \\
\text{排入河流的量是受限制的：} & y+0.15(3x-y)\leqslant 2.25 \\
\text{即：} & 4.5x+0.85y\leqslant 2.25 \\
\text{进入处理厂的流量不会是负值：} & 3x-y\geqslant 0 \\
\text{即：} & y-3x\leqslant 0 \\
 & x\geqslant 0 \\
 & y\geqslant 0
\end{array}\right\} \qquad (1\text{-}2)
$$

综合上述，这个环境保护问题可归纳为：

满足约束条件

$$
\begin{cases}
3x-y\leqslant 9 \\
4.5x+0.85y\leqslant 2.25 \\
y-3x\leqslant 0 \\
x,\ y\geqslant 0
\end{cases}
$$

使得

$$\max Z=5x-y$$

从以上两个线性规划例子可以看出，它们在数学上具有以下共同特征：

1．每一个问题都用一组未知数（$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$）表示某一方案，这组未知数的一组定值就代表一个具体方案。通常要求这些未知数取值为非负的；

2．存在一定的限制条件(称为约束条件)，这些限制条件都可以用一组线性等式或线性不等式来表达；

3．都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数）。据问题性质要求目标函数实现最大化，或最小化。

§1-2　线性规划问题的数学形式

线性规划数学模型的一般形式是：

在约束为：

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\ \geqslant)b_m
\end{cases} \qquad (1\text{-}3)
$$

$$x_i\geqslant 0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (1\text{-}4)$$

的条件下，求目标函数

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \qquad (1\text{-}5)$$

上述数学模型也可写成：

在约束为：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i(\text{或}=,\ \geqslant b_i) \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (1\text{-}6)$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \qquad (1\text{-}7)$$

的条件下，求目标函数

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-8}$$

我们称这样的线性规划模型具有 n 个变量和 m 个约束条件。

这里 $a_{ij},\ b_i,\ c_j\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

等为已知常数，其中 c_j 称为费用系数(或称价值系数)。

式(1-6)～式(1-8)如用矩阵表示，则可写成

求 $$\max Z=CX$$

满足
$$\begin{aligned} &AX\leqslant b\quad (\text{或}=,\ \geqslant b)\\ &X\geqslant 0\end{aligned} \tag{1-9}$$

或者
$$\max\{CX\mid AX\leqslant b,\ X\geqslant 0\} \tag{1-10}$$

式中
$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$$
$$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n)$$
$$\boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m)^T$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

上述型式的线性规划问题，称为典则型式。

如果约束条件是等式，即在约束为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases} \tag{1-11}$$

$$x_j\geqslant 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-12}$$

的条件下，求目标函数

$$\max Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1-13}$$

这种型式的线性规划问题称为标准型线性规划。称满足约束条件 (1-11) 和 (1-12) 的解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$ 为可行解；而称满足式(1-13)的可行解为最优解。不失一般性，我们还可假定 $b_i\geqslant 0\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$R(A)=m$ 及 $m<n$。

对标准型线性规划问题，数学处理比较方便，所以往往先将典则型线性规划问题变换为标准型的。可以籍下述两种变量对其进行变换：

1. 松弛变量

若约束条件是小于等于的不等式约束

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\leqslant b_i & (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases} \tag{1-14}$$

使得 $$Z=f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j\quad \text{取最小(或最大)值}$$

为将其化为标准形式，需在约束条件方程组中的每个不等式左端增添一个非负的松弛变量 x_{n+i}，得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1, 2, \cdots, n) \\ x_{n+i} \geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{1-15}$$

2. 剩余变量

若约束条件为大于等于的不等式约束

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{1-16}$$

使得 $$Z=f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \text{取最小(或最大)值}$$

为将其化为标准形式，需在约束条件方程组中的每一不等式左端减去一个非负的剩余变量 x_{n+i}，得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i & (i=1, 2, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j=1, 2, \cdots, n) \\ x_{n+i} \geqslant 0 & (i=1, 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{1-17}$$

上述 1. 和 2. 的目标函数应为

$$Z=f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n+c_{n+1}x_{n+1}+\cdots+c_{n+m}x_{n+m} \tag{1-18}$$

其中：$$c_{n+1}=c_{n+2}=\cdots=c_{n+m}=0$$

所以，实际上目标函数不变，仍为，

$$Z=f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

3. 自由变量

在线性规划标准型中，变量 $x_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 恒要求非负。但在实际问题中有些变量从物理意义上说并不要求非负，也就是说某些变量可以任意取值，我们称这些变量为自由变量。例如，x_k 是自由变量，可以用以下两种方法把它代换：

第一种方法：引入两个变量 $x_k' \geqslant 0$，$x_k'' \geqslant 0$，令

$$x_k = x_k' - x_k'' \tag{1}$$

将上式代到线性规划的目标函数和约束条件中，就将自由变量 x_k 代换了。求出线性规划的最优点后，再利用式(1)即可求出 x_k。

第二种方法：取一个包含自由变量 x_k 的等式约束，例如

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{ik}x_k+\cdots+a_{in}x_n=b_i \tag{2}$$

由此解出

$$x_k=\frac{b_i}{a_{ik}}-\frac{a_{i1}}{a_{ik}}x_1-\frac{a_{i2}}{a_{ik}}x_2-\cdots-\frac{a_{in}}{a_{ik}}x_n \tag{3}$$

将式(3)代入线性规划的目标函数和其他约束条件中就把 x_k 消去。求出新线性规划的最优点后，再利用(3)式，即可求 x_k。

如果问题是求目标函数

$$Z=f(X)=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

最小值. 则可以化为求目标函数

$$Z'=f'(X)=-c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n \tag{1-19}$$

最大值。

所以, 对于既有不等式约束条件又有等式约束条件的线性规划问题, 只需对那些不等式约束引入松弛变量或剩余变量, 就可将问题转化为与之等价的标准型线性规划问题。下面我们将只讨论标准型线性规划问题。

§1-3 图解法

在线性规划问题中, 如果只含有两个变量时, 就可以用图解法求解, 虽然应用不多(因为大多数线性规划问题其变量数 $n\geqslant 3$), 但图解法简单直观, 有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

因为例 1-2 的问题中只包含两个变量, 所以下面我们用图解法对它求解。

在以 x, y 为坐标轴的直角坐标系中, 因为要满足非负条件 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$, 这两个条件同时存在就指第一象限。同样道理, 例 1-2 其他每一约束条件都代表一个半平面, 如约束条件 $3x-y\leqslant 9$ 代表以直线 $3x-y=9$ 为边界的左边的半平面。例 1-2 的所有约束条件为半平面的交汇区域是 $OABC$ (见图 1-2 的阴影部分)。

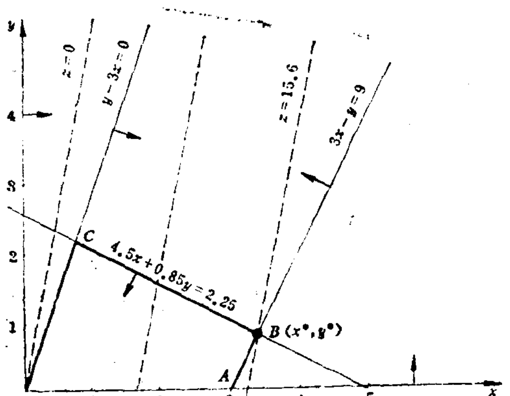

图 1-2

区域 $OABC$ 中的每一点 (包括边界点) 都是这个线性规划问题的一个解 (可行解)。因此, 区域 $OABC$ 是例 1-2 线性规划问题的解的集合(可行域)。

现在我们再来分析目标函数 $Z=5x-y$。在坐标平面 $x-y$ 上, 它表示以 Z 为参数的一族平行线, 位于同一直线上的点, 具有相同的目标函数值, 因而也称它为"等值线"。当 Z 值由小变大时, 直线 $Z=5x-y$ 沿其法线方向向右移动。当移动到右上角 B 点时 Z 的取值最大, 这就得到例 1-2 的最优解: $x^*=3.3$, $y^*=0.9$ (即为 B 点的坐标 $(3.3, 0.9)$), 将其代入目标函数, 得

$$Z=15.6$$

在例 1-2 中, 解 $x=3.3$, $y=0.9$ 是具有最大 Z 值的唯一可行解。换句话说, 图 1-2 中相应于其他可行解的 Z 值都小于 15.6 这个最优值。因此, 对本题而言, 解 $x=3.3$, $y=0.9$ 是唯一最优解。

多重最优解(Multiple Optimal Solution)

在某些线性规划问题中, 存在一个以上的可行解, 所有这些可行解的目标函数值都等于线性规划的最优值。在这种情况下, 所有这些可行解都是最优解。我们称这个线性规划具

有多重最优解或任选最优解(Alternative Optimal Solution)。下面我们举例说明：

例 1-3　在约束条件为

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2&\leqslant 10\\ x+x_2&\geqslant 1\\ x_2&\leqslant 4 \end{aligned}\right\} \tag{1-20}$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0 \tag{1-21}$$

的条件下，求目标函数

$$\max Z=x_1+2x_2 \tag{1-22}$$

将式(1-20)中各式看作等式，分别作出它们的图形，得到直线 AB, BC, CD, DE，其可行域如图 1-3 所示。在图 1-3 中作 $Z=2$, 6 和 10 的目标函数的等值线。显然，线性规划的最优值是 10，而相应的目标函数的等值线 $x_1+2x_2=10$ 与可行域的边界 BC 相重合。因此，隅点可行解 $x_1=10$, $x_2=0$ (B 点) 和 $x_1=2$, $x_2=4$ (C 点)，以及在直线 BC 上的其他一切可行点都是最优解。

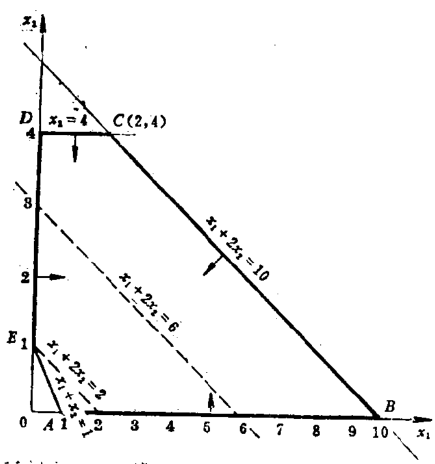

图　1-3

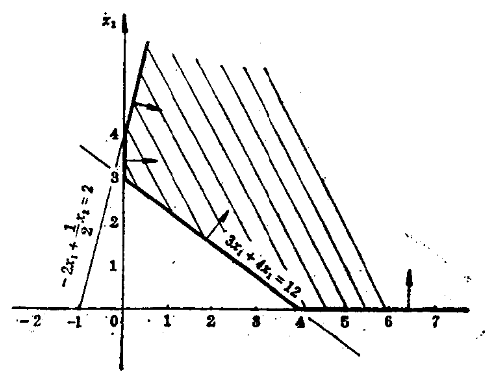

图　1-4

无界解(Unbounded Solution)

有些线性规划可能没有最优解。换句话说，如果继续不断地优化目标函数，总能无止境地找出更好的可行解。

例 1-4　求

$$\max Z=x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}^{*}\ -2x_1+\frac{1}{2}x_2\leqslant 2$$

$$3x_1+4x_2\geqslant 12$$

$$x_1,\ x_2\geqslant 0$$

解：利用图解法求解见图 1-4。从图中可以看出，可行域无界。目标函数的值 $Z\to+\infty$。当不存在有限的最优值时，则称该线性规划具有无界解。

对于实际问题，不能想象会有无界解，因为这意味着人们可以从有限的资源获取无限的利润！发生这种情况，表示数学模型不完整，这预示人们需要从实际出发，进一步提出约束条

* s.t. 为英文 subject to 的缩写，在此可译意为：受…的制约。以后同。

件，使无界趋于有界，以获得确定的最优解。

如果将例 1-3 的数学模型中再增加一条约束 $-2x_1-x_2\geqslant 4$，则可行域是空集，这时无可行解，当然也就无最优解了。

通过图解法可以看到，线性规划问题的所有可行解构成的可行域一般是凸多边形(有时可行域是无界的，甚至是空集)。可以证明：线性规划问题的可行解全体，构成一个凸多边形。而最优解如果存在，一定可以在凸多边形的顶点上达到。

已经说过，当变量数 $n\geqslant 3$ 时，图解法已不适用，这时，就应采用计算方法来求其最优解了。

§1-4 定义和定理

下节将要介绍的单纯形法，是以三个定理为基础。为了叙述这些定理，先介绍以下几个名词。

凸集：设 S 是 E^n 中的一个点集。若对于任意 $X^{(1)}\in S$，$X^{(2)}\in S$，有

$$X=\alpha_1X^{(1)}+\alpha_2X^{(2)}\in S \quad (\alpha_1+\alpha_2=1),$$

则称 S 为一凸集，换言之，凸集是这样的点集合，即如 P_1 和 P_2 是集合中的任意两点，那么连接它们的线段上所有一切点也在此集合之中。例如，图 1-5a 是凸集；而图 1-5b 不是凸集，因为有可能至少选择这样的两点（如图 1-5b），使得连接它们的线段上有点不属于集合之中；

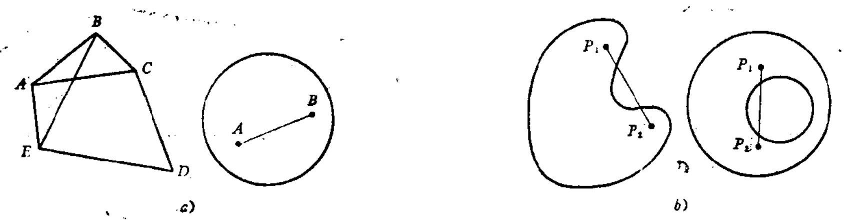

图 1-5

极点(顶点)：设 $X\in$ 凸集 S，若 S 中不存在两个不同的点 $X^{(1)}$，$X^{(2)}$，使

$$X=\alpha_1x^{(1)}+\alpha_2x^{(2)} \quad (\alpha_1+\alpha_2=1)$$

则称 X 是凸集 S 的极点。

换句话说，一个凸集 S 的极点不是 S 中任何线段的内点。

基 (Basis)：设 A 是约束方程组的 $m\times n$ 阶系数矩阵，其秩为 m。B 是 A 中 $m\times m$ 阶非奇异子矩阵 ($|B|\neq 0$)，则称 B 是线性规划问题的一个基。

这就是说，矩阵 B 是由 m 个线性独立的列向量组成。不失一般性可设

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}=(P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m)$$

称 $P_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为基向量，与基向量 P_j 相对应的变量 $x_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为基变量，否则称之为非基变量。

基本解(Basic Solution)：通过令变量的"超出数" $n-m$ 为零，然后解约束方程而得到的解。若假设约束方程组系数矩阵 A 的秩为 m。因 $m<n$，故它有若干个解。设前 m 个变量的系数列向量是线性独立的，这时式(1-15)可写成

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2m+1} & a_{2m+2} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m\,m+1} & a_{m\,m+2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1-23}$$

或

$$\sum_{j=1}^{m} p_j x_j = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} p_j x_j \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

方程组(1-23)的一个基是 $(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_m)$，设 X_B 是对应于这个基的基变量，

$$X_B=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T \tag{1-24}$$

令式(1-23)的非基变量 $x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_n=0$，并用 Gauss-Jordan 消去法，可求出一组解

$$X=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$$

这个解的非零变量的数目不大于 m，则 X 即为对应于基 B 的基本解。

由此可见，有一个基，就可求出一个基本解。**若基本解中非零变量的个数小于 m 时，此时基本解称之为退化的基本解。下面我们讨论标准型求解时，总是假定基本解为非退化的。**

基本可行解(Basic Feasible Solution)：满足非负性条件的基本解，称为基本可行解。

可行基(Feasible Basic)：对应于基本可行解的基，称为可行基。

上面提到的几种解的概念，它们之间的关系可用图 1-6 表明。

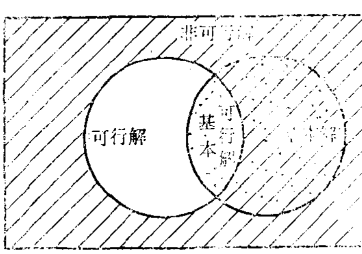

图 1-6

现在我们引用以上术语证明线性规划三个基本定理：

定理一：可行解的集合(可行集)

$$D=\left\{X \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b,\ X\geqslant 0\right\}$$

是凸集。

证明：根据凸集的定义，我们只须证明，D 中任意两点 X_1 和 X_2 的任意凸组合仍属于 D。

因为 X_1 和 X_2 是可行解，所以

$$AX_1=b,\ X_1\geqslant 0$$
$$AX_2=b,\ X_2\geqslant 0$$

考虑 X_1 和 X_2 的任意凸组合

$$X=\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2$$

其中 $\alpha_1\geqslant 0$，$\alpha_2\geqslant 0$ 且 $\alpha_1+\alpha_2=1$。显然有 $X\geqslant 0$。此外

$$AX=A(\alpha_1 X_1+\alpha_2 X_2)=\alpha_1 AX_1+\alpha_2 AX_2=b$$

所以 $X\in D$，定理证毕。