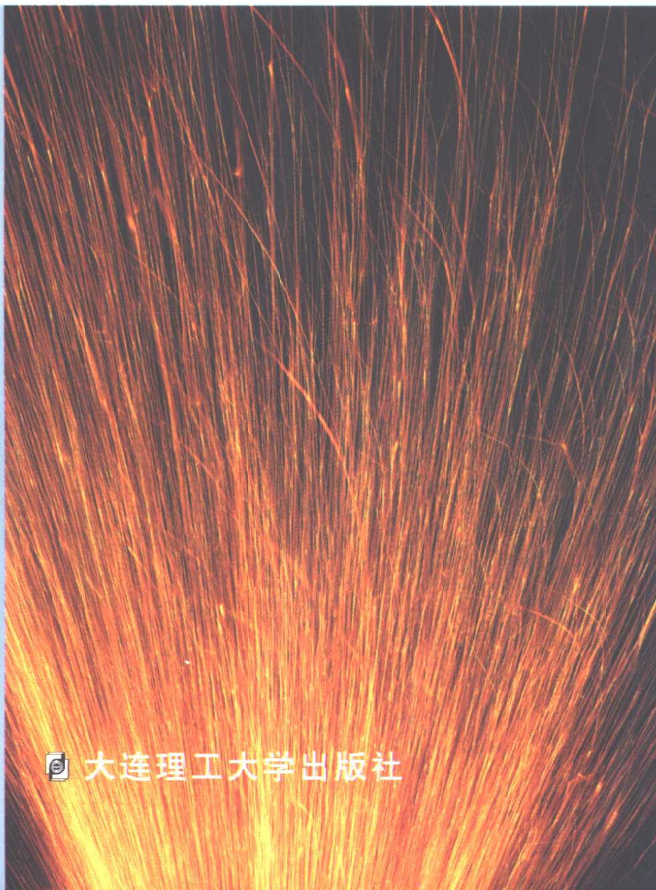
高等数学过关必备

GAODENG SHUXUE GUOGUAN BIBEI

高等数学解题题典

（本科类·考研）

曹铁川／主 编



大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学解题题典

（本科类·考研）

主　编　曹铁川
参　编　韩云瑞　金光日　李　林

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题题典:本科类·考研 / 曹铁川主编.
大连: 大连理工大学出版社, 2002.9
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-2097-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.曹…　Ⅲ.高等数学-高等学校-解题　Ⅳ.O13.44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041972 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河　邮政编码:116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466　邮购:0411-4707955
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn　URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:13.5　字数:432 千字
印数:1~10 000
2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:李　红
封面设计:王福刚

定价:18.00 元

前　言

《高等数学解题题典》(本科类・考研)是为理工科院校非数学类专业高等数学课程编写的学习辅导书。

《高等数学解题题典》是一本典型习题解答精编。本书旨在帮助学生理解高等数学原理,掌握解题方法,提高解题能力。本书选题的指导思想参照了原国家教委审定的高等工科院校"高等数学课程教学基本要求",以及高等学校工科数学课程指导委员会近年来关于工科数学教学内容改革的一系列建议。《高等数学解题题典》的章节安排及深度广度,主要参考了同济大学《高等数学》(四版、五版),以及近几年出版的面向 21 世纪课程教材,如西安交通大学的《工科数学分析基础》,大连理工大学、吉林工业大学合编的《工科数学基础》,同济大学的《微积分》等。本书还兼顾准备参加全国硕士研究生入学统一考试考生的需求,收录了部分考研试题(带 * 号题)。

本书具有以下一些特点:

一、题型齐全,覆盖面广,难度适中,循序渐进

本书章节基本按照传统高等数学教材顺序,所选的题目类型齐全、典型。用题目的顺序作为主线,可把每一章主要知识点有机地联系在一起,其中不少题目为综合题,通过解这样的题目可以温故知新,并加深了解本章的全貌。题目的深度以中等难度为主,由浅入深,循序渐进,另外也收录了少量难题。这有利于学生强化训练,开阔眼界,提高解题能力。本书还注意编选了适量的应用问题及简单的数学建模问题,这将有助于激发学生学习兴趣,培养应用意识和创新意识。

二、点击题目要领,展示解题思路,突出解题方法

对于多数题目,本书并不是简单地给出解答,而是用简捷清晰

的分析,通过对条件与结论之间逻辑关系的解剖,理出解题思路。对于每一道题重点不是放在告诉学生“怎么解”,而是启发学生“怎么想”,因为我们深知,“授之以渔”比“授之以鱼”更为重要。

三、总结解题经验,传授解题技巧,提醒解题误区

一道数学题的求解过程往往包含着某种特定的思维活动。本书收录的题目大都较为典型,有的题目虽已解毕,但意犹未尽。编者又对其作了必要的题末注释和点拨,或传授解题技巧或归纳解题经验,或提醒常见错误,或给出其他解法,以期帮助学生触类旁通,登高望远,从思维方法和学习能力上得以提高。

本书的编者在清华大学和大连理工大学长期从事高等数学教学,有着丰富的教学经验。对于题目的分析、注释、点拨,简明、准确、到位。

四、提升解题水平,为本科生考研搭建平台

和一般教学辅导书相比,本书选编的题型更为多样化,概念性、综合性、典型性更强,特别是选入了部分考研试题,因而能适合不同层次学生的需求。这就为希望迅速提高解题效率,升华解题水平的本科在读生提供了发展空间,同时也为备考硕士研究生的同学接触考试题型,探究命题思路,尽早介入考研搭建了平台,提供了素材。可以说,无论是对在读本科生,还是考研众学子,《高等数学解题题典》(本科类·考研)都是一本较为理想的学习参考书。

本书由曹铁川主编;李林编写第一章和第十一章,曹铁川编写第二章、第三章、第六章及第七章至第十章部分内容,金光日编写第四章、第五章和第十章部分内容,韩云瑞编写第七章、第八章和第九章。

限于编者水平,加之时间仓促,书中的缺点与不足在所难免,敬请读者与同行批评指正。

编者

2002.8

目　录

第一章　函数 极限 连续

【题 1】 判断下列各组函数是否为同一函数。

(1)$f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$;

(2)$f(x)=e^{-\frac{1}{2}\ln x}, g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

(3)$f(x)=x^2+2x+3, g(t)=t^2+2t+3$。

解　(1) 因 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$g(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为不同函数。

(2)$f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且对于任意的自变量 $x\in(0,+\infty)$,两个函数的函数值相等,故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同一函数。

(3) 显然 $f(x)$ 和 $g(t)$ 的区别只是变量采用不同的字母,其定义域及对应法则都相同,故 $f(x)$ 和 $g(t)$ 表示同一个函数。

点拨　函数的两要素为定义域及对应法则,判断两个函数是否相同,只需比较它们的定义域及对应法则。

【题 2】 (1) 设 $f(x)=\cos x, f[g(x)]=1-x^2$,求 $g(x)$ 及其定义域。

(2) 设 $f(x)=e^x, f[\varphi(x)]=1-x^2$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 的定义域。

分析　此例是求复合函数中间函数及定义域。

解　(1) 依题设 $\cos g(x)=1-x^2$,故 $g(x)=\arccos(1-x^2)$,所以 $-1\leqslant 1-x^2\leqslant 1$,即 $g(x)$ 的定义域为 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$。

(2) 依题设 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$,故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,从而 $\ln(1-x)\geqslant 0$,得 $1-x\geqslant 1$,故 $\varphi(x)$ 的定义域为 $x\leqslant 0$。

【题 3】 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $f(f(x)), f(f(f(x)))$ 以及 $f\underbrace{(f(f\cdots f(x)))}_{n次}$。

分析　将两个或两个以上函数进行复合,可将一个函数中的自变量用

另一个函数的表达式来替代，这种构成复合函数的方法称之为代入法。

解　$f(f(x))=\dfrac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$

$$f(f(f(x)))=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$$

由上二式可推测：$f\underbrace{(f(f\cdots f(x)))}_{n\text{次}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$，由数学归纳法可证明上式成立。

【题 4】　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$。

分析　对最外层函数定义域的各区间段，中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，得出复合函数。

解　$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$$

1° 当 $\varphi(x)<1$ 时

若 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}$，故 $x<-1$；

若 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2<2\end{cases}$，故 $0\leqslant x<\sqrt{2}$。

2° 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时

若 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}$，故 $-1\leqslant x<0$；

若 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2\geqslant 2\end{cases}$，故 $x\geqslant\sqrt{2}$。

综上所述，$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$

【题 5】　设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(f(x))$。

分析　求复合函数也可采用图示法，即先画出中间变量 $u=\varphi(x)$ 的图形，把 $y=f(u)$ 的分界点在 xOu 平面上画出，再写出 u 在不同区间段上 x 所对应的变化区间，最后将 u 代入 $y=f(u)$ 中，便得 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间。

解　令 $f(x)=u$，则 $f(u)=\begin{cases}1+u, u<0\\ 1, u\geqslant 0\end{cases}$。

先作出 $u=f(x)=\begin{cases}1+x, x<0\\ 1, x\geqslant 0\end{cases}$ 的图形（如图 1-1）。

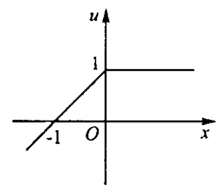


图 1-1

再在该图中作出 $y=f(u)=\begin{cases}1+u, u<0\\ 1, u\geqslant 0\end{cases}$ 的分界点 $u=0$ 的图形（即 x 轴）。从图中可看出，当 $x<-1$ 时，$u<0$；当 $-1\leqslant x$ 时，$u\geqslant 0$，故可得

$$y=f(f(x))=\begin{cases}2+x, x<-1\\ 1, x\geqslant -1\end{cases}$$

【题 6】　设 $f(x)$ 满足关系式 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)$，$(a^2\neq 1)$，其中 $\varphi(x)$ 是当 $x\neq 1$ 时有定义的已知函数，求 $f(x)$。

解　令 $\dfrac{x}{x-1}=t$，则 $x=\dfrac{t}{t-1}$，依题设可得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$$

可改写为
$$f(x)=af\left(\frac{x}{x-1}\right)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\tag{1}$$

由已知
$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)\tag{2}$$

将(2)代入(1)可解得 $f(x)=\dfrac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right]$ $(a^2\neq 1)$

【题 7】　设 $f(x)$ 是单调增加函数，对任意的 x，$g(x)\geqslant f(x)$，证明

$$f[f(x)]\leqslant g[g(x)]$$

分析　利用函数单调性定义，复合函数定义，借助 $f[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$

及 $f[g(x)]$ 与 $g[g(x)]$ 的关系。

证明 由题设，对任意的 $x, g(x) \geqslant f(x)$ 及 $f(x)$ 的单调增加性得

$$f[g(x)] \geqslant f[f(x)]$$

而 $g[g(x)] \geqslant f[g(x)]$，从而，$\forall x, f[f(x)] \leqslant g[g(x)]$。

【题 8】 若两个集合 A 与 B 之间存在一个一一映射，则称 A 与 B 等势，试说明下列数集是等势的。

(1) 整数集合 Z 与自然数集合 N。

(2) 区间 $(1,2)$ 与区间 $(3,5)$。

分析 按等势的定义，只要在 A 与 B 之间找到一个一一映射即可。

解 令 $f: N \to Z$，使 $f(2k) = k, f(2k+1) = -(k+1)$ $(k = 0,1,2,\cdots)$，则 f 为 N 与 Z 之间的一一对应，故 N 与 Z 等势。

(2) 令 $g: (1,2) \to (3,5)$，对 $\forall x \in (1,2)$，使 $g(x) = 2x + 1$，则 g 是 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 之间的一一对应，故 $(1,2)$ 与 $(3,5)$ 是等势。

【题 9】 设 f_1 是集 A 到集 B 的可逆映射，f_2 是集 B 到集 C 的可逆映射，证明复合映射 $f_2 \circ f_1$ 是集 A 到集 C 的可逆映射。

分析 按可逆映射定义，只要证 $f_2 \circ f_1$ 是一一映射即可。

证明 (1) 由题设，$\forall x \in A$，C 中有惟一元素 $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$ 与之对应，故 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的映射。

(2) 对 $\forall x_1, x_2 \in A$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$，所以有 $f_2(f_1(x_1)) \neq f_2(f_1(x_2))$，即 $(f_2 \circ f_1)(x_1) \neq (f_2 \circ f_1)(x_2)$，故 $f_2 \circ f_1$ 是单射。

(3) 由于 f_1 是 A 到 B 的可逆映射，故 f_1 是 A 到 B 的满射，于是 $f_1(A) = B$，同理知 $f_2(B) = C$，于是 $(f_2 \circ f_1)(A) = f_2(f_1(A)) = f_2(B) = C$，故 $f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的满射。

由 (1),(2),(3) 知，$f_2 \circ f_1$ 是 A 到 C 的可逆映射。

【题 10】 设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ $(l > 0)$ 上有定义，且对任意 $x', x'' \in (-l,l)$ 有 $|f(x') - f(x'')| \leqslant |x' - x''|$，证明函数 $g(x) = f(x) + x$ 在 $(-l,l)$ 上单调增加。

证明 任取 $x_1, x_2 \in (-l,l)$，且 $x_2 > x_1$，依题设有

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| = x_2 - x_1$$

而 $f(x_1) - f(x_2) \leqslant |f(x_2) - f(x_1)| < x_2 - x_1$，所以 $f(x_1) + x_1 < f(x_2) + x_2$，即 $g(x_1) < g(x_2)$。

故 $g(x)=f(x)+x$ 在 $(-l,l)$ 上单调增加。

【题 11】 设 $f(x)$ 定义在 $(-a,a)$ 内，讨论 $f(x)+f(-x)$ 及 $f(x)-f(-x)$ 的奇偶性，并证明 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和。

解 令 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$，$F_2(x)=f(x)-f(-x)$，则

$$F_1(-x)=f(-x)+f(x)=F_1(x)$$

$$F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-F_2(x)$$

故 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数。

令
$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},x\in(-a,a)$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},x\in(-a,a)$$

由上讨论知 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 分别是 $(-a,a)$ 内的偶函数与奇函数，且有 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$。

点拨 此例表示函数的方法值得注意。

【题 12】 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 均为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式并证明 $f(x)$ 为奇函数。

分析 利用 $f(x)$ 满足的等式求出 $f(x)$，再利用奇函数的定义证明。

证明 由已知
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{1}$$

在(1)式中用 $\frac{1}{x}$ 代 x，得
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \tag{2}$$

由 $(1)\times a-(2)\times b$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx$$

由 $|a|\neq|b|$，故有
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

而 $f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数。

【题 13】 求下列函数的反函数及反函数的定义域。

(1) $y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}\ (x\geqslant 0)$；

(2) $y=\begin{cases} x, & 当 -\infty<x<1 \\ x^2, & 当 1\leqslant x\leqslant 4 \\ 2^x, & 当 4<x<+\infty \end{cases}$；

(3)$y=(1+x^2)\mathrm{sgn}x$。

分析　先判定反函数的存在性，即需证明直接函数单调。

解　(1)由$\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$，故当$x\in[0,+\infty)$时，$\frac{x-1}{x+1}\in[-1,1)\subset\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$且$\frac{x-1}{x+1}$单调增加，从而$y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$在$[0,+\infty)$上单调增加，且$1-2\sin1<y<1+2\sin1$，因此所给函数的反函数存在，且反函数的定义域为$[1-2\sin1,1+2\sin1)$。

由$y=1+2\sin\frac{x-1}{x+1}$，解得$x=\dfrac{1+\arcsin\frac{y-1}{2}}{1-\arcsin\frac{y-1}{2}}$，因而所求反函数为

$$y=\frac{1+\arcsin\frac{x-1}{2}}{1-\arcsin\frac{x-1}{2}},x\in[1-2\sin1,1+2\sin1)$$

(2)显然所给函数在$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的，故其反函数存在，且可求得

$$y=\begin{cases}x, & \text{当}-\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & \text{当}1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & \text{当}16<x<+\infty\end{cases}$$

(3)**分析**　$\mathrm{sgn}x$称为符号函数，即$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

解　$y=(1+x^2)\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1+x^2, & x>0\\ 0, & x=0\\ -(1+x^2), & x<0\end{cases}$

故其反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1\\ 0, & x=0\\ -\sqrt{-(x+1)}, & x<-1\end{cases}$$

【题 14】　作出函数$y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]$的图形。

分析　称$[x]$为取整函数，$[x]$表示不超过x的最大整数，由取整函数定

义将函数写成分段函数，再作出图形。

解　$y=[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]=\begin{cases}0, & 当\ 2k\leqslant x<2k+1\\ 1, & 当\ 2k+1\leqslant x<2k+2\end{cases}$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

其图形如图 1-2 所示。

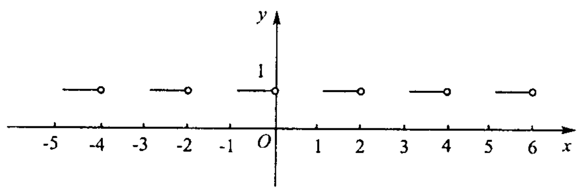


图 1-2

【题 15】　设 $f(x)=\begin{cases}1, & 当\ |x|<1\\ 0, & 当\ |x|=1\\ -1, & 当\ |x|>1\end{cases}$，$g(x)=e^x$，求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$。

解　由已知 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & 当\ |g(x)|=e^x<1，即\ x<0\\ 0, & 当\ |g(x)|=e^x=1，即\ x=0\\ -1, & 当\ |g(x)|=e^x>1，即\ x>0\end{cases}$

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e, & 当\ |x|<1\\ 1, & 当\ |x|=1\\ e^{-1}, & 当\ |x|>1\end{cases}$$

【题 16】　(1) 设 $f(x-2)=x^2-2x+3$，求 $f(x+2)$；

(2) 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

(1) **分析**　基本解法有两种，一种是将等式右端表达式变形为关于 $(x-2)$ 的函数，再令 $u=x-2$，得到 $f(x)$ 的表达式；另一种解法是令 $u=x-2$，即 $x=u+2$，代入右端表达式，从而得出 $f(u)$ 的表达式，求得结果。

解法一　由题设，$f(x-2)=(x-2)^2+2(x-2)+3$，令 $u=x-2$，得 $f(u)=u^2+2u+3$，从而 $f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$。

解法二　令 $u=x-2$，$x=u+2$，则 $f(u)=(u+2)^2-2(u+2)+$

$3=u^2+2u+3$，从而 $f(x+2)=(x+2)^2+2(x+2)+3=x^2+6x+11$。

(2) **分析**　本题若令 $u=x+\frac{1}{x}$，将 x 关于 u 解出，得到的是一个较复杂的表达式，故不宜用上例解法二，而用上述解法一求解。

解　由 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，故 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，于是 $f(u)=u^2-2$，再将 $f(u)$ 的自变量 u 改为 x，即得 $f(x)=x^2-2$。

【题 17】　设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，且在该区间上恒有 $f(x+l)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，其中 l 为正数，试证 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的函数。

分析　利用周期函数定义以及已知等式证明。

证　由于

$$
\begin{aligned}
&f(x+2l)\\
&=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x+l)-f^2(x+l)}\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}-\left(\frac{1}{4}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}+f(x)-f^2(x)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)\right]^{\frac{1}{2}}\\
&=\frac{1}{2}+\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| \qquad (*)
\end{aligned}
$$

且 $f(x)=f(x-l+l)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-l)-f^2(x-l)}\geqslant\frac{1}{2}$

故 $$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|=f(x)-\frac{1}{2}$$

将它代入 (*) 式得 $$f(x+2l)=f(x)$$

故 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的周期函数。

【题 18】　函数 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是否是有界函数，是否是单调函数，是否是周期函数，是否是偶函数。

分析　用有界函数、单调函数、周期函数和偶函数的定义判断。

解　由于 $|f(x)|=|x||\sin x|e^{\cos x}$，其中 $|\sin x|\not\equiv 0$，$e^{\cos x}>0$，故由因子 $|x|$ 即可断定 $f(x)$ 不是有界函数，也不可能是周期函数。再由 $f(0)=0$，

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，$f(\pi)=0$ 又可断定 $f(x)$ 不是单调函数。

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，由于 $f(-x)=|(-x)\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数。

【题 19】 求证：函数 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界函数。

证明 显然，对任一 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)>0$。因 $x^2+1\geqslant 1$

故 $$x^2+1\leqslant(x^2+1)^2\leqslant(x^2+1)^2+(1-x^2)^2=2(x^4+1)$$

于是 $$f(x)=\frac{x^2+1}{x^4+1}\leqslant\frac{2(x^4+1)}{x^4+1}=2$$

即 $0<f(x)\leqslant 2$，所以 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数。

【题 20】 设 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上，$x_1>0$，$x_2>0$，且 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少，证明 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$。

证 对于 $x_1>0$，$x_2>0$，不妨设 $x_1<x_2$，依题设有 $\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}$，所以 $x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1)$

由 $\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}$ 得 $x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$

故 $$x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)$$

所以有 $$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$$

点拨 本例中若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调增加，其他条件不变，可证明 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$。

【题 21】 根据国家规定，个人月收入 x 不足 880 元不纳税，超过 880 元而小于 1380 元的部分按 5% 纳税，而超过 1380 元小于 2000 元的部分按 10% 纳税，求个人月收入 x 与交纳所得税 y 的函数关系。

分析 依题意，在函数定义域的不同部分上用不同的公式来表达 x 与 y 的函数关系，得到分段函数。

解 依题设，得

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 880\\ (x-800)\cdot\frac{5}{100}, & 880<x\leqslant 1380\\ 25+(x-1380)\cdot\frac{10}{100}, & 1380<x\leqslant 2000\end{cases}$$

【题 22】 当一模型火箭发射时，推进器燃烧数秒，使火箭向上加速，当燃烧结束后，由于惯性，火箭继续上升了一会，便向地面自由下落。当火箭开始下降一段短时间后，火箭张开一个降落伞，降落伞使得火箭下降速度减慢，以免着陆破裂。如图 1-3 所示为此火箭飞行时的速度数据。试利用此图回答下列问题：

(1) 当推进器停止燃烧时，火箭上升的速度是多少？

(2) 推进器燃烧了多久？

(3) 火箭什么时候达到最高点？此时速度是多少？

(4) 降落伞何时张开？当时火箭的下降速度是多少？

(5) 在张开降落伞之前，火箭下降了多长时间？

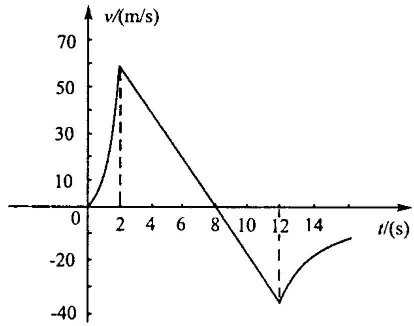


图 1-3

分析 用图形表示函数，可以直观地看出自变量与因变量之间的数量关系，以及函数的变化状态。

解 (1) 当推进器停止燃烧时，火箭的速度达到最大，由函数图形可以看出火箭上升的速度为 60 m/s；

(2) 推进器燃烧了 2 s；

(3) 火箭达到最高点时，速度是 $v = 0$，由图形可知，此时对应的时刻是 $t = 8$ s；

(4) 当降落伞张开时，火箭下降速度最大，此时 $t = 12$ s，火箭的下降速度是 $v = -40$ m/s；

(5) 在张开降落伞之前，火箭的速度由 $v = 0$ 变至 $v = -40$ (m/s)。时间间隔为 $12 - 8 = 4$ (s)，即火箭下降了 4 s。

【题 23】 利用极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$。

分析 用定义验证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，主要是找到符合要求的 $N(\varepsilon)$，其思路为：由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 出发，找出使这个不等式成立的 n 所在范围，从而确定符合要求的 N。注意这里不是“解不等式”，而是分析使此不等式成立的充分条件，其

逻辑关系不是"因为 $|x_n - a| < \varepsilon$，所以 n 满足什么条件"，而是"要使 $|x_n - a| < \varepsilon$，只要 n 满足什么条件"。

证　由于 $\left|\dfrac{2}{\sqrt{n}} - 0\right| = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$，要使 $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$，只要 $n > \dfrac{4}{\varepsilon^2}$

故对于任给 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left[\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right]$，当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{2}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$ 成立，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$

【题 24】　利用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9} = \dfrac{1}{2}$

证　由于 $\left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{n-9}{2(2n^2+n+9)}$

当 $n \geqslant 9$ 时，有 $0 \leqslant \dfrac{n-9}{2(2n^2+n+9)} < \dfrac{n}{4n^2} < \dfrac{1}{n}$

因此，对任意给定的 $\varepsilon > 0$，当 $n \geqslant 9$ 时，要使 $\left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$，只要 $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$，即 $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$。故取 $N = \max\left\{9, \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当 $n > N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+9} - \dfrac{1}{2}\right| < \varepsilon$。

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2+n+9} = \frac{1}{2}$$

点拨　在找使 $|x_n - a| < \varepsilon$ 所满足的充分条件，常采用适当放大 $|x_n - a|$ 的方法，在进行放大时，$|x_n - a| < \varphi(n) < \varepsilon$，这里 $\varphi(n)$ 应是无穷小量 $(n\to\infty)$，不能随意放大。

【题 25】　证明若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$，并举例说明反之不一定成立。

分析　要证 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$，只需证 $\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\,N$，当 $n > N$ 时，有 $||x_n| - |a|| < \varepsilon$。

证　对任给 $\varepsilon > 0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，故存在正整数 N，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，对上述 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时 $||x_n| - |a|| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$。

但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = |a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$ 不一定成立，例如，$x_n = (-1)^{n+1}$，