

高等学校规划教材

有限元法及其在 采矿工程中的应用

赵阳升 主编

煤炭工业出版社

高等学校规划教材

有限元法及其在采矿工程中的应用

赵阳升 主编

煤炭工业出版社

(京)新登字042号

内 容 提 要

本书系统介绍了有限元法的基本理论与方法,包括弹性力学的平面与空间问题、渗流问题、热传导问题、非线性问题、反分析问题及自适应问题,并附有计算程序及算例。书中还较系统地介绍了有限元法在采矿工程中的应用,包括在采场矿压、巷道变形与支护、煤层注水、岩层移动、采场风流及瓦斯扩散、固流耦合等方面的应用,并包含了这方面的最新研究成果。

本书可作为采煤、建井、通风安全、岩土工程等专业的本科生及研究生用教材,亦可供有关科研及现场工程技术人员参考。

高 等 学 校 规 划 教 材 有限元法及其在采矿工程中的应用

赵 阳 升 主 编
责任编辑:张 乃 新

煤炭工业出版社 出版
(北京安定门外和平门北街31号)
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

开本 $787 \times 1092 \text{mm}^{1/16}$ 印张 13
字数 304 千字 印数 1—1,185
1994年12月第1版 1994年12月第1次印刷

ISBN 7-5020-1021-1/TD·927

书号 3789 A0282 定价 7.45 元

前 言

随着电子计算机应用的普及,一种有效的数学工具——有限元法得到了广泛的应用。许多著名学者称有限元法的应用为数学上的重大突破。作为横断科学的重大发展,引起了众多学科的长足进步。追溯有限元法发展历史,大致可以分为以下三个阶段:60年代初期克拉夫(Clough)首次引用“有限单元法”的名称,到60年代中期为有限元法发展的第一阶段,这一时期的主要特征是各种新单元的发明,并被广泛应用于各种复杂工程结构(例如飞机、水坝等)。我国著名数学家冯康,沿着数学理论的道路,参与了有限元法的创始与理论奠基工作。第二阶段为60年代末期到80年代初期,这一时期的主要特点是有限元法得到了数学家的承认,并建立了完整的有限元数学理论,有限元法向非结构领域渗透,各种有限元法专著相继问世。而国际上许多学者认为:从1984年里士本(Listen)召开的“有限元计算中的精度估计和自适应网格加密”国际会议开始,进入了有限元法发展的第三个阶段,这一时期的特征是各种后验误差估计方法相继提出,各种自适应网格加密算法相继出现,以及自适应有限元法在各领域中应用研究的兴起。

70年代末期到80年代中后期,有限元法在我国从理论到应用诸方面有了重大发展,发表了大量的科学论文,出版了很多有限元法方面的著作,有限元法已成为我国高等院校许多专业本科生、研究生的必修课程。有限元法作为解决采矿工程这一类复杂问题的有力工具,已被广大采矿工作者所认识。近几年来,在研究生与本科生的教学中,总选择不到一本合适的教材,教与学都很不方便。为此我们编写了本教材。

本书力求达到三个目的:首先向读者介绍有限元法的基本方法、理论及程序设计,使读者在短期内很快掌握这门科学,而不去片面追求有限元法的高深数学理论;其次力求反映这门学科在采矿中应用的若干方面及最新研究动态,使有关专业的研究生能够很快付诸应用;第三,力求反映有限元法学科本身的发展动态。

本书由山西矿业学院赵阳升主编。第一章由张文执笔;第六章、第九章由阜新矿业学院潘一山执笔;第八章由焦作矿业学院王有凯执笔;第二章、第三章、第四章、第五章、第七章由赵阳升执笔;第十章由赵阳升、王建华执笔。

本书许多内容的完成,得到章梦涛教授的指导,本书初稿曾经李世平教授审阅,并提出部分修改意见,作者对二位教授表示衷心的感谢。

由于作者的教学经验、理论水平和实践知识所限,书中一定有不妥和错误之处,渴望读者批评指正。

赵 阳 升

1993年8月于太原

11.15/07

目 录

第一章 线弹性平面问题的有限元分析	1
第一节 弹性力学的基本方程	1
第二节 单元分析	3
第三节 整体分析	9
第四节 整体刚度矩阵的按结点存储法	14
第二章 线弹性平面问题的程序设计与计算实例分析	18
第一节 程序框图	18
第二节 计算程序介绍	19
第三节 计算实例分析	23
第四节 三角形单元网格自动形成的程序介绍	27
第三章 线弹性问题的四结点等参单元分析	33
第一节 四结点等参单元分析	33
第二节 四结点等参单元线弹性程序设计	39
第三节 实例分析	46
第四章 有限元法理论基础	49
第一节 二维渗流的基本方程	49
第二节 变分有限元法	49
第三节 伽辽金有限元法	54
第四节 积分离散法	57
第五节 非稳定二维渗流的有限元法	59
第六节 数学模型与定解条件	62
第五章 岩石力学问题的有限元分析	63
第一节 非线性问题的基本解法	63
第二节 弹塑性分析的初应变法及初应力法	66
第三节 岩石不抗拉特性分析	74
第四节 岩石流变特性的分析	78
第五节 填方与挖方等问题(施工顺序的模拟问题)	81
第六节 不连续岩体的有限元分析	83
第六章 几类采矿问题的应用分析	89
第一节 采场矿压规律的有限元分析	89
第二节 开采引起地表移动规律的有限元分析	92
第三节 煤层注水问题的有限元分析	95
第四节 巷道问题的有限元分析	100
第五节 采场风流的有限元分析	104
第七章 耦合问题	108
第一节 温度场与固体应力场的耦合作用	108
第二节 采场风流中瓦斯运移的耦合分析	114

第三节	岩体与水(不可压流体)的耦合作用	118
第四节	岩体与可压缩流体的耦合作用	121
第八章	解逆问题的数值方法	128
第一节	解逆问题的基本方法	128
第二节	基本概念	128
第三节	以解析公式为基础的逆问题的例子及程序设计	133
第四节	Nelder-Mead优化方法	136
第五节	岩石力学中的反分析	146
第六节	线弹性反分析的程序设计	151
第九章	空间有限元与无界元分析方法及应用	153
第一节	空间八结点等参单元分析	153
第二节	空间八结点节理单元分析	158
第三节	空间非线性分析	161
第四节	程序设计	162
第五节	无界元分析	175
第六节	计算实例	180
第十章	自适应多重网格有限元法	183
第一节	概述	183
第二节	多重网格法	183
第三节	后验误差估计方法	187
第四节	自适应方法	190
第五节	实例分析	194
参考文献		199

第一章 线弹性平面问题的有限元分析

工程实践中的问题,大量的非线性问题。处理这类问题大都以线性近似为基础的,无论从结构的本构关系,还是从处理方法上讲都是如此。这是因为,一方面线性近似较好地反映了大多数物质的本质,另一方面是线性数学发展得很完善的缘故。因而线弹性对于固体力学和岩土力学都是非常重要的,是研究和解决这一类工程问题需要扎实掌握和牢固奠定的基础理论和基本方法。

严格地讲,任何实际问题都是空间问题,但在某些情况下,空间问题可以近似地简化为平面问题。一般说来,弹性力学平面问题可分为两种类型:

1. 平面应力问题

设有一物体,其一个坐标方向的尺寸远小于其它两个坐标方向的尺寸,例如平板(图1-1)沿 z 轴方向的厚度很小,外力均匀作用在周边上,且沿厚度不变,并平行于板的两面(平行于坐标平面 oxy)。体积力沿厚度不变,没有沿 z 轴的分力,因此在板的二面上没有外力,在二面上各点没有任何应力,

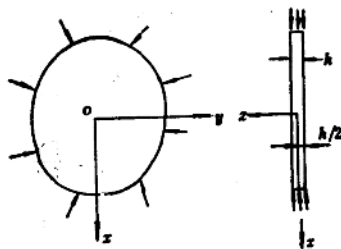


图 1-1 平面应力问题

$$\sigma_z = 0 \quad \tau_{xz} = 0 \quad \tau_{yz} = 0$$

其余 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 沿板厚取平均值。因此,在平面应力问题中只剩下应力 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$,这些应力与 z 坐标无关。这类问题称为平面应力问题。

2. 平面应变问题

设有一物体,其一个坐标方向的尺寸远大于其它两个坐标方向的尺寸,例如沿 z 轴方向的长度很大,与 z 轴垂直的各横截面相同,受到与 z 轴垂直的外力,而外力的分布不随 z 轴变化,物体的支承条件也不随 z 轴变化。在这种情况下,物体远离二端的部分将没有沿 z 轴方向的位移,而沿 x 轴与 y 轴方向的位移将与坐标 z 无关,即

$$u = f_1(x, y) \quad v = f_2(x, y) \quad w = 0$$

这类问题的实例很多,例如受土压力作用的长挡土墙、涵洞或隧道、长圆柱形管受到内水压力作用等。此应变为下列形式:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \varphi_1(x, y) & \epsilon_y &= \varphi_2(x, y) & \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \varphi_3(x, y) & \gamma_{yz} &= 0 & \gamma_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

这类问题称为平面应变问题。

以上两类问题,统称为弹性力学平面问题。

第一节 弹性力学的基本方程

考虑到在学习本课程以前,学生们都已学过了弹性力学,为此,现仅将弹性力学的基

本方程在下面列出。

静力(运动)方程

1. 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

$$\sigma_{,j,j} + X_j = 0 \quad \left(\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \right)$$

几何方程

2. 应变与位移的关系式

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

3. 应变连续方程(略)

物理方程

4. 应力和应变的关系(本构方程)

$$\sigma_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} \Theta$$

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad \Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

边界条件

如物体表面上的外力 X_v 、 Y_v 、 Z_v 已知, 则边界条件为

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

$$Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$Z_v = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n$$

即为应力边界条件(第二类边界条件)。有时, 给定边界位移作为边界条件, 即为位移边

界条件（第一类边界条件）。

以上的全部方程就构成了弹性力学的定解问题。其解析解是很难得到的，因此求数值解就显得非常必要。求数值解的关键步骤是寻求相应的泛函方程，在弹性力学中又称为虚功方程或系统总势能。

弹性系统的总位能，包括内力位能（应变能）及体力和面力位能，分别为下列各式：

$$\text{应变能} \quad w_1 = \frac{1}{2} \int_{(v)} \{e\}^T \{\sigma\} dv$$

$$\text{体力位能} \quad w_2 = - \int_{(v)} \{f\}^T \{Q\} dv$$

$$\text{面力位能} \quad w_3 = - \int_{(s)} \{f\}^T \{q\} ds$$

$$\text{总位能} \quad W = \frac{1}{2} \int_{(v)} \{e\}^T \{\sigma\} dv - \int_{(v)} \{f\}^T \{Q\} dv - \int_{(s)} \{f\}^T \{q\} ds$$

该式就是弹性力学问题相应的泛函，其泛函的极值即是弹性力学的基本方程（定解问题）。由此可知求以上泛函的极值与解弹性力学的基本方程是等价的。但前者恰为数值解提供了许多方便。

第二节 单元分析

本章给出弹性力学问题的三角形、常应变、线性插值单元的分析方法。弹性力学平面问题的未知数为二个，即每个结点均有二个未知量 u 、 v 。其它应力、应变等量都是相关量。

单元分析的基本步骤包括：结点位移→内部各点位移（单元内）→应变→应力→结点力。主要是由结点位移与应力应变关系及插值函数求单元刚度矩阵。

一、选择位移插值函数

对于简单的三角形线性插值单元，容易证明，单元内部每一点的应变为一常数。取整个区域的所有三角形单元中的一个单元来研究（图1-2），其三个结点记为 i 、 j 、 m ，相应的位移为 u_i 、 u_j 、 u_m ， v_i 、 v_j 、 v_m 。

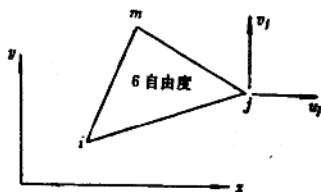


图 1-2

选择该三角形单元的插值函数为线性函数形式，则三角形单元内任一点的位移表示为

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 y$$

$$v = B_1 + B_2 x + B_3 y$$

则位移函数

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

二、结点位移与多项式系数的关系

按式（1-1），将三角形三个结点坐标代入即可得到 i 、 j 、 m 点的位移值

$$u_i = A_1 + A_2 x_i + A_3 y_i \quad (1-2)$$

$$u_j = A_1 + A_2 x_j + A_3 y_j \quad (1-3)$$

$$u_m = A_1 + A_2 x_m + A_3 y_m \quad (1-4)$$

上述三式用矩阵形式表示

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (1-5)$$

求解式 (1-5) 可得

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} x_j y_m - x_m y_j & x_m y_i - x_i y_m & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_m & y_m - y_i & y_i - y_j \\ x_m - x_j & x_i - x_m & x_j - x_i \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

式中

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

为三角形 ijm 的面积。

一般情况下, 引入下列记号 a_l, b_l, c_l ($l = i, j, m$) 为上式中的对应量

即

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad a_j = x_m y_i - x_i y_m, \quad a_m = x_i y_j - x_j y_i,$$

$$b_i = y_j - y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad b_m = y_i - y_j,$$

$$c_i = x_m - x_j, \quad c_j = x_i - x_m, \quad c_m = x_j - x_i,$$

则有:

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

对于位移 v , 也可求出类似的表达式

$$\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

在有限元分析中, 为了便于集合, 总是将每个结点的位移参数聚集在一起, 因此位移矢量写为下列形式

$$\{\delta\}^T = [u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m] \quad (1-9)$$

由式 (1-8) 及式 (1-9) 构成矩阵 $[C]^{-1}$

$$[C]^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{pmatrix} \quad (1-10)$$

按式 (1-1)

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R] & [0] \\ [0] & [R] \end{bmatrix} [C]^{-1} \{\delta\} = [N] \{\delta\} \quad (1-11)$$

所以形函数

$$[N] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_i + b_i x + c_i y & 0 & a_j + b_j x + c_j y \\ 0 & a_i + b_i x + c_i y & 0 \\ 0 & a_m + b_m x + c_m y & 0 \\ a_j + b_j x + c_j y & 0 & a_m + b_m x + c_m y \end{bmatrix}$$

三、应变-结点位移关系

按弹性力学的应变与位移的关系式

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1-12)$$

将 (1-11) 式按 (1-12) 式求导数, 则求出相应的应变

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2\Delta} (c_i v_i + c_j v_j + c_m v_m) \end{aligned} \quad (1-13)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + b_i v_i + c_j u_j + b_j v_j + c_m u_m + b_m v_m)$$

则应变矩阵 $[B]$ 可以写成

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

四、应力-应变关系

下面分别讨论平面应力和平面应变两种情形, 只考虑各向同性材料。

1. 平面应力

在平面应力问题中, 在 xy 平面内只出现三个应力分量 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, 其余的三个应力分量 $(\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz})$ 均等于零。故三维弹性应力-应变方程可简化为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

也可按矩阵形式写成

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-16)$$

这就是平面应力状态的本构方程。

2. 平面应变

与平面应力所不同之处在于 $\sigma_z \neq 0$, 而 $\varepsilon_z = 0$, 因此, 用应力表示应变更更为合适, 即

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (1-17)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

由此得

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu(1+\nu) & 0 \\ -\nu(1+\nu) & 1-\nu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-18)$$

解方程 (1-18) 得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1-19)$$

将式 (1-16) 和式 (1-19) 的系数矩阵用下式代替

$$\text{平面应力: } c_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad c_2 = \nu \quad c_{12} = c_1(1-c_2)/2$$

$$\text{平面应变: } c_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad c_2 = \frac{\nu}{1-\nu} \quad c_{12} = c_1(1-c_2)/2$$

则有

$$[D] = \begin{bmatrix} c_1 & c_1 c_2 & 0 \\ c_1 c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

由弹性矩阵 $[D]$ ，应变矩阵 $[B]$ 及位移即可给出单元应力表达式：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_1 & c_1 c_2 & 0 \\ c_1 c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_1 & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_1 & 0 & c_m \\ c_1 & b_1 & c_1 & b_1 & c_m & b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (1-21)$$

式(1-21)的应力矩阵的系数都不是 x 、 y 的函数，由此可知，在整个单元上应力是不变的。这就导致相邻单元之间的应力不连续。实践中将应力看作是三角形单元形心处的值，仍可得到穿过整个要研究的区域的一条光滑应力流。

五、弹性力学问题的泛函的离散及极值

按以上所给出的三角形单元离散公式，代入总位能中，可得

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{(\Delta)} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dv - \int_{(\Delta)} \{f\}^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} \{f\}^T \{q\} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{(\Delta)} \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv - \int_{(\Delta)} [N]^T \{\delta\}^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} [N]^T \{\delta\}^T \{q\} ds \\ &= \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \int_{(\Delta)} \{\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dv - \int_{(\Delta)} [N]^T \{\delta\}^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} [N]^T \{\delta\}^T \{q\} ds \right\} \end{aligned} \quad (1-22)$$

式中 N 为三角形单元总数， (Δ) 、 (Δ_s) 分别为三角形区域和三角形单元边界。经过离散，原泛函 W 的变分问题就转化为 W 对变量 $\{\delta\}$ 的极值问题。

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = 0$$

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_{(\Delta)} [B]^T [D] [B] dv \{\delta\} - \int_{(\Delta)} [N]^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} [N]^T \{q\} ds \right\} = 0 \quad (1-23)$$

括号中的项即为单元刚度矩阵、单元位移、单元荷载矢量。

$$[K_e] = \int_{(\Delta)} [B]^T [D] [B] dv$$

$$\{P_e\} = - \int_{(\Delta)} [N]^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} [N]^T \{q\} ds$$

按单元叠加，即可得整体刚度矩阵和整体荷载矢量

$$[K] = \sum_{i=1}^N \left\{ \int_{(\Delta)} [B]^T [D] [B] dv \right\}$$

$$\{P\} = \sum_{i=1}^N \left\{ - \int_{(\Delta)} [N]^T \{Q\} dv - \int_{(\Delta_s)} [N]^T \{q\} ds \right\}$$

六、单元刚度矩阵及单元荷载矢量

从上面离散分析，可以看到用离散方法求解弹性力学问题，必须先找出每个单元的刚

第三节 整体分析

在前面第一节、第二节中已给出了弹性力学的泛函，以及常应变三角形单元离散后的单元方程及整体方程，并给出了单元位移、应力、应变、单元荷载矢量和单元刚度矩阵。本节进一步介绍由单元刚度矩阵形成总体刚度矩阵的方法，总体荷载矢量的形成，约束条件（第一类边界条件）的引入，解方程组的方法，以及整个区域用三角形单元离散的方法，结点编号、单元编号等等。这里介绍按定带宽集成总刚的方法。

一、整体刚度矩阵的集成

前面已给出相应于三角形单元（ L ）的单元刚度矩阵（表1-1）。该单元刚度矩阵是一个 6×6 阶的矩阵，相应于结点 i 、 j 、 m 在矩阵中的排列方式为

第1、2行，相应于 i 点的 u 、 v （图1-3）。

第3、4行，相应于 j 点的 u 、 v 。

第5、6行，相应于 m 点的 u 、 v 。

而以上每一行的元素，又都相应于单元中的局部编码 $[K_{i'j'}]$ ，其中 i' 、 j' 为（1、2、3、4、5、6）。设整个区域划分为 M 个单元， N 个结点，那么整体刚度矩阵即是 $2N \times 2N$ 阶矩阵。其行的排列顺序按结点总体编码乘以2的排列方式。如何由单元刚度矩阵组集成总体刚度矩阵，也就是如何实现单元刚度矩阵到整体刚度矩阵的搬家和叠加。其总的思路是，寻找单元刚度矩阵内的元素 $K_{i'j'}$ 对应的整体刚度矩阵元素 K_{ij} 。例如，在一个网格划分中，共剖分成80个单元，100个结点。第50号单元相应的结点号为20、21、30，即20、21、30对应于 i 、 j 、 m 。那么单元刚度矩阵中的 K_{32} 对应于 j_1 、 i_2 ，即 j 结点的 u ， i 结点的 v ，那么搬到整体刚度矩阵中对应的元素应为 $K[21 \times 2 - 1, 20 \times 2] = K[41, 40]$ 。

例如，第20号单元相应的结点为80、90、91，那么单元刚度矩阵中的元素 $K[6, 6]$ 对应的为 $K[91 \times 2, 91 \times 2] = K[182, 182]$ 。由单元刚度矩阵形成总体刚度矩阵的方法是边形成、边组集、边叠加，即对于第 L 号单元，首先形成单刚，进而找到对应的总刚元素，并叠加到总刚上，再考虑下一个单元，以此循环至所有单元形成完为止。

这一部分工作相当于泛函方程中的求和，工作较麻烦、细腻，一定要十分认真。

二、总体荷载矢量

一般来说，常遇到的荷载有以下几种：

- 1) 作用在结点上的荷载；
- 2) 在单元的一条边界上的均匀荷载；
- 3) 常体力。

其它类型的荷载，如离心荷载、温度荷载、非均匀分布荷载等，在学习和应用过程中再继续探讨。

1. 作用在结点上的荷载

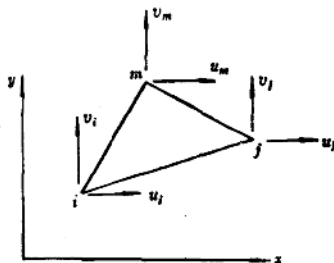


图 1-3

在有限元分析程序中,这是最简单的一种。这里所介绍的方法是将结点荷载直接作为输入数据,按结点分别输入荷载分量 X_N 、 Y_N ,然后再叠加到总体荷载矢量 SL 上去即可。

$$X_N \rightarrow SL(N*2-1)$$

$$Y_N \rightarrow SL(N*2)$$

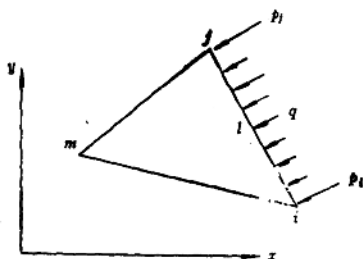


图 1-4

2. 作用在单元边上的均布荷载

一般说来,对于非线性插值单元,以及其它复杂的情况,应严格按照泛函方程中的荷载项,将均布荷载简化到结点上。但对于线性插值元,且荷载简单的情况下,可以采用静力学的方法按照静力等效原则将均布荷载简化到结点上。

例如,单元 ijm ,在 ij 边上作用荷载 q ,如图1-4所示。按静力学原理

$$p_i = ql/2$$

$$p_j = ql/2$$

然后将 p_i 、 p_j 分解到 OXY 坐标系的 X 轴与 Y 轴上,得到 p_{ix} 、 p_{iy} 、 p_{jx} 、 p_{jy} ,则 $p_{ix} = X_i$, $p_{iy} = Y_i$, $p_{jx} = X_j$, $p_{jy} = Y_j$,即作为原始的输入数据。

三、约束条件的引入(第一类边界条件的处理)

在所有问题中,约束条件的处理是求解的关键步骤。这里介绍四种处理约束的方法,不计划侧重于任何一种,因为它是因各人的兴趣和处理问题的方便而异的。

为了便于讨论,设容量为 $N \times N$ 的矩阵,其形式如下

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots & a_{nN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nn} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

其中 X_i 是结点位移, b_i 是结点荷载,而且位移 X_n 已经规定等于 α , α 可以是零,也可以是非零值。

方法1

在此方法中,将列矢量乘 α 并移到右端时,删去相应于规定变量的行矢量。该矩阵就缩小为容量为 $(N-1) \times (N-1)$ 阶,并取下述形式

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1, n-1} & a_{1, n+1} \cdots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2, n-1} & a_{2, n+1} \cdots a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1, 1} & a_{n-1, 2} \cdots a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n+1} \cdots a_{n-1, N} \\ a_{n+1, 1} & a_{n+1, 2} \cdots a_{n+1, n-1} & a_{n+1, n+1} \cdots a_{n+1, N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} \cdots a_{N, n-1} & a_{N, n+1} \cdots a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1, n} \\ a_{n+1, n} \\ \vdots \\ a_{Nn} \end{pmatrix}$$

此法只适用于手算,因为它具有降阶矩阵的特点。对于自动计算来说,它涉及重新安排系数,这就远远超过因降低矩阵阶数得到的好处,可能对待特征值问题是个例外,在那里内存是很关键的。

为了计算对应于位移 X_n 的反力,必须存贮原来的行矢量,再乘以所算出的位移,亦即反力被给出为

$$R_n = \sum_{i=1}^N a_{ni} X_i - b_n$$

对于 $\alpha = 0$ 这种更一般情形来说,当然不需要进行如上所述的右端 α 乘积项的修正。

方法2

与方法1相比,此法易懂也容易实现。使与 X_n 对应的对角线系数为1。而对这一行余下的系数使之为零,为保持矩阵对称,对相应列的系数乘以 α ,并移到等号右边,然后将该行元素(对角线元素除外)也使之为零。最后用 α 取代系数 b_n ,方程最终形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1, n-1} & 0 & a_{1, n+1} \cdots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2, n-1} & 0 & a_{2, n+1} \cdots a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1, 1} & a_{n-1, 2} \cdots a_{n-1, n-1} & 0 & a_{n-1, n+1} \cdots a_{n-1, N} \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \\ a_{n+1, 1} & a_{n+1, 2} \cdots a_{n+1, n-1} & 0 & a_{n+1, n+1} \cdots a_{n+1, N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} \cdots a_{N, n-1} & 0 & a_{N, n+1} \cdots a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ \alpha \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n-1, n} \\ 0 \\ a_{n+1, n} \\ \vdots \\ a_{Nn} \end{pmatrix}$$

对应于 X_n 的反力,计算同上。

方法3

方法3需要的运算很少,当不求反力,且有非零位移时,本法比方法4更可取。本方法是将对应于 X_n 的对角线系数乘以一个很大的数,比如 10^{12} ,荷载项 b_n 用 $\alpha \times a_{nn} \times 10^{12}$ 代替,修改后的方程如下

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} & \cdots a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} & \cdots a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \times 10^{12} \cdots a_{nN} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} \cdots a_{Nn} & \cdots a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \alpha \times a_{nn} \times 10^{12} \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \quad (1-27)$$

考虑到同一行的系数接近于同一数量级这一事实,便很容易看出与 X_n 相应的方程式,事实上几乎完全等价于 $X_n = a_n$ 。

方法4

本方法包括将一个极大的数,比如说 10^{50} ,加到对角线的系数上,在实际上相当于用一个非常硬的弹簧把结构“接地”。对于刚性支座,我们得到一个很小的位移值,但不是绝对零,支座反力便可以计算如下式所示