机械优化设计

● 高等学校试用教材

● 汪 萍 侯慕英 编著

中国地质大学出版社

高等学校试用教材

机械优化设计

汪　萍　侯慕英　编著

中国地质大学出版社

内 容 提 要

本书主要介绍若干种在机械设计中较为常用的最优化方法及应用，并编入了必要的数学基础知识。这些方法有：一维优化的格点法、黄金分割法、二次插值法，无约束优化的坐标轮换法、鲍威尔法、梯度法、牛顿法、DFP变尺度法、BFGS变尺度法，约束优化的随机搜索法、复合形法、可行方向法、惩罚函数法。应用方面有弹簧、连杆机构、齿轮变位系数的选择及行星减速机的优化设计问题。每章均有适量的例题和习题，书后附有主要方法的源程序（BASIC 语言）。

本书可作为高等工科院校有关专业的教材和工程技术人员的参考书。

*　　　*　　　*

高等学校试用教材

机 械 优 化 设 计

汪 萍 侯慕英 编著

责任编辑 方 菊

*

中国地质大学出版社出版

华中理工大学印刷厂印刷 湖北省新华书店经销

开本 787×1092 1/16 印张 12 字数 200 千字 胶印印刷

1986 年 7 月第 1 版 1986 年 7 月第 1 次印刷

1991 年 2 月第 4 次印刷

印数 16001—19000 册

ISBN 7-5625-0054-1/TH·3

定价：3.15 元

前　　言

机械优化设计是以数学规划为理论基础，以电子计算机为工具，寻求机械最优设计参数的近代先进设计方法之一。采用优化方法，对提高新产品的设计水平和改进现有设备的设计方案是极有价值的。随着电子计算机在我国越来越广泛地应用，机械优化设计方法的推广应用以及进一步的研究发展也就有了可靠的保证。

为了在高等工科院校机械类专业教学内容方面增加一些近代卓见成效的新技术，同时使新的设计方法在工业实践中得到进一步的推广应用，我们曾在1981年试编了《机械优化设计》一书，供机械类专业作选修课教材或研究生教材，受到许多单位和同志的鼓励和支持。总结这几年来的教学实践经验，并根据计算机语言的使用情况和优化方法的发展，我们在原书的基础上修订成本书。

此书保持了原教材的特色，编写仍以循序渐进、理论与应用兼顾及工程实用的三原则为出发点。全书内容在组织安排上，力求由浅入深，层层搭梯。在优化方法的论述方面对其优化理论做了适当深度的讨论，并着重于概念的阐述和方法的运用，便于初学者学习。在应用方面反映了作者近年来的部分研究成果。书末所附的BASIC语言程序，主要用于读者在了解基本原理的基础上完成作业或上机练习。

本书由内蒙古工学院机械工程系机械原理零件教研室汪萍、侯慕英两同志分工编写，其中，第一、五、六章由侯慕英同志编写，第二、三、四章由汪萍同志编写，附录的BASIC程序由侯慕英、汪萍两同志共同编制调试。最后，由汪萍同志对全书进行了校核和整理。

本书承北京邮电学院梁崇高副教授、武汉地质学院单杏林副教授和华中工学院王惠珍副教授进行了极为认真、细致的审阅，为我们的书稿提出了许多宝贵的修改意见，在这里谨向他们致以深切的谢意。

由于优化设计是近年来新兴起的一门学科，我们对它的理解、运用和研究都很不够。作为一本教材，我们在这方面的教学实践经验也还不多，因此，书中难免存在一些不当或错误之处，热忱欢迎读者指正。

作　　者

1985年7月于呼和浩特

目　　录

第一章　优化方法的数学基础

最优化方法是以线性代数、多元函数的极值理论等数学知识为基础的．为了学习方便，本章对与优化方法密切有关的矩阵、矢量、多元函数及其极值等数学问题作一简要介绍．这些基本知识在理论上和实践上都是十分重要的．

§1-1　矩　　阵

矩阵是线性代数中的一个重要内容，是研究优化方法的一个有力工具。

一、基本概念

矩阵概念可由下述线性问题引出．

设有线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1-1}$$

如果把方程组左端未知量 x_1、x_2、…、x_n 的系数按其所在位置依次排列成 m 行 n 列的一个表，并记作

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

则 A 就是一个矩阵．

由此，矩阵可以这样定义：由一组数（或符号）按一定次序排列成具有 m 行 n 列的表，就称它为 $m\times n$ 阶**矩阵**．其中的每一个数（或符号）a_{ij}，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$；$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，称为矩阵 A 中第 i 行第 j 列上的**元素**．或简称元。

若有矩阵 A 与 B 有相同的阶数，而且对应的元素均相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，则称该两矩阵**相等**，记作 $A=B$．否则，若两矩阵中至少有一个对应元素不相等，这两个矩阵就不相等，记作 $A\neq B$。

仅有一行元素的矩阵（$m=1$），称为**行矩阵**。

例如

$$A=[a_1\quad a_2\cdots\cdots a_n]$$

是一个行矩阵。

仅有一列元素的矩阵（$n=1$），称为**列矩阵**．

例如

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

是一个列矩阵．

若矩阵的全部元素均为零，称为**零矩阵**，记作 Θ。

当矩阵的行数与列数相等，即 $m=n$ 时，有形如下面的矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 n 阶**方阵**．其中的元素 a_{11}，a_{22}，……，a_{nn} 称为方阵的主对角元．

若 n 阶方阵 A 中的各元素具有 $a_{ij}=a_{ji}$ 的性质，则称 A 为**对称方阵**．例如方阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

中的元素对于主对角线是对称分布的，即 $a_{ij}=a_{ji}$，故是对称方阵．

在 n 阶方阵中，若主对角元均为1，其余元素均为零，该矩阵称为**单位矩阵**，记作 E

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots\cdots 1 \end{bmatrix}$$

若方阵中，当 $i>j$ 时有 $a_{ij}=0$，即位于主对角线左下部的各元素均为零，则称它为**上三角矩阵**．

若方阵中位于主对角线右上部的各元素均为零，即当 $i<j$ 时有 $a_{ij}=0$，则称它为**下三角矩阵**，形如

$$L=\begin{bmatrix} a_{11} & 0\cdots\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots 0 \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

就是一个下三角矩阵．

把某矩阵 A 的行与列互换，得一新矩阵 B，则矩阵 B 称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T。

例如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

则其转置矩阵是

$$B=A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots\cdots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots\cdots a_{m2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

显然，行矩阵的转置矩阵为列矩阵，列矩阵的转置矩阵为行矩阵。例如有

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}，则 X^T=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]$$

对于对称方阵 A，因有 $a_{ij}=a_{ji}$，故对称方阵的转置矩阵 A^T 必与原矩阵 A 相等即 $A=A^T$。

关于方阵，还有一点需要指出：从形式上看，方阵与行列式很相近，但概念截然不同。方阵仅仅是一个正方形的"表"，而行列式可通过计算得到一个值。

若由方阵 A 中的诸元素，按原次序构成相对应的一个行列式，则此行列式称为矩阵 A 的行列式，记作 $|A|$，形如

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的值，一般可按某行或某列展开进行计算。例如，行列式 $|A|$ 若按第 i 行展开，则有

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ A_{ij}$$

式中，a_{ij} 为第 i 行的诸元素，A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式。

所谓 a_{ij} 的代数余子式是指划去 a_{ij} 所在的行与列之诸元素后余下元素构成的行列式与 $(-1)^{i+j}$ 的乘积。

例题1-1 计算行列式 $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 的值。

解：

若按第二行展开有

$$|A|=1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=2$$

对于 n 阶方阵 A，若它的行列式之值 $|A|=0$，则称 A 为**奇异矩阵**，否则称为**非奇异矩阵**。

例如矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}\qquad 由于\ |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{vmatrix}=0$$

故 A 为奇异矩阵．又如矩阵

$$B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & -2\end{bmatrix}\qquad 由于\ |B|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & -2\end{vmatrix}=-26\neq 0$$

故 B 为非奇异矩阵。

二、矩阵的运算

阶数相同的矩阵可以进行加减运算．若矩阵 C 是矩阵 A、B 的和或差，则 C 矩阵的各元素 c_{ij} 是 A、B 矩阵中各对应元素 a_{ij}、b_{ij} 的和或差，即有

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij} \tag{1-2}$$

显然，C 的阶数与 A、B 阶数相同。

例题1-2　已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 5 & -4 & 1 & 3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

试计算矩阵 $C=A+B$。

解：

因矩阵 A、B 均为 3×4 阶，故可以相加

$$C=A+B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 6 & 1\\ -1 & 2 & 3 & 2\\ 5 & -4 & 1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 2 & -5 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 5 & 1\\ 1 & -3 & 3 & 3\\ 6 & -5 & 3 & 6\end{bmatrix}$$

矩阵C 也为 3×4 阶。

若以**常数** λ **乘矩阵**A，则 $B=\lambda A$ 为同阶矩阵，B 中各元素是 A 中各对应元素与 λ 的乘积，即有

$$b_{ij}=\lambda a_{ij} \tag{1-3}$$

当矩阵 A 的列数等于矩阵 B 的行数时，则矩阵 A与 B 可以相乘得矩阵 C，记作 $C=AB$，C的行数等于A 的行数，C 的列数等于B 的列数。

例如，设有 $m\times p$ 阶矩阵 A 和 $p\times n$ 阶矩阵 B

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots\cdots a_{1p}\\ a_{21} & a_{22}\cdots\cdots a_{2p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots\cdot a_{mp}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\cdots\cdots b_{1n}\\ b_{21} & b_{22}\cdots\cdots b_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{p1} & b_{p2}\cdots\cdots b_{pn}\end{bmatrix}$$

因矩阵 A 的列数与矩阵B的行数相等，均为p，故A与B可以相乘。若相乘后得矩阵 C，则C是一个 $m\times n$ 阶矩阵，形式如下

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{m1} & c_{m2}\cdots\cdots c_{mn} \end{bmatrix}$$

C 矩阵中的每一个元素按下式计算

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\ b_{kj} \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-4}$$

即矩阵 C 中第 i 行第 j 列的元素 c_{ij} 等于A 矩阵中第 i 行的各元素与 B 矩阵中第 j 列的 各元素逐对相乘之积的总和。

例题1-3 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$， $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，

试计算 $C=AB$。

解：

因 A 矩阵为 3 列，B 矩阵为 3 行，可以相乘

$$C=AB=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times1+2\times2+(-1)\times3 & 1\times(-1)+2\times0+(-1)\times1 \\ 2\times1+3\times2+4\times3 & 2\times(-1)+3\times0+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 20 & 2 \end{bmatrix}$$

可见，C的行数等于A 的行数，C 的列数等于B 的列数。

例题1-4 已知矩阵$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$，求三阶单位矩阵 E 与矩阵 X 的乘积。

解：

$$EX=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

由此可知，$EX=X$，单位矩阵在运算中类似于一般代数运算中的数 1。

例题1-5 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$，求乘积 AA^T。

解：

$$AA^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} & a_{11}a_{31}+a_{12}a_{32} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12} & a_{21}^2+a_{22}^2 & a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32} \\ a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12} & a_{31}a_{21}+a_{32}a_{22} & a_{31}^2+a_{32}^2 \end{bmatrix}$$

由此例可见，对于任意 $m\times n$ 阶矩阵 A，其乘积 AA^T 必为对称方阵。显然，如果有任意 $\lambda\neq 0$ 的常数，则 λAA^T 也必为对称方阵。

例题1-6 试写出线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

的矩阵表达式。

解：

从该方程组中引出如下矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

则按矩阵乘法有

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}$$

对照原方程组，显然有

$$AX=B$$

这就是该线性方程组的矩阵表达式。

对于式（1-1）所表示的一般线性方程组，其矩阵表达式亦然。

最后，我们指出在矩阵相乘时必须注意的几个问题。设A、B、C为三个矩阵。

1． 矩阵A与B相乘，必须有A的列数等于B的行数这一前提，否则不能相乘。

2． 矩阵相乘不满足交换律，即在一般情况下$AB\neq BA$。例如

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&2\\3&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-1\\2&1&3\\-1&0&4\end{bmatrix}$$

则按矩阵相乘法则有

$$AB=\begin{bmatrix}4&2&9\\-3&0&9\\5&1&0\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}-2&1&1\\10&7&4\\11&2&-1\end{bmatrix}$$

显然，$AB\neq BA$。因此矩阵相乘不能随意更换次序。

3． 矩阵乘法满足结合律、分配律，即满足

$$(AB)C=A(BC)$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

另外，还可以证明在矩阵运算中存在如下关系式

1． 矩阵乘积的转置等于反序矩阵转置的乘积，即

$$(AB)^T=B^TA^T \tag{1-5}$$

2． n阶方阵A、B所对应的行列式之积等于矩阵乘积之行列式值，即

$$|A|\ |B|=|AB| \tag{1-6}$$

三、逆矩阵

对于n阶方阵A，若有另一n阶方阵B使满足$AB=E$（E为单位方阵），则称B为A的**逆矩阵**。A的逆矩阵记作A^{-1}，则$B=A^{-1}$。

例如，有下面两矩阵A和B

$$A=\begin{bmatrix}4&3&2\\3&2&1\\2&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&0&-2\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

那么很容易用矩阵相乘法则验证有$AB=E$，故$B=A^{-1}$。

可以证明，若$AB=E$时有$BA=E$，

则B是A的逆矩阵，A也必为B的逆矩阵。

由上述定义和矩阵的互逆性质可以推知下列各式必成立

$$(A^{-1})^{-1}=A$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E$$

逆矩阵的求法可通过对一个三阶方阵的讨论来加以说明．设有如下三阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

为非奇异方阵，构造另一个三阶矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

式中的 A_{ij} 是行列式$|A|$中元素 a_{ij}的代数余子式，这样构成的矩阵 A^*称作矩阵A 的伴随矩阵。这里要注意到，A^*矩阵是把行列式$|A|$中各元素 a_{ij} 换成它的代数余子式 A_{ij} 后所得方阵的转置矩阵．

根据行列式的性质，以任一行（列）的各元素与其相对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值；而以任一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零．对上述三阶矩阵，有

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=A \qquad i=1,\ 2,\ 3$$

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+a_{i3}A_{j3}=0 \qquad i\neq j$$

因此方阵A 与其伴随矩阵 A^* 之积是

$$AA^*=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}=|A|E$$

对于非奇异矩阵，$|A|\neq 0$，则有

$$A\frac{A^*}{|A|}=E$$

按逆矩阵定义，$\frac{A^*}{|A|}$就是 A 的逆阵 A^{-1}，故

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|} \qquad (1\text{-}7)$$

将上面三阶方阵求逆的方法推广到 n 阶方阵A 的求逆同样适用，伴随矩阵 A^* 的一般形式是

$$A^{*}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\cdots A_{n2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots A_{nn} \end{bmatrix}$$

由矩阵求逆公式（1-7）可见，方阵A有逆阵的必要与充分条件是$|A|\neq 0$，即方阵A为非奇异。

在逆矩阵运算中，若A、B均为非奇异，则有

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

即两方阵乘积之逆阵等于反序的方阵逆之乘积。证明如下：

因A、B为非奇异，即$|A|\neq 0$，$|B|\neq 0$，则它们必有逆阵A^{-1}、B^{-1}存在。根据式(1-6)矩阵行列式运算关系也必有$|AB|\neq 0$，所以矩阵乘积AB也为非奇异，$(AB)^{-1}$存在。

又因有

$$B^{-1}A^{-1}(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}B=E$$

$$\text{即：}B^{-1}A^{-1}(AB)=E$$

证得

$$B^{-1}A^{-1}=(AB)$$

例题1-7 求方阵$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$的逆矩阵。

解：

经计算，A的行列式$|A|=2$，又矩阵A为非奇异，逆阵A^{-1}存在，按式（1-7）有

$$A^{-1}=\frac{A^{*}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ -3 & 10 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1.5 & -3 & 1 \\ -1.5 & 5 & -2 \\ 0.5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

利用矩阵的求逆还可以解线性方程组。线性方程组的矩阵式为（见例题1-6）

$$AX=B$$

若系数矩阵A及常数项矩阵B均已知，且A为非奇异，则A^{-1}存在，以A^{-1}左乘等式两端

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$EX = A^{-1}B \text{ 故}$$

$$X = A^{-1}B$$

由此若求出系数矩阵的逆 A^{-1}，再乘以已知的常数项矩阵，即可得到未知量矩阵 X.

四、函数的二次型与矩阵的正定

在优化方法讨论中，常用矩阵形式来表示一个二次函数。先引出一个二元二次函数的矩阵表达式。

设有一般的二元二次函数

$$F(\boldsymbol{x}) = mx_1^2 + nx_2^2 + px_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

式中黑体 $\boldsymbol{x}$ 表示一组变量 x_1，x_2，在多元函数中用 $\boldsymbol{x}$ 表示一组变量（x_1、x_2、$\cdots x_n$）。按矩阵运算法则，上面的函数可写作

$$F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}[x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 2m & p \\ p & 2n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [b_1 \quad b_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + c$$

若令

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & p \\ p & 2n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

则一般二元二次函数的矩阵表示式为

$$F(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + B^T\boldsymbol{x} + c \tag{1-8}$$

式中的方阵 A 显然是一个对称方阵。

式（1-8）同样也是多元二次函数的矩阵表示式，各矩阵应是

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

其中 A 是一个对称方阵。

若在二次函数中仅含有变量的二次项，则称为二次齐次函数或二次型。

对于二元函数的二次型

$$F(\boldsymbol{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$$

把它写成矩阵式为

$$F(\boldsymbol{x}) = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{1-9}$$

通常使系数 $a_{12} = a_{21}$，故式中 A 也是一个对称方阵。

式（1-9）也是多元函数二次型的矩阵表示式。

由二次型的矩阵式引出矩阵正定的概念。

设有二次型$F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，若对于任意不为零的 $\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\cdots x_n]^T$，恒有$F(\boldsymbol{x})>0$，则相应的系数矩阵$A$称为**正定**矩阵。

类似地可以定义，若对于任意不为零的 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\cdots x_n]^T$，恒有 $F(\boldsymbol{x})<0$，则相应的系数矩阵 A 称为**负定**矩阵。

否则，若二次型 $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 对于某些 $\boldsymbol{x}$ 有 $F(\boldsymbol{x})>0$，而对另一些 $\boldsymbol{x}$ 又有 $F(\boldsymbol{x})<0$，则相应的矩阵 A 称为**不定**矩阵。

顺便指出，一般二次函数

$$F(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}+B^T\boldsymbol{x}+C$$

总可以通过变量的线性变换转化成为二次型

$$F(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y}$$

若该二次型中的矩阵B是正定的，则相应的二次函数称为**正定二次函数**。在优化方法的讨论中常常要涉及到这种正定二次函数。

判定矩阵的正定，负定与不定，可通过考察矩阵行列式的各阶主子式的值来进行。

若矩阵A正定，其必要与充分条件是矩阵行列式$|A|$的各阶主子式均大于零。

例如矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

为正定的充要条件是

$$a_{11}>0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}>0$$