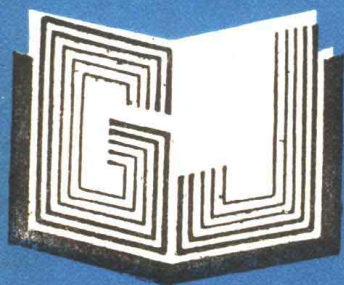


988368



高等学校教材

钢筋混凝土有限元分析

河海大学 康清梁 主编



75

988466

高等学校教材

钢筋混凝土有限元分析

河海大学 康清梁 主编

江苏工业学院图书馆
藏书章

中国水利水电出版社

内 容 提 要

本书系统地论述了钢筋混凝土有限元分析的基本理论和方法,反映了国内外在这个研究领域中的最新进展以及本书作者的研究成果。全书共分九章,主要内容为:国内外钢筋混凝土有限元分析发展概况,有限元分析基础,钢筋混凝土结构的有限元模型及线性分析,材料本构关系及破坏准则,钢筋混凝土界面的传力机理及模型化,钢筋混凝土的裂缝模拟和分析,钢筋混凝土结构的非线性有限元分析,钢筋混凝土有限元分析的程序设计,钢筋混凝土有限元分析的工程应用等。

本书可作高等院校有关专业研究生教材,也可供从事结构工程科研和设计工作的科技人员使用。

图书在版编目 (CIP) 数据

钢筋混凝土有限元分析/康清梁主编;宋玉普等编. —北京:中国水利水电出版社, 1996

高等学校教材

ISBN 7-80124-136-3

I. 钢… I. ①康…②宋… II. 钢筋混凝土结构-有限元分析-高等学校-教材 IV. TU375

中国版本图书馆CIP数据核字 (96) 第 02863 号

书 名	高等学校教材 钢筋混凝土有限元分析
作 者	河海大学 康清梁 主编
出 版	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044)
发 行	新华书店北京发行所
经 售	全国各地新华书店
排 版	北京市京建照排厂
印 刷	北京市朝阳区小红门印刷厂
规 格	787×1092 毫米 16 开本 16.5 印张 379 千字
版 次	1996 年 10 月第一版 1996 年 10 月北京第一次印刷
印 数	001—510 册
定 价	12.80 元

前 言

本书以河海大学、大连理工大学、武汉水利电力大学和郑州工学院为结构工程研究生开设的钢筋混凝土有限元分析的教材为基础,结合多年的教学实践编写而成。全书既简明又系统地阐述了钢筋混凝土有限元分析的基本理论和方法,并对钢筋混凝土有限元分析的程序编制和工程应用作了比较详细的说明。书中反映了国内外在此领域的最新进展和本书作者的有关研究成果。本书可以作为高等院校有关专业硕士研究生的教材,也可供大专院校师生和土木工程科技人员参考。

本书共分九章:第一章为绪论,概述了钢筋混凝土有限元分析的原理,并介绍了国内外钢筋混凝土有限元分析发展的概况;第二章为有限元分析基础,介绍了有限元分析方法的一般原理;第三章为钢筋混凝土结构的有限元模型及线性分析,介绍了钢筋混凝土结构的有限元模型和常用单元以及线性分析的方法;第四章为材料的本构关系和破坏准则;第五章为钢筋混凝土界面的传力机理及模型化;第六章为钢筋混凝土的裂缝模拟和分析,这一章提供了钢筋混凝土结构有限元分析的物理模型,是钢筋混凝土有限元分析的理论基础;第七章介绍了钢筋混凝土结构的非线性有限元分析的原理和主要方法;第八章对钢筋混凝土有限元分析的程序设计作了比较详细的说明,它是对以上各章内容的综合运用;第九章介绍了钢筋混凝土有限元分析的工程应用。每章都附有大量的参考文献,可供有兴趣者查阅。

本书第一、二、四章由康清梁编写,第三、七章由张雷顺编写,第五、六章由宋玉普编写,第八、九章由李传才编写。全书由康清梁和宋玉普修改定稿,由康清梁主编,由江见鲸主审。

由于作者水平有限,书中难免有不足之处,恳请读者批评指正。

编 者

1995年6月

CA099/HZ08

目 录

前 言

第一章 绪论	1
第一节 钢筋混凝土有限元分析简介	1
第二节 国外钢筋混凝土有限元分析发展概况	2
第三节 我国钢筋混凝土有限元分析发展概况	3
第二章 有限元分析基础	5
第一节 有限元分析基本原理	5
第二节 平面矩形单元	12
第三节 有限元法的变分基础	15
第三章 钢筋混凝土结构的有限元模型及线性分析	19
第一节 钢筋混凝土结构的有限元模型	19
第二节 八结点等参数单元	20
第三节 钢筋单元	28
第四节 粘结单元	30
第五节 组合式单元	34
第六节 整体式单元	45
第七节 结构整体分析	46
第八节 钢筋混凝土结构线性分析	49
第四章 材料本构关系及破坏准则	50
第一节 混凝土的力学性能	50
第二节 混凝土的破坏准则	55
第三节 混凝土以弹性力学理论为基础的本构模型	68
第四节 混凝土以塑性力学理论为基础的本构模型	76
第五节 混凝土以内时理论为基础的本构模型	82
第六节 钢筋的力学性能和本构关系	88
第五章 钢筋混凝土界面的传力机理及模型化	94
第一节 钢筋与混凝土界面的传力机理	94
第二节 钢筋与混凝土界面的有限元分析模型	110
第三节 混凝土与混凝土界面的传力机理和界面力—位移关系式	111
第四节 混凝土与混凝土界面的分析模型	119
第六章 钢筋混凝土的裂缝模拟和分析	130
第一节 混凝土裂缝的发展过程和产生原因	130
第二节 混凝土裂缝的模拟	132
第三节 混凝土单元开裂、压碎后释放力的计算和分配	137
第四节 裂缝宽度的计算	141

第五节	混凝土裂缝分析的数值过程	144
第七章	钢筋混凝土结构的非线性有限元分析	147
第一节	非线性问题的基本解法	147
第二节	材料非线性问题	151
第三节	几何非线性问题	160
第四节	几何材料非线性问题	169
第五节	钢筋混凝土结构非线性有限元分析过程	169
第八章	钢筋混凝土有限元分析的程序设计	177
第一节	概述	177
第二节	钢筋混凝土有限元分析程序的总体设计	180
第三节	数据的输入和位移编号的形成	189
第四节	单元刚度计算	193
第五节	整体刚度矩阵的建立	199
第六节	自由项形成和平衡方程求解	205
第七节	单元应力计算的程序设计	208
第八节	单元状态分析的程序设计	212
第九章	钢筋混凝土有限元分析的工程应用	228
第一节	钢筋混凝土梁的有限元分析	228
第二节	水工和港工非杆件结构的有限元分析	232
第三节	水电站地下厂房的非线性有限元分析	242
第四节	海洋采油平台的非线性有限元分析	245
第五节	预应力核反应堆容器的非线性有限元分析	248
参考文献		251

第一章 绪 论

钢筋混凝土结构是目前使用最为广泛的一种结构形式。对于这类结构的性能,它们在荷载和其它作用下的反应特性,以及合理的设计方法和构造措施,历来是结构研究人员和工程师们深入研究的课题。直到目前为止,研究的主要方法还是模型或实物试验。通过试验,取得大量的试验数据,然后加以整理归纳,总结出实用的钢筋混凝土构件和结构的设计原理、方法和构造措施,再经工程实践的检验,将设计方法和构造措施不断完善。

应该看到试验研究有它的局限性。一是一些复杂结构,例如海上采油平台、核反应堆安全壳等难以进行试验研究;二是试验只能选择某些参数进行,难以对影响结构性能的重要参数作系统的研究;三是试验研究成本高、周期长。

自本世纪 60 年代末以来,钢筋混凝土有限元分析方法发展迅速,并得到了越来越广泛的应用。这个方法的优点是,可以对结构自开始受荷直到破坏的全过程进行分析,可以获得结构从开始受荷直到破坏的受力性能的各种情况,包括:混凝土塑性的影响、裂缝的形成和发展、钢筋和混凝土之间的粘结滑移、钢筋的屈服与强度,以及混凝土压碎破坏等,从而可以对这些问题的本质进行较全面的分析和研究,确定结构的开裂荷载和破坏荷载等重要特性,为设计提供可靠的依据。

钢筋混凝土结构有限元分析还可以改进试验研究方法并取代一部分试验。必须指出对于钢筋混凝土材料和钢筋与混凝土之间相互作用的基本性能的试验是有限元分析所无法取代的。事实上有限元分析的力学模型正是建立在这些基本试验的基础上的。但是对于各种具体结构,如钢筋混凝土梁、板、厚壁框架、坝内埋管等的试验是可以用有限元分析来代替的,至少是可以部分代替。并且有限元分析方法没有试验和量测手段的局限性,易于对影响结构性能的重要参数作系统的研究,这是传统的试验方法所不能比拟的。

钢筋混凝土有限元分析还能对传统的试验方法难以研究的大型复杂的非杆件体系的钢筋混凝土结构,如海上采油平台和核反应堆安全壳等,提供有力的分析研究手段。这些结构的正确合理的设计离开了钢筋混凝土有限元分析是难以进行的。

因此,钢筋混凝土有限元分析正越来越受到人们的重视。它在钢筋混凝土结构的基本性能分析、合理设计方法的研制,以及构造措施的确定等方面,发挥着日益重要的作用。

第一节 钢筋混凝土有限元分析简介

钢筋混凝土有限元分析,是有限元分析和钢筋混凝土力学特性两者的结合,是采用有限元分析的一般原理,结合钢筋混凝土的力学特性,研究钢筋混凝土结构的基本性能、设计方法和构造措施。

最早把有限元方法用于钢筋混凝土结构的是 Ngo 和 Scordelis^[1]。他们对钢筋混凝土梁进行了线性有限元分析。首先他们把混凝土和主钢筋都离散为二维三角形有限单元,钢筋

则用一维杆单元模拟。接着他们又预先设定了弯曲裂缝的位置,并在钢筋和混凝土之间以及混凝土裂缝处设置双向弹簧联结单元,用以模拟钢筋和混凝土之间的粘结滑移关系及混凝土裂缝两侧结合面之间的骨料咬合关系。主钢筋的销栓作用也可以类似地加以模拟。这个早期的研究尽管还比较粗糙,但是它已经确定了钢筋混凝土有限元分析的基本原理。这个原理可以概述如下:

(1) 把钢筋混凝土结构中的钢筋和混凝土分别离散成有限单元;在上述研究中混凝土和主钢筋离散成二维三角形单元,钢筋离散为一维杆单元。

(2) 为了模拟钢筋和混凝土之间的粘结滑移关系和裂缝两侧混凝土之间的骨料咬合作用,可以在钢筋和混凝土之间以及裂缝两侧混凝土之间设置联结单元。

(3) 确定适用于各类单元的本构关系,即应力应变关系或结点力位移关系,这种关系可以是线性的,也可以是非线性的。

(4) 与一般的有限元方法相同,确定各单元的单元刚度矩阵,并组合成结构整体刚度矩阵,根据结构所受荷载作用和约束,可解出有限元结点的位移,进而求出单元应变和单元应力。随着荷载和作用的不断增加,我们就可以得到钢筋混凝土结构自开始受荷直到破坏整个过程的位移、应变、应力、裂缝的形成和发展、钢筋和混凝土结合面的粘结滑移、钢筋的屈服与强化以及混凝土压碎破坏等大量数据信息,为研究结构的性能和合理设计方法等提供可靠依据。

以上就是钢筋混凝土有限元分析的基本原理,以后各章将对此作详细介绍。

第二节 国外钢筋混凝土有限元分析发展概况^[2]

自 Ngo 和 Scordelis 把有限元方法用于钢筋混凝土梁的分析之后,钢筋混凝土有限元分析得到了迅速的发展。这主要表现在以下几个方面:

一、混凝土的本构模型方面

在 Ngo 等的研究中混凝土是作为线弹性体处理的,这是很粗糙的。这方面已有很大的发展,出现了更符合混凝土实际性能的混凝土本构模型。

1. 以弹性力学理论为基础的本构模型

在小应力时混凝土仍作为线弹性体,而在一般情况下则作为弹性非线性处理。这种本构模型概念明确,应用方便,适用于单调递增荷载作用情况。

2. 以塑性力学理论为基础的本构模型

这类本构模型可以较好地模拟混凝土在卸载和周期加载时的变性特性,这是对以弹性为基础的混凝土本构模型的重大改进。

3. 混凝土的塑性断裂模型

混凝土非弹性变形一部分是塑性变形,另一部分为混凝土内微裂缝和微断裂引起的。塑性断裂模型是把经典塑性理论和断裂理论结合起来而形成的,它能够更好地模拟混凝土的非弹性变形。

4. 混凝土的内时本构模型

采用混凝土的内时本构模型也是为了克服混凝土弹塑性模型的某些缺点,很好地模拟混凝土在各种情况下的应力应变关系。

5. 混凝土以损伤力学为基础的本构模型

因混凝土应力应变关系的非线性与混凝土内部的损伤的积累与发展有关,因而有不少学者基于损伤力学来建立混凝土的本构关系。

此外,各种理论的组合模型,如塑性断裂、内时损伤等本构关系也有很多成果,这方面的研究还在发展之中。

二、混凝土的强度准则

混凝土究竟在何种应力状态下破坏,这是钢筋混凝土有限元分析中的一个重要问题。早期的钢筋混凝土有限元分析采用十分简单的强度准则,如最大拉应力准则等。70年代末以来出现了多种适用性更为广泛的多参数强度准则。目前已能够在比较广泛的应力范围内比较准确地判断混凝土是否破坏。

三、钢筋的模拟

早期研究时把钢筋作为线弹性体。现在已能根据需要计及钢筋的塑性变形和包辛格效应等。

四、裂缝模拟方面

在Ngo和Scordelis的研究中裂缝是事先设定的,然后分析在这设定的裂缝下混凝土和钢筋的应变、应力及两者之间的粘结滑移。在稍后的Nilson的研究中裂缝不再事先设定,而是根据单元的应力来判断裂缝在哪里出现和如何发展。但此时随着裂缝的出现和发展,需要不断分离相应单元的结点,不断改变结构的拓扑,很不方便。其后在Rashid的研究中提出了分布式裂缝模式,使得在计算过程中裂缝能够自动形成和发展而不需要改变结构的拓扑,这是裂缝模拟方面的一大改进。但采用分布式裂缝模式无法直接得出裂缝的开展宽度和具体位置。目前研究者正在寻求更合理的裂缝模式。

五、钢筋混凝土有限元分析程序的研制

Ngo等的钢筋混凝土有限元程序比较简单,其后研制出很多程序,可以研究钢筋混凝土梁、板、壳等,不少程序还能对三维的钢筋混凝土结构进行静、动力分析。

六、实际应用方面的发展

钢筋混凝土有限元分析方法在科研和工程领域的实际应用方面也得到很大发展。它已被用于深梁、核反应堆预应力混凝土安全壳、海洋采油平台等的分析研究中。

第三节 我国钢筋混凝土有限元分析发展概况

我国在70年代中期开始对钢筋混凝土有限元分析进行研究,其后这方面的研究在不少高等院校和科研机构相继开展,取得了显著的成绩,这主要表现在:

一、混凝土和钢筋的材料性质、本构关系和强度准则

从70年代末开始清华大学、北京水电科学研究院、同济大学、大连理工大学、河海大学等高等院校和科研机构在混凝土和钢筋的材料性质、本构关系和强度准则方面做了大量的工作^[3~17],特别在混凝土在复杂应力下的材料特性方面做了大量的试验研究工作,成绩显著,其中对混凝土应力应变全曲线和二轴、三轴受力强度、变形特性和强度准则的试验研究;对钢筋在反复加载下的应力应变滞回环及混凝土在反复荷载作用下的特性研究;对

混凝土在平面应变状态下的变形和强度研究等等,都达到了较高的水平。事实表明,我国在混凝土的材料性质、本构关系和强度准则方面的研究已经达到国际水平。

二、混凝土和钢筋之间粘结滑移关系的研究

我国学者在这方面也做了大量的工作,主要有对于钢筋与混凝土结合面的粘结滑移性能的试验研究;钢筋与混凝土劈裂粘结破坏和周期反复荷载下局部粘结滑移关系及斜压杆粘结模型的研究;钢筋粘结锚固机理的试验研究等等^[18~22]。

三、钢筋混凝土有限元程序研制

我国在这方面的研究工作从70年代末期就已开始,开展得比较早的有同济大学、河海大学、清华大学、大连理工大学、武汉水利电力大学等。目前很多高等院校和科研机构都有自行研制的钢筋混凝土有限元分析程序,这些程序能够对二维或三维的钢筋混凝土结构进行静力或动力分析,有的程序还具有良好的前处理和后处理的功能^[23~25]。

四、实际应用方面的发展

目前在我国钢筋混凝土有限元分析已应用于科研和工程领域,例如对于刘家峡地下电厂混凝土衬砌和海洋采油平台等结构、对于混凝土坝内圆孔及龙羊峡坝内钢管模型、对于钢筋混凝土结构的温度应力和配筋、对于钢衬—钢筋混凝土压力管道和蜗壳外包钢筋混凝土结构、对于钢筋混凝土深梁等水工大体积非杆件结构及码头面板等等都进行过钢筋混凝土有限元分析,取得了很好的结果^[26~38]。这方面的应用正在发展之中。

五、钢筋混凝土有限元分析专著问世

随着钢筋混凝土有限元分析的研究工作的顺利进展,我国已出版了一些很有水平的钢筋混凝土有限元分析专著,这些专著总结反映了国内外在钢筋混凝土有限元分析方面的成果,对促进钢筋混凝土有限元分析的发展和实际应用具有重要意义。目前已出版的有关著作主要有:同济大学朱伯龙、董振祥编著的《钢筋混凝土非线性分析》;东南大学宋启根、单炳梓、金芷生、朱万福编著的《钢筋混凝土力学》;河海大学周氏、康清梁、童保全编著的《现代钢筋混凝土基本理论》;清华大学沈聚敏、王传志、江见鲸编著的《钢筋混凝土有限元与板壳极限分析》;大连理工大学宋玉普、赵国藩编著的《钢筋混凝土结构分析中的有限单元法》;河海大学周氏、许庆尧等翻译的《钢筋混凝土有限元分析》^[39~44]。随着这方面研究工作的深入和应用的扩大,可以预期更多的这方面的专著将会问世。

钢筋混凝土有限元分析自出现至今不过20多年时间,但它已取得了重大进展,已成为研究钢筋混凝土结构性能的有力的通用的分析手段,并且正在走向实际应用。

但是必须看到钢筋混凝土结构存在许多复杂的因素:

- (1) 它是由钢筋和混凝土两种性质迥异的材料组合而成的,性质非常复杂。
- (2) 混凝土性质复杂,应力应变关系是非线性的,在复杂应力条件下的本构关系仍不十分清楚,普遍适用的强度理论也未建立。
- (3) 混凝土抗拉强度很低,在通常情况下钢筋混凝土结构总是带裂缝工作的,裂缝的存在和发展使得结构的分析大为复杂化。
- (4) 钢筋与混凝土之间的粘结关系性质异常复杂。

上述这些复杂因素使得钢筋混凝土有限元分析具有极大的难度,迄今为止还有许多问题有待解决,许多理论研究工作和试验分析工作有待进行。钢筋混凝土有限元分析还正在发展之中。

第二章 有限元分析基础

有限元分析方法最早在 1943 年提出,用于求解扭转问题;1956 年特纳等人运用有限元法解决航空工程中有关的应力分析问题^[45~46]。其后随着方法本身的日益完善和电子计算机功能的迅速增强,有限元分析方法在结构工程、流体力学、热力学、岩土力学,以及钢筋混凝土结构分析设计等方面得到了越来越广泛的应用。本章以平面问题为例对有限元分析方法的基本原理作一简明介绍。希望更详尽地了解有限元法的读者请参看有限元方面的专著^[47~48]。

第一节 有限元分析基本原理^[49,50]

图 2-1 所示为一弹性薄板,厚度为 t ,其板面垂直于 z 轴。板面不受外力作用,板边上作用的面力仅是 x 和 y 的函数且在 z 向的分量为零,体力也平行于板面且不沿厚度变化。此时可以假定:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0 \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

剩下平行于 xy 面的三个应力分量 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 仅是 x 和 y 的函数。这是弹性力学中的平面应力问题。我们即以此为例来说明有限元法的原理。

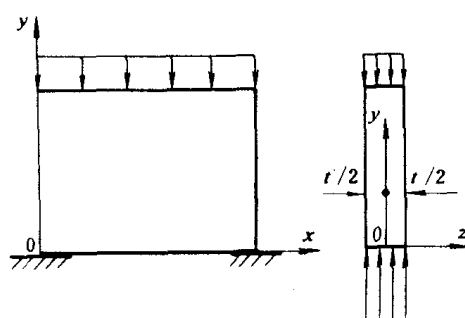


图 2-1 平面应力问题示意

一、结构的离散化

当将有限元法用于平面结构这样一个连续体时,首先要人为地将这连续的平面结构划分为若干个单元,这些单元的形状常为三角形、矩形

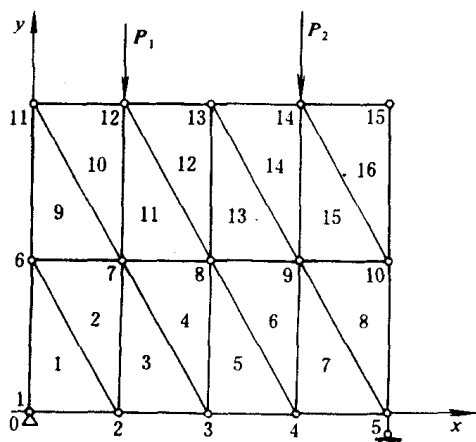


图 2-2 简支深梁的有限单元结构

或任意四边形,分别称为三角形单元、矩形单元和四边形单元。这些单元仅在结点处连结。这种把实际连续的结构化为仅在结点处相互连结的若干个单元组成的离散型结构,称为结构的离散化,由此形成的离散型结构称为有限单元结构。图 2-2 为一简支深梁离散而成的由 16 个三角形单元构成的有限单元结构。

实际结构的两个相邻单元不仅在结点处连接,并且在整个边界上连接。为了使得有限单元结构成为原来的连续结构的很好的近似,就需要使相邻两单元在公共边界上的位移协调。经过这样的处理,我

们就把原来难以求解的连续结构化为与原结构近似的易于求解的有限单元结构，从而使问题大为简化。

二、单元、结点和结点自由度的编号及坐标的建立

为了识别单元、结点和结点自由度，必须对它们进行编号。因是平面问题，每个结点有 x 向和 y 向位移，所以有两个自由度。已知为零的位移分量自由度为零，不编号。对结构还需建立整体坐标系，需要时还对每个单元建立局部坐标系。本节仅讨论三角形单元，见图 2-2。

三、单元位移模式的建立

当结构离散为有限单元后，每个单元中的位移可用坐标的较为简单的函数来表示，这称为单元的位移模式。

单元的位移模式必须能正确地反映弹性体中的真实位移状态，一般要求位移模式：

- (1) 必须能反映单元的刚体位移，这要求单元的位移函数应包含常数项。
- (2) 必须能反映单元的常量应变，这反映了当单元尺寸不断变小时单元内各点应变接近于常量的事实。

(3) 应尽可能反映位移的连续性，因为原来的结构是一个连续体。这就要求位移函数在单元内部连续，且相邻两单元除在公共结点上必须有相同的位移外，在整个公共边界上也应该具有相同的位移，以保证相邻单元在变形时既不会互相重迭，也不会互相脱离。这条件称为保续条件。

条件 (1)、(2) 是有限元解答能够收敛于准确解答的必要条件或完备性条件。满足这两个条件的单元称为完备元。条件 (1)、(2) 再加上条件 (3) 就构成了有限元解答收敛的充分条件。满足这三个条件的单元称为完备协调元。

如图 2-3 所示三角形单元具有三个结点： i 、 j 、 m ，每个结点有两个位移 u_r 和 v_r ($r=i, j, m$)，即两个自由度，单元共有 6 个自由度。位移模式可取为

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

可以证明上列位移模式满足前述的三个条件，所以三角形单元是完备协调元。

把式 (2-2) 写成矩阵形式

$$[f] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [\Phi]_0 [a] \quad (2-3)$$

$$\text{式中: } [\Phi]_0 = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

$$[a] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^T \quad (2-5)$$

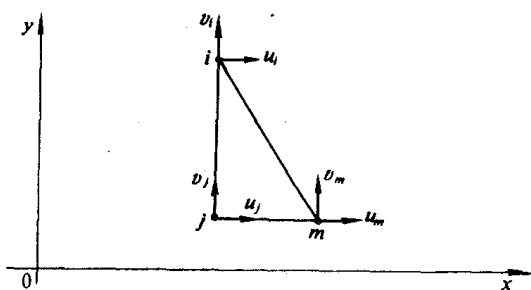


图 2-3 三角形单元示意

将结点 i 、 j 、 m 的坐标及相应的位移值代入式 (2-3) 可得

$$[\delta]^e = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} [\alpha] = [\Phi] [\alpha] \quad (2-6)$$

于是

$$[\alpha] = [\Phi]^{-1} [\delta]^e \quad (2-7)$$

$$[\delta]^e = [u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_m \ v_m]^T \quad (2-8)$$

式 (2-8) 为单元结点位移列阵;

$$[\Phi]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_m & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_m & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_m \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_m \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = -x_j + x_m \quad (2-10)$$

(按顺序 $i \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow i \cdots$ 轮换)

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \quad (\text{三角形单元面积}) \quad (2-11)$$

将式 (2-7) 代入式 (2-3) 并加以整理可得

$$[f] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [N] [\delta]^e \quad (2-12)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

式 (2-13) 为形函数矩阵, N_i 、 N_j 和 N_m 为形函数, 也称为插值函数,

$$N_r = (a_r + b_r x + c_r y) / 2A \quad (r=i, j, m) \quad (2-14)$$

四、荷载向结点的移置 (见图2-4)

结构上的真实荷载可以是作用于结构上任意处的集中力, 作用于面上的分布力或作用于体内的体积力。在有限元法中所有这些荷载均需按静力等效原则移置到结点上, 称为等效结点荷载, 从而简化结构受力状况, 并进而建立单元和结构的结点位移和结点力的关系。

所谓静力等效原则是指作用于单元上的真实荷载和移置到结点的结点荷载, 两者在虚位移上所作的虚功相等。

设集中荷载 $[P]$ 作用于单元内的 M 点, 该

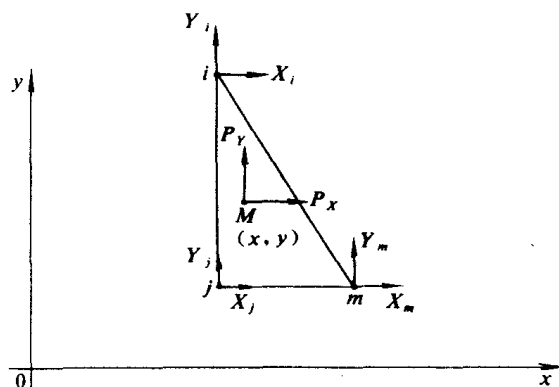


图 2-4 荷载向结点移置

点坐标为 (x, y) ，与其等效的结点荷载为 $[R]^e$

$$[R]^e = [X_i \ Y_i \ X_j \ Y_j \ X_m \ Y_m]^T \quad (2-15)$$

设结点虚位移为 $[\delta^*]^e$ ，则 M 点虚位移为

$$[f^*] = [N] [\delta^*]^e \quad (2-16)$$

按静力等效原则

$$([\delta^*]^e)^T [R]^e = [f^*]^T [P] = ([\delta^*]^e)^T [N]^T [P]$$

由虚位移的任意性可得

$$[R]^e = [N]^T [P] \quad (2-17)$$

类似的与 jm 边上作用的分布面力 $[\bar{p}]$ 相应的等效结点力为

$$[R]^e = \int_{jm} [N]^T [\bar{p}] t ds \quad (2-18)$$

式 (2-18) 等号右边为沿 jm 边的线积分。

与分布体力 $[p]$ 等效的结点力为

$$[R]^e = \iint_A [N]^T [p] t dx dy \quad (2-19)$$

式 (2-18) 和式 (2-19) 中 t 为板厚。

五、单元结点位移和结点力关系的确定

如图2-5所示单元 ijm ，因荷载已向结点移置，所以该单元仅受到结点力 $[F]^e$ 作用

$$[F]^e = [F_i \ F_j \ F_m]^T = [U_i \ V_i \ U_j \ V_j \ U_m \ V_m]^T \quad (2-20)$$

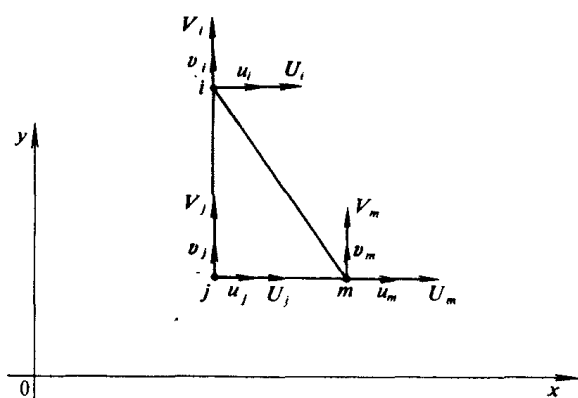
下面来建立单元结点力和结点位移的关系。

1. 应变矩阵

由弹性力学知道

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

此式可写成矩阵形式



$$[\epsilon] = [d] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = [d] [f] \quad (2-22)$$

式中： $[d]$ 为偏导符矩阵

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

将式 (2-12) 代入式 (2-22) 得

图 2-5 单元结点位移和结点力

$$[\epsilon] = [\partial] [N] [\delta]^e = [B] [\delta]^e \quad (2-24)$$

式中: $[B]$ 称为应变矩阵或几何矩阵。

$$[B] = [\partial] [N] = [B_i \ B_j \ B_m] \quad (2-25)$$

式中: B_i, B_j, B_m 为子矩阵, 对三角形单元。

$$B_r = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_r & 0 \\ 0 & c_r \\ c_r & b_r \end{bmatrix} \quad (r=i, j, m) \quad (2-26)$$

对三角形单元 A, b_r, c_r 均为常数, 所以 $[B]$ 及 $[\epsilon]$ 的元素均为常数, 因此三角形单元也称为常应变单元。

2. 应力矩阵

由弹性力学

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D] [\epsilon] \quad (2-27)$$

式中: $[D]$ 为弹性矩阵

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \text{ 对称} \quad (2-28)$$

式中: E 为弹性模量; μ 为泊松比。

将式 (2-24) 代入式 (2-27) 得

$$[\sigma] = [D] [\epsilon] = [D] [B] [\delta]^e = [S] [\delta]^e \quad (2-29)$$

式中: $[S]$ 为单元应力矩阵,

$$[S] = [D] [B] = [S_i \ S_j \ S_m] \quad (2-30)$$

式中: S_i, S_j, S_m 为子矩阵, 对三角形单元

$$S_r = \frac{E}{2(1-\mu^2)} A \begin{bmatrix} b_r & \mu c_r \\ \mu b_r & c_r \\ \frac{1-\mu}{2} c_r & \frac{1-\mu}{2} b_r \end{bmatrix} \quad (r=i, j, m) \quad (2-31)$$

3. 单元刚度矩阵

设单元结点虚位移为 $[\delta^*]^e$, 则单元虚应变为

$$[\epsilon^*] = [B] [\delta^*]^e \quad (2-32)$$

由虚功原理可得

$$([\delta^*]^e)^T [F]^e = \iint_A [\epsilon^*]^T [\sigma] dx dy t \quad (2-33)$$

将式 (2-32) 和式 (2-29) 代入式 (2-33) 得

$$\begin{aligned} ([\delta^*]^e)^T [F]^e &= \iint_A ([B]^T [\delta^*]^e)^T ([D] [B] [\delta]^e) dx dy t \\ &= ([\delta^*]^e)^T \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy t [\delta]^e \end{aligned} \quad (2-34)$$

由虚位移的任意性可得

$$[F]^e = [k]^e [\delta]^e \quad (2-35)$$

$$[k]^e = \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy t \quad (2-36)$$

式 (2-35) 即单元结点力和结点位移的关系。\$[k]^e\$ 称为单元刚度矩阵，由式 (2-36) 可知 \$[k]^e\$ 是一个对称方阵。\$[k]^e\$ 可写成子块形式

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

式中：\$k_{rs}\$ (\$r=i, j, m, s=i, j, m\$) 为子矩阵，对三角形单元

$$k_{rs} = \frac{Et}{4(1-\mu^2)} A \begin{bmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} c_r c_s & \mu b_r c_s + \frac{1-\mu}{2} c_r b_s \\ \mu c_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r c_s & c_r c_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

(\$r, s=i, j, m\$)

六、建立整体结点位移与结点荷载的关系

将虚功原理用于整个结构。此时外力虚功为 \$W_i^*\$

$$W_i^* = \sum ([\delta^*]^e)^T [F]^e = [\delta^*]^T [R] \quad (2-39)$$

式中：\$[\delta^*]\$ 为结构的整体虚位移列阵；\$[R]\$ 为结构整体结点力列阵，因内部结点力互相抵消，在 \$[R]\$ 中只包含外荷载，故 \$[R]\$ 也称为结构荷载列阵。

内力虚功为 \$W_i^*\$

$$W_i^* = - \sum ([\delta^*]^e)^T [k]^e [\delta]^e \quad (2-40)$$

在对所有单元求和时将单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵 \$[K]\$，将单元位移列阵 \$[\delta]^e\$ 集成整体位移列阵 \$[\delta]\$，于是上式成为

$$W_i^* = - [\delta^*]^T [K] [\delta] \quad (2-41)$$

由虚功原理及虚位移的任意性可得

$$[K] [\delta] = [R] \quad (2-42)$$

式 (2-42) 即为整体位移列阵和荷载列阵之间的关系。

在由单元刚度矩阵合成整体刚度矩阵时应遵循下列原则：

- (1) 凡与位移分量为零对应的单元刚度矩阵元素不迭加到整体刚度矩阵中去。
- (2) 整体刚度矩阵中的元素 \$k_{ij}\$ 等于各单元刚度矩阵中元素 \$k_{ij}\$ 之和，式中 \$i, j\$ 为位移分量的整体自由度编号，求和运算对所有含有 \$i, j\$ 自由度的单元进行。

在整体刚度矩阵合成后，解联立方程组 (2-42)，可得到整体结点位移列阵 \$[\delta]\$，由此可得

到各单元的单元位移列阵 $\{\delta\}^e$,再由式(2-24)和式(2-29)可求得各单元的应变和应力。

以上就是有限元法的基本原理。

【例 2-1】 如图2-6所示的正方形薄板,受对角压力 2kN/m 。由于结构和荷载的对称性,只需取 $1/4$ 作为计算对象。板厚 $t=1\text{m}$,泊松比 $\mu=0$ 。

解 (1) 结构离散化: 将结构划分为4个单元,并在对称面引入适当的边界条件。

(2) 将单元、结点和结点自由度编号并建立坐标系;未知结点位移只有 v_1 、 v_2 、 v_3 、 u_4 、 u_5 、 u_6 ,分别编为1~6号自由度,记为

$$\{\delta\} = \{\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6\}^T$$

式中: $\delta_1=v_1$; $\delta_2=v_2$; $\delta_3=v_3$; $\delta_4=u_4$; $\delta_5=u_5$; $\delta_6=u_6$ 。

(3) 建立各单元的刚度矩阵。由于单元的平移并不影响单元刚度矩阵,所以单元 I、II、IV 的 $[k]^e$ 相同,于是只需计算单元 I 和 III 的 $[k]^e$ 。

由式(2-10)和式(2-11)得单元 I 的各常数为

$$b_i=1, b_j=0, b_m=-1, c_i=0, c_j=1, c_m=-1, A=\frac{1}{2}$$

单元 III 的各常数为

$$b_i=-1, b_j=0, b_m=1, c_i=0, c_j=-1, c_m=1, A=\frac{1}{2}$$

再由式(2-37)、式(2-38)得两单元的 $[k]^e$ 均为

$$[k]^e = E \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & & & & \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

(4) 整体刚度矩阵的合成及结点位移的求解。

整体刚度矩阵 $[K]$ 为

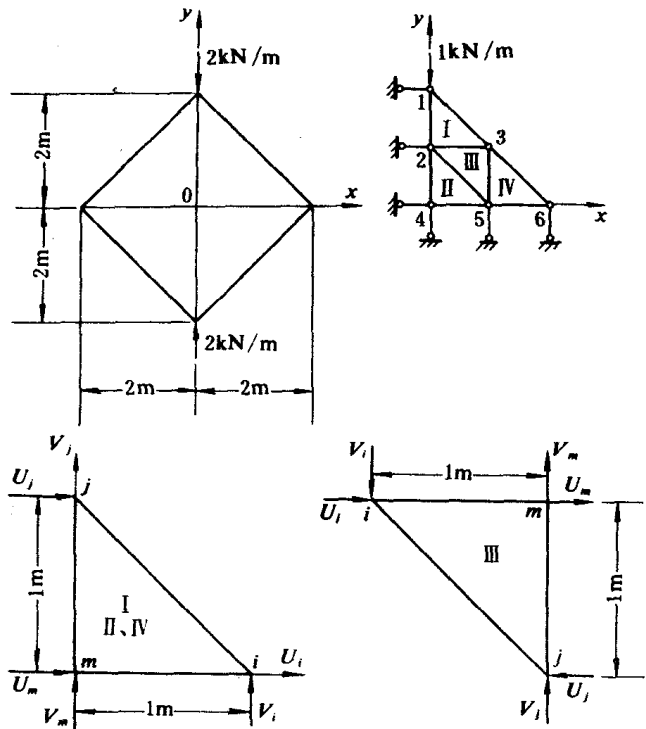


图 2-6 弹性薄板有限单元示意