华东师范大学教材出版基金资助出版

实变函数简明教程

魏国强　胡善文　著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数简明教程/魏国强,胡善文著.—上海:华东师范大学出版社,2001.6

ISBN 7-5617-2572-8

Ⅰ.实… Ⅱ.①魏… ②胡… Ⅲ.实变函数-师范学校:高等学校-教材 Ⅳ.O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 021604 号

实变函数简明教程

著　　者　魏国强　胡善文

封面设计　周艳梅

版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社

发行部　电话 021-62865537

传真 021-62860410

http://www.ecnupress.com.cn

社　　址　上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 者　华东师范大学印刷厂

开　　本　890×1240　32 开

印　　张　4.75

字　　数　120 千字

版　　次　2001 年 6 月第 1 版

印　　次　2001 年 6 月第 1 次

印　　数　001-2 500

书　　号　ISBN 7-5617-2572-8/O·105

定　　价　8.00 元

出 版 人　朱杰人

编者的话

本书是按照教育部1998年“实变函数”教学大纲征求意见稿并结合师范院校特点编写的.

许多师范院校数学系在最近的教学改革中,对实变函数的学时作了压缩.我们在编写中注意做到以最精简的形式介绍这门学科的核心内容,把重点放在建立直线上勒贝格测度和积分,对某些内容作了删减,例如在可测函数一章中略去了叶果洛夫定理,至于微分、不定积分、重积分等尽可能做到简略,以便压缩篇幅.

建立勒贝格积分有各种方法,我们采用先建立非负简单函数的积分,然后用取上确界建立非负可测函数的积分,最后建立一般可测函数的积分处理办法.

本书中单调函数的可微性是通过维它利覆盖定理给出证明,如果学时紧张,可略去它们的证明.

书中每一节都附有一定数量的习题.在横线前面的习题是基本题,这些习题对学习与掌握正文的内容是必需的;横线后的习题是对正文内容的补充,可由教师决定讲授与否.在每一章最后的总练习题中收集了一部分需要一定综合能力与技巧才能解决的习题,可供学生选做.

本书正文由魏国强编写,胡善文编写了书中的习题部分,最后由魏国强定稿.

张奠宙教授审阅了书稿,并提出许多宝贵意见.

在本书编写过程中,得到了华东师范大学数学系领导的关心与支持,并为编者试用该书讲稿提供各种方便.本书能尽快与读者见面也归功于华东师范大学出版社同志们的辛勤工作.

编者对以上所有为本书作出过贡献的同志表示诚挚的谢意.

由于我们水平有限，书中难免存在不少缺点与疏漏之处，恳请使用本书的教师与读者予以批评和指正.

编者

2001 年 1 月于华东师范大学

目　　录

引　言

18 世纪中叶,牛顿与莱布尼茨建立了微积分. 黎曼将柯西(Cauchy)原来只对连续函数定义的积分概念推广成黎曼积分,即大家在数学分析中学过的定积分,从而扩大了积分的应用范围,但是在有界函数的范围内,黎曼积分还是存在着很大的缺点,主要表现在以下几个方面:

(1) 有许多看上去非常简单的函数(如[0,1]区间上的迪里克雷(Dirichlet)函数 $D(x)$,只取 0,1 两个值)却黎曼不可积.

(2) 黎曼积分与极限可交换的条件太严.

我们知道一列黎曼可积函数的极限函数(即使有界)不一定黎曼可积. 因此在积分与极限交换问题上,黎曼积分的局限性就特别突出. 大家知道,为了使

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x,$$

对一列收敛的黎曼可积函数列 $\{f_n(x)\}$ 能成立,当然要求 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 是黎曼可积的. 对函数列 $\{f_n(x)\}$ 加上一致收敛的条件可以保证极限函数黎曼可积,同时也保证了上面等式的成立. 可是这一充分条件不但非常苛刻而且检验起来也非常不便. 由于积分与极限交换问题不能顺利解决,就大大降低了黎曼积分的应用性.

(3) 积分运算不完全是微分运算的逆运算.

我们知道任一黎曼可积函数 $f(x)$ 的不定积分 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $f(x)$ 的所有连续点处都有 $F'(x) = f(x)$,换言之,就是积分后再

微分可以还原(除了在不连续点).

但是有例子说明,一个可微函数 $F(x)$ 的导函数 $f(x)$ 即使有界也不一定黎曼可积(伏尔托拉(Volterra) 的例子),所以也就谈不上不定积分$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$. 因此在黎曼积分范围内,积分运算只是部分地成为微分的逆运算.

鉴于黎曼积分的上述缺陷,人们长期以来就致力于改进的尝试,直到 1902 年法国数学家勒贝格才成功地引入了一种新的积分,后人称之为勒贝格积分. 由于它在很大程度上摆脱了上述黎曼积分的困境,而且大大地扩充了可积函数的范围,所以今天已成为现代分析数学中不可缺少的工具. 我们在下面主要就是介绍这一理论.

我们首先分析一下迪里克雷函数 $D(x)$为什么在$[0,1]$上不可积? 在数学分析中有如下可积判别条件:

对任给的正数 ε 和 η,存在分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,使振幅 $\omega_i > \eta$ 的那些小区间的长度之和小于 ε.

上述判别条件可粗略地理解成: 在 $\|T\| \to 0$ 的过程中,其振幅不能缩小的那些对应项的子区间的长度之和可以很小.

由于 $D(x)$在每个小区间上的振幅都等于 1,不能在 $\|T\| \to 0$ 过程中缩小,因此不可积.

但是函数的振幅只涉及到函数值,这就启发我们为了保证振幅很小,可以对函数值作分划: 设 $m < f(x) \leqslant M, x \in [a,b]$. 对任给的正数 $\varepsilon > 0$, 作区间$[m,M]$的分划 D:

$$D: m = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = M,$$

使 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. 令 $E_i = \{x \in [a,b] \mid y_{i-1} < x \leqslant y_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则$\{E_i\}$互不相交且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = [a,b]$. 于是函数 $f(x)$在每个 E_i 上的振幅都满足

$$\omega_i = \sup_{x\in E_i} f(x) - \inf_{x\in E_i} f(x) \leqslant y_i - y_{i-1} < \varepsilon.$$

因此在 $\|D\|\to 0$ 的过程中，函数在每个子集上的振幅也随之减小．上述过程相当于把区间$[a,b]$分成有限个互不相交的子集 $D=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$，而在每一个子集上的振幅很小（若坚持分成有限个小区间就不能保证这一点）．勒贝格正是利用这个想法，用分划 D 代替 T，然后定义他的新积分为积分和

$$\sum_{i=1}^{n} y_i mE_i$$

的极限，其中 mE_i 为我们将在后面第二章中讨论的点集 E_i 的测度．另一方面，为了使每个 mE_i 都有意义，我们又必须对函数 $f(x)$ 加以限制，即要求 $f(x)$ 是将在第三章中介绍的可测函数（比连续函数类更广泛的函数类）．最后就可建立所要求的勒贝格积分．

本教程的任务就是按上述步骤，逐步建立新的积分并讨论它的性质．

第一章　点　　集

实变函数是一门大量运用集合论知识的数学课程. 在集合论的基本知识的基础上，我们将在本章补充集合基数，直线中的开集、闭集等概念，为建立勒贝格测度与积分作准备.

§1　集合及映照

1. 集合

设 A 是一个集合，x 是 A 的元素，我们称 x 属于 A，记为 $x \in A$. x 不是 A 的元素，称 x 不属于 A，记为 $x \overline{\in} A$.

一个集合由且只由其全部元素所确定. 因此，两个集合 A 与 B 当且只当它们有完全一致的元素时称为相等，记为 $A = B$.

为了形式上的方便，我们引进不含任何元素的集合，称之为空集，记为$\varnothing$.

两个集合 A 与 B 如果具有关系：A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）；或称 B 包含 A，记为 $B \supset A$. 空集可以看成任何集合的子集. 若 A 是 B 的子集但不等于 B，则称 A 为 B 的真子集. 例如全体有理数是全体实数的真子集.

必须注意$\in$和$\subset$的区别. $\in$表示集合和它的元素之间的关系. $\subset$表示集合和集合之间的关系. 故当 $a \in A$ 时，不能写成 $a \subset A$，但可以写成 $\{a\} \subset A$，这里$\{a\}$表示只含一个元素 a 的集合.

包含关系显然具有下面的性质：对任何集合 A、B、C 均有

(1) $A \subset A$;

(2) $A \subset B, B \subset A$,则 $A = B$;

(3) $A \subset B, B \subset C$,则 $A \subset C$.

通常证明两个集合相等,总是利用(2).

若 $A \cap B = \varnothing$,则称 A 与 B 不相交,否则称 A 与 B 相交.

给定一簇集合 $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$,其中 α 是在一固定的**指标集** I 中变化的**指标**. 则 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 与 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 分别表示它们的并(和)集与交集.

注意,由若干个集合组成并集时,按照集合的定义,同时出现在两个或两个以上的被并集中的元素在并集中只能算做一个元素.

关于集合的并与交满足:

(1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;(交换律)

(2) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;(结合律)

(3) $A \cup \left(\bigcap\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$, $A \cap \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$;(分配律)

(4) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

(5) $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$;

(6) 若 $A_\alpha \subset B_\alpha, \alpha \in I$,则

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha.$$

这可由定义直接推出.

若 $S \supset A$,差集 $S - A$ 也称为 A 关于 S 的**余集**,记为 $\mathscr{C}_S A$.

如果在某个问题中所涉及的集合都被包含在某个集合 S 之中,则称 S 为该问题的**基本集**. 此时集合 A 关于基本集 S 的余集简记为 $\mathscr{C} A$. 由于我们以后所讨论的集合都是有限维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 中的集合,所以除非另作说明,总取基本集为 $\mathbf{R}^n$.

显然,求余集运算具有下面的性质:

(1) $\mathscr{C}_S S = \varnothing$, $\mathscr{C}_S \varnothing = S$;

(2) $A \cup \mathscr{C}_S A = S$, $A \cap \mathscr{C}_S A = \varnothing$;

(3) $\mathscr{C}_S(\mathscr{C}_S A) = A$;

(4) $A - B = A \cap \mathscr{C}_S B$;

(5) 若 $A \subset B$,则 $\mathscr{C}_S A \supset \mathscr{C}_S B$;

(6) $\mathscr{C}_S(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha$;

(7) $\mathscr{C}_S(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha$.

我们只证明(7),其余留给读者自证. 设 $x \in \mathscr{C}_S(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)$,则 $x \overline{\in} \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$. 于是,必存在某一 $\alpha_0 \in I$,使得 $x \overline{\in} A_{\alpha_0}$. 故 $x \in \mathscr{C}_S A_{\alpha_0}$,从而 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha$,这证明了

$$\mathscr{C}_S(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha.$$

反之,设 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha$,则存在某一个 $\alpha_0 \in I$,使得 $x \in \mathscr{C}_S A_{\alpha_0}$,因而 $x \overline{\in} A_{\alpha_0}$. 于是 $x \overline{\in} \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$,这意味着 $x \in \mathscr{C}_S(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)$,因此

$$\bigcup_{\alpha \in I} \mathscr{C}_S A_\alpha \subset \mathscr{C}_S(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha).$$

由所得的两个包含关系,便知等式(7)成立.

上述等式(6)与(7)统称为**德·摩根**(De Morgan)**公式**. 这是一个很有用的公式. 借助德·摩根公式,我们能通过余集运算把并集变为交集,把交集变并集.

2. 映照

在本段中我们要把函数概念加以推广.

定义 1.1.1 设 A、B 为两个非空集合,如果存在某一法则ϕ,使每个 $x \in A$ 有唯一确定的 $y \in B$ 和它对应,则称ϕ为 **A 到 B 内的映照(也称映射)**,记为

$$\phi: A \longmapsto B.$$

当映照ϕ使 y 和 x 对应时,y 称为 x 在映照ϕ下的**象**,记作 $y = \phi(x)$,也可表示为

$$\phi: x \longmapsto y.$$

对于任一固定的 y,称适合关系 $y=\phi(x)$ 的 x 全体是元素 y 在ϕ之下的**原象**. 集合 A 称为映照ϕ的**定义域**,记为 $\mathscr{D}(\phi)$. 设 C 是 A 的子集,C 中所有元素的象的全体,记为$\phi(C)$,称它是集 C 在ϕ之下的**象**. 设 $E\subset B$, 称 E 中元素的原象全体为集合 E 关于映照ϕ的**原象集**,记为$\phi^{-1}(E)$,即

$$\phi^{-1}(E)=\{x\in A \mid \phi(x)\in E\}.$$

$\phi(A)$称为映照ϕ的**值域**,记为 $\mathbf{R}(\phi)$. 如果 $\phi(A)=B$, 就称ϕ是 **A 到 B 上的映照**,也叫作映照ϕ是"到上"的.

显然,如果ϕ是由 A 到 B 上的映照,它一定也是 A 到 B 内的映照,但其逆一般不真.

特别地,如果值域 B 是一数集(实数集或复数集),映照ϕ就是定义在集 A 上的函数. 如果 A、B 都是数集,它们之间的映照就是数学分析中研究的函数了. 由此可见,映照概念是函数概念的推广.

容易验证下列简单事实:

(1) $\phi(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\phi(A_i)$;

(2) $\phi(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i)\subset\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\phi(A_i)$;

(3) 若 $E_1\subset E_2$,则$\phi^{-1}(E_1)\subset\phi^{-1}(E_2)$;

(4) $\phi^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\phi^{-1}(E_\alpha)$;

(5) $\phi^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I} E_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\phi^{-1}(E_\alpha)$;

(6) $\phi^{-1}(\mathscr{C}E)=\mathscr{C}(\phi^{-1}(E))$.

设 S 是一固定的集合,A 是 S 的子集. 作 S 上的函数

$$\chi_A^S(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in S\backslash A.\end{cases}$$

称 $\chi_A^S(x)$为集 A 关于 S 的**特征函数**. 与余集的情形相类似,当 S 是

基本集时,集 A 关于 S 的特征函数也常简写成 $\chi_A(x)$. 显然子集完全由它的特征函数所确定,即当 $\chi_A^S(x)=\chi_B^S(x)$, $x\in S$ 时,有 $A=B$.

在各种映照之中,我们着重讨论一对一的映照.

定义 1.1.2 设ϕ为 A 到 B 内的映照. 如果对于任何 x_1、$x_2\in A$,由 $x_1\neq x_2$,必可得到 $\phi(x_1)\neq\phi(x_2)$,则称映照ϕ是 A 到 B 内的**单射**. 如果 $\phi(A)=B$,则称ϕ是 A 到 B 上的**满射**. 若ϕ既是单射又是满射,则称ϕ是 A 到 B 上的**一一映照**,也称**一一对应**,有时写作 1—1 对应,也记为 $A\overset{1-1}{\underset{\phi}{\longmapsto}}B$.

显然任何一个严格单调函数都可以看成它的定义域到值域中的 1—1 对应. 又如$[0,1)$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ x, & 0<x<1,\end{cases}$$

是$[0,1)$到$(0,1]$上的一一映照.

定义 1.1.3 设ϕ为 A 到 B 上的一一映照. 作 B 到 A 的映照如下:如果ϕ: $x\longmapsto y$,令 ψ: $y\longmapsto x$. 由于ϕ是一一映照,因此 ψ 确实使唯一的 x 与 y 相对应,即 ψ 是映照. 我们称 ψ 是ϕ的**逆映照**,记 ψ 为 ϕ^{-1},并且

$$\phi^{-1}:B\overset{1-1}{\longmapsto}A.$$

逆映照是反函数概念的推广. 一个严格单调函数 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$可以看成是映照 $f(x)$的逆映照.

习 题

1. 设$\{A_n\}$是一列集合. 作 $B_1=A_1$, $B_n=A_n-\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}A_j\right)$, $n>1$. 证明$\{B_n\}$是一列互不相交的集,且 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

2. 证明:

(1) $\phi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\phi(A_i)$;

(2) $\phi(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty}\phi(A_i)$;

(3) 若 $E_1 \subset E_2$,则$\phi^{-1}(E_1) \subset \phi^{-1}(E_2)$;

(4) $\phi^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}E_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I}\phi^{-1}(E_\alpha)$;

(5) $\phi^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I}E_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I}\phi^{-1}(E_\alpha)$;

(6) $\phi^{-1}(\mathscr{C}E) = \mathscr{C}(\phi^{-1}(E))$.

3. 证明:

(1) $A = S$ 等价于 $\chi_A^S(x) \equiv 1$;$A = \varnothing$ 等价于 $\chi_A^S(x) \equiv 0$;

(2) $A \subset B$ 等价于 $\chi_A^S(x) \leqslant \chi_B^S(x), x \in S$;

(3) $\chi_{A\cup B}^S(x) = \chi_A^S(x) + \chi_B^S(x) - \chi_{A\cap B}^S(x)$;

(4) $\chi_{A\cap B}^S(x) = \chi_A^S(x) \cdot \chi_B^S(x)$;

(5) $\chi_{A\setminus B}^S(x) = \chi_A^S(x) - \chi_{A\cap B}^S(x)$;

(6) $\chi^S_{\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha}(x) = \max_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}^S(x)$;

(7) $\chi^S_{\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha}(x) = \min_{\alpha\in I}\chi_{A_\alpha}^S(x)$.

4. 设 $f: X \longmapsto Y$ 是满射. 证明下列等价:

(1) f 是一一映射;

(2) 对任何 $A, B \subset X$,有 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

(3) 对任何 $A, B \subset X$,若 $A \cap B = \varnothing$,则 $f(A) \cap f(B) = \varnothing$.

5. 证明映射 $f: X \longmapsto Y$ 是满射的充要条件是对任何 $E \subset Y$,有 $f(f^{-1}(E)) = E$.

6. 设 f 是集 X 上的实函数,证明:

$$\{x \mid x \in X, f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid x \in X, f(x) > \frac{1}{n}\right\}.$$

右边“$>$”能否改成“$\geqslant$”?

7. 设$\{f_\lambda(x)\}$是定义在集合 X 上一族实值函数,对任意的 $a \in \mathbf{R}^1$,证明:

$$\{x \mid \sup_\lambda f_\lambda(x) > a\} = \bigcup_\lambda \{x \mid f_\lambda(x) > a\}.$$

右边“$>$”能否改成“$\geqslant$”?

8. 设 $f(x), f_n(x), n = 1,2,\cdots$ 是定义在集合 E 上的实函数,试证

$$\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\left\{x \in E \mid |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{r}\right\}$$

是 E 中使 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ 的点集.

9. 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的函数列，试用点集

$$\left\{x \mid f_j(x) \geqslant \frac{1}{k}\right\} \quad (j,k = 1,2,\cdots)$$

表示点集

$$\{x \mid \overline{\lim_{j\to\infty}} f_j(x) > 0\}.$$

§2 对等与基数

本节的主要任务是研究集合中元素的“个数”的概念.

两个集合中所含元素的多少，是通过比较形成的. 例如在一个大教室里，如果每个学生都有一个坐位，而且还有坐位空着，那说明学生比坐位少；如果坐位坐满后至少还有一个学生没有坐位坐，则说明学生多于坐位；如果每个学生都有一个坐位，而且每个坐位上都有一个学生，那末我们根本不用一个一个地去“数”，便立刻知道教室中人数与坐位数是相同的，这是因为在它们的元素之间正好可以一个对一个地对应起来，不多也不少. 这种对应的思想将帮助我们把元素个数的概念推广到无限集.

定义 1.2.1 设 A、B 是两个非空集合. 如果存在 A 到 B 上的一个一一映照 ϕ，则称 A 与 B **对等**，记为 $A \sim B$；规定 $\varnothing \sim \varnothing$.

利用对等的概念，我们现在可以给出有限集和无限集的一个不依赖于元素个数概念的定义.

定义 1.2.2 如果集合 $A = \varnothing$ 或者 A 和自然数的某一截断 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等，则称 A 为**有限集**，否则称为**无限集**.

例 1 {正奇数全体}与{正偶数全体}对等. 事实上，只要令 $\phi(x) = x + 1, x = 1,3,5,\cdots$ 即可.

例 2 {自然数全体}与{正偶数全体}对等. 这只需令 $\phi(x) = 2x, x = 1,2,3,\cdots$ 即可.

例 3 区间 $(0,1)$ 和全体实数 $\mathbf{R}^1$ 对等，这只需对每个 $x \in (0,1)$ 令 $\phi(x) = \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$.

例 4 设 A 与 B 是两个同心圆周上的点集，A 为外圆. 对 A 中每一点 x，则 x 与圆心的连线必交 B 于一点 y. 于是映照 ϕ: $x \to y$ 是 A 到 B 上的一一映照，所以 $A \sim B$.

值得注意的是，若将此两圆周展开为直线时，则此两线段的长度并不相同. 这告诉我们，一个较长的线段并不比另一个较短线段含有"更多的点".

例 3 还表明，无限长的线段也不比有限长的线段有"更多的点".

例 3 和例 4 说明，一个无限集可以和它的一个真子集对等. 可以证明，任何无限集必然与它的某个真子集对等，而有限集则与它的任何真子集都不对等. 由此可以看到无限集与有限集之间的深刻差异. 可以与真子集对等这一性质正是无限集的特征，也可用来作为无限集的定义.

显然，对等关系具有以下性质：对任何集合 A, B, C，均有

(1) $A \sim A$；(反射性)

(2) $A \sim B$，则 $B \sim A$；(对称性)

(3) $A \sim B, B \sim C$，则 $A \sim C$. (传递性)

定理 1.2.1 设 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 为两集列. $\{A_n\}$ 中任何两个集不相交，$\{B_n\}$ 中的集也两两不相交，即当 $n_1 \neq n_2$ 时，有

$$A_{n_1} \cap A_{n_2} = \varnothing,\ B_{n_1} \cap B_{n_2} = \varnothing.$$

如果对于每个 n，都有 $A_n \sim B_n$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

证明可由定义直接得出.

判断两个集合是否对等，常用下面的定理.

定理 1.2.2(Bernstein 定理) 设 A、B 是两个集合. 若 A 对等