高中二年级(上)

中学数学系列讲座

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会
编

清华大学出版社

中学数学系列讲座

高中二年级

（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会 编

清华大学出版社

内容简介

本书是高中二年级上学期学生的数学课外阅读用书．目的是扩大学生知识面，丰富解题方法，提高数学的分析解题能力．

全书共九讲，内容包括三角函数与反三角函数，三角不等式，数列，数学归纳法，充分条件与必要条件，圆、曲线系等．每讲都有方法介绍、例题分析、规律总结等，并配有练习题与答案．本书可供自学青年及高中数学教师参考使用，并为各校开展学生课外数学小组活动提供材料．

中学数学系列讲座

高中二年级（上册）

北京市海淀区教师进修学校
北京数学会海淀区分会　编

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京京辉印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/32　印张：5.5　字数：123 千字

1989 年 2 月第 1 版　1989 年 2 月第 1 次印刷

印数：00001—30000　定价：1.40 元

ISBN 7-302-00374-2/O·72

前　　言

《中学数学系列讲座》共分11册，初中一、二、三年级及高中一、二年级上、下各一册，高三年级全一册.

这套书是以"十年制数学教学大纲"为依据，参照各年级教科书内容与实际教学进度编写而成. 这是一套具有提高性质的课外读物，用以扩大学生的知识面，开拓视野，丰富解题方法，提高学生分析问题与解决问题的能力.

本"系列讲座"以数学专题讲座的形式编写，各讲独立成章，便于学生根据自己的兴趣和需要灵活选读，亦可供中学数学教师和自学者参考，并为各校开展数学课外活动提供素材.

这套书由北京市海淀区教师进修学校数学组与北京数学会海淀区分会联合组成编委会，负责组织编写，并得到海淀区教育局的支持和指导. 由于经验不足，一定有不少缺点，请读者批评指正，以便今后修改与补充.

《中学数学系列讲座》编委会

《中学数学系列讲座》

编委会名单

目　　录

第一讲

三角函数的一些应用

董世奎

在一些数学问题中引入三角函数，把问题转化为三角问题，可以使问题变得简单易解．下面介绍三角函数在几个方面的应用．

一、引入辅助角证明几何问题

例 1 正方形内一点与正方形的两顶点组成底角为15°的等腰三角形时，该点与正方形的另外两个顶点组成正三角形．

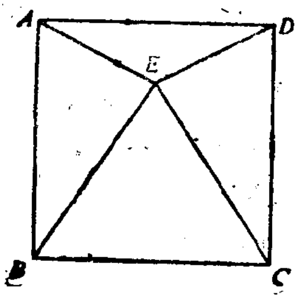

图 1·1

已知：在边长为 a 的正方形$ABCD$内有一点E，$AE=DE$，$\angle EAD=15^\circ$，见图1·1．

求证：$\triangle EBC$ 为正三角形．

证明：设$\angle EBC=\alpha$．

在 $\triangle AEB$中：

$AE=\dfrac{a}{2\cos15^\circ}$，$\angle ABE=90^\circ-\alpha$，

$\angle AEB=15^\circ+\alpha$，

由正弦定理

$$\frac{AE}{\sin\angle ABE}=\frac{AB}{\sin\angle AEB},$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2\cos15^\circ\cos\alpha}=\frac{a}{\sin(15^\circ+\alpha)},$$

$$\therefore\quad 2\cos15^\circ\cos\alpha=\sin15^\circ\cos\alpha+\cos15^\circ\sin\alpha,$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}15^\circ=2-\mathrm{tg}\alpha，又\mathrm{tg}15^\circ=2-\sqrt{3},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}.\qquad \therefore\quad \alpha=60^\circ.$$

同理可证$\angle ECB=60^\circ$.

$\therefore$ $\triangle EBC$为正三角形.

例 2 正三角形ABC外接圆的弧$\overset{\frown}{BC}$上任意一点P，连结PA、PB、PC，见图1·2.求证：$PA=PB+PC$.

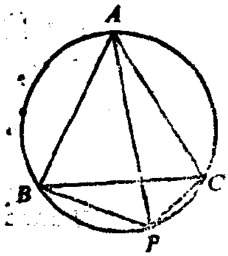

图 1·2

证明：设$\angle PCB=\alpha$，则$\angle PAB=\alpha$，$\angle PAC=\angle PBC=60^\circ-\alpha$，$\angle PCA=60^\circ+\alpha$，

则 $PA=2R\sin(60^\circ+\alpha)$，

$PC=2R\sin(60^\circ-\alpha)$，

$PB=2R\sin\alpha$，

其中，R为外接圆的半径.

$$\therefore\quad PB+PC=2R[\sin\alpha+\sin(60^\circ-\alpha)]$$

$$=2R\cdot2\sin30^\circ\cos(30^\circ-\alpha)$$

$$=2R\sin(60^\circ+\alpha)=PA$$

$$\therefore\quad PB+PC=PA$$

例 3 托勒密定理：圆内接四边形二对角线的积等于两组对边积的和。

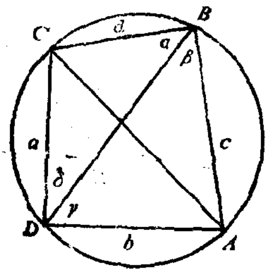

图 1·3

已知：$ABCD$内接于⊙O，

求证：$AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$

证明：设⊙O的半径为R，$AC=x$，$BD=y$，各边分别为a、b、c、d，$\angle CBD=\alpha$，$\angle ABD=\beta$，$\angle BDA=\gamma$，$\angle BDC=\delta$、（见图1·3）。

则 $a=2R\sin\alpha$，$b=2R\sin\beta$，$c=2R\sin\gamma$，$d=2R\sin\delta$，

$x=2R\sin(\alpha+\beta)$，$y=2R\sin(\beta+\gamma)$.

$$\therefore\quad ac+bd=4R^2(\sin\alpha\sin\gamma+\sin\beta\sin\delta)$$

$$=-2R^2[\cos(\alpha+\gamma)-\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta+\delta)-\cos(\beta-\delta)],$$

又 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$，

$$\therefore\quad ac+bd=2R^2[\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\beta-\delta)].$$

$$xy=4R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$$

$$=-2R^2[\cos(\alpha+2\beta+\gamma)-\cos(\alpha-\gamma)]$$

$$=2R^2[\cos(\beta-\delta)+\cos(\alpha-\gamma)],$$

$$\therefore\quad ac+bd=xy,$$

$$\therefore\quad AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC.$$

例 4 已知 B,C将线段AD三等分，以 BD 为直径作

圆，过A作圆的割线APQ，见图1·4.求证：

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle ACP\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle ACQ \text{为定值.}$$

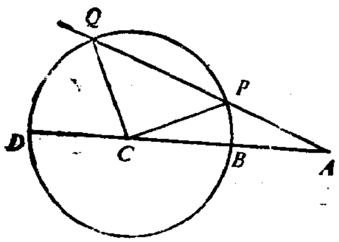

图 1·4

证法 1：

设$\angle ACQ=\alpha$，$\angle ACP=\beta$，$AD=3a$，$AB=a$.

又设 $AP=x$，则

$$AQ=\frac{3a^2}{x}.$$

在$\triangle AQC$ 中，

$$\cos\alpha=\frac{5a^2-\frac{9a^4}{x^2}}{4a^2},$$

$$\therefore\quad \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{5x^2-9a^2}{4x^2},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{9a^2-x^2}{9(x^2-a^2)}.$$

在$\triangle APC$ 中，$\cos\beta=\dfrac{5a^2-x^2}{4a^2}$，

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{x^2-a^2}{9a^2-x^2}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{9},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}\qquad\text{（定值）}.$$

证法 2：设$AD=3r$，以C为原点，CA 为x轴正向，建立直角坐标系，则$\odot C$方程为

$$\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha,\end{cases}\quad(\alpha\text{是参数})\qquad ①$$

直线APQ方程为：$y=K(x-2r)$，　②

①代入②　$r\sin\alpha=K(r\cos\alpha-2r)$，

$$\therefore\quad \frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=K\left(\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}-2\right),$$

整理得　$3K\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+K=0$,

$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\angle ACP$, $\mathrm{tg}\frac{1}{2}\angle ACQ$ 分别为上述方程的两根．由韦达定理有

$$\mathrm{tg}\frac{1}{2}\angle ACP\cdot\mathrm{tg}\frac{1}{2}\angle ACQ=\frac{1}{3}.$$

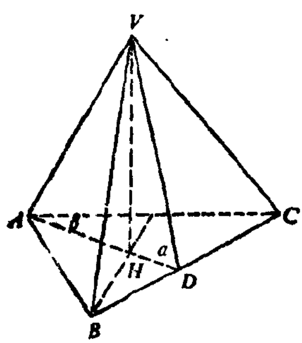

图 1·5

例 5　三棱锥V-ABC的高VH的垂足H是底面$\triangle ABC$的垂心，若$VC=VB=BC=a$，且侧面VBC与底面ABC所成的角为α，试用a和α表示棱锥V-ABC的体积．

证明：连AH并延长交

BC于D，连VH，VD.（见图1·5）.

$\therefore$ H为$\triangle ABC$的垂心，

$\therefore$ $AD\perp BC$

又$VH\perp\triangle ABC$，HD为VD在底面ABC内的射影，

$\therefore$ $VD\perp BC$，

$\angle ADV$是侧面VBC与底面ABC所成的二面角，故

$\angle ADV=\alpha$.

$\because$ $VC=VB=a$，又$VD\perp BC$，

$\therefore$ $BD=CD=\frac{1}{2}a$.

设$\angle HAC=\beta$，则$\angle HBC=\beta$.

在$\mathrm{Rt}\triangle HBD$中，$HD=\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\beta$；

在$\mathrm{Rt}\triangle VHD$中，$VH=\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$；

在$\mathrm{Rt}\triangle ADC$中，$AD=\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\beta$.

$\therefore$ 棱锥$V-ABC$的体积

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\beta\right)\cdot\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha$$

$$=\frac{1}{24}a^3\operatorname{tg}\alpha.$$

小结

用三角法证明几何题，关键就是找到一个与已知条件和未知条件均为密切的角为参数.

二、用三角函数求最大最小值

例 1 已知扇形OAB中，圆心角$\angle AOB=\alpha\ (0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，半径为$r$，$P$是$\overset{\frown}{AB}$上的动点，过$P$作$OB$的平行线交$OA$于$Q$，见图1·6.求$\triangle OPQ$面积的最大值.

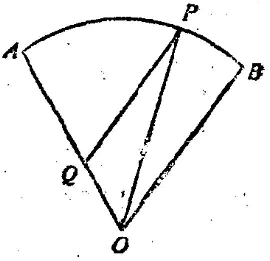

图 1·6

解法 1

设$\angle POB=\beta$，则在$\triangle OPQ$中，

$\angle POQ=\alpha-\beta$，$\angle QPO=\beta$，

$\angle PQO=\pi-\alpha$.

由正弦定理

$$OQ=\frac{r\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$\triangle POQ\text{面积 } S=\frac{1}{2}OQ\cdot OP\sin(\alpha-\beta),$$

$$=\frac{1}{2}r^2\frac{\sin\beta\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{r^2}{4\sin\alpha}[\cos(2\beta-\alpha)-\cos\alpha],$$

又 $-\frac{\pi}{2}<2\beta-\alpha<\pi$.

$\therefore$ 当$\cos(2\beta-\alpha)=1$时，

$$S_{max}=\frac{r^2}{4}\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{r^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

解法 2：在$\triangle POQ$中，

$$r^2=OQ^2+QP^2+2OQ\cdot QP\cos\alpha$$
$$\geqslant 2OQ\cdot QP(1+\cos\alpha),$$
$$\therefore\ OQ\cdot QP\leqslant\frac{r^2}{2(1+\cos\alpha)},$$

即当 $OQ=QP$ 时，

$$(OQ\cdot QP)_{max}=\frac{r^2}{2(1+\cos\alpha)}.$$

$$\therefore\ S_{max}=\frac{1}{2}(OQ\cdot QP)_{max}\sin\alpha=\frac{r^2}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

例 2：等边△ABC的边长为a，过A的直线L 与△ABC共面，且L位于△ABC形外，与边AB成α角，以L为轴旋转一周，见图1·7.求△ABC所形成的旋转体的体积，并说明α为何值时，旋转体体积最大。

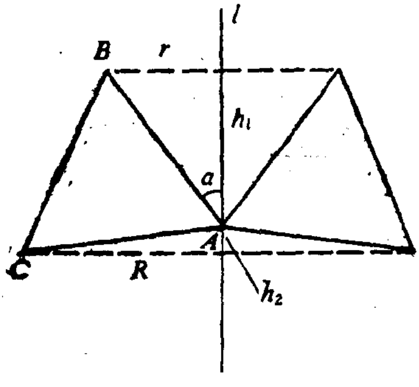

图 1·7

解：旋转体是由两个圆锥，一个圆台组成，如图1·7 实线部分. 其中
$r=a\sin\alpha$，$h_1=a\cos\alpha$，
$R=a\sin(120°-\alpha)$，
$h_2=a\cos(120°-\alpha)$，
$h=h_1+h_2$
$=a\cos(\alpha-60°)$。

$$V_{圆台}=\frac{\pi}{3}a\cos(\alpha-60°)[a^2\sin^2\alpha+a^2\sin^2(120°-\alpha)$$
$$+a^2\sin\alpha\sin(120°-\alpha)]$$
$$=\frac{\pi a^3}{3}\cos(\alpha-60°)\left\{1-\frac{1}{2}\left[\cos2\alpha+\cos(240°\right.\right.$$

$$-2\alpha)\Big]-\frac{1}{2}\Big[\cos 120^\circ-\cos(2\alpha-120^\circ)\Big]\Big\}$$

$$=\frac{\pi a^2}{3}\Big[\frac{5}{4}\cos(\alpha-60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)\cos(2\alpha-120^\circ)\Big]$$

$$=\frac{\pi a^3}{3}\Big[\frac{7}{4}\cos(\alpha-60^\circ)-\frac{1}{2}\cos 3\alpha\Big],$$

$$V_{锥上}=\frac{\pi a^2}{3}\cos\alpha\sin^2\alpha=\frac{\pi a^3}{6}\sin\alpha\sin 2\alpha$$

$$=\frac{\pi a^3}{12}(\cos\alpha-\cos 3\alpha),$$

$$V_{锥下}=\frac{\pi a^3}{12}[\cos(120^\circ-\alpha)-\cos 3\alpha],$$

$$V_{总}=\frac{\pi a^3}{3}\Big[\frac{7}{4}\cos(\alpha-60^\circ)-\frac{1}{2}\cos 3\alpha-\frac{1}{4}\cos\alpha+\frac{1}{4}\cos 3\alpha-\frac{1}{4}\cos(120^\circ-\alpha)+\frac{1}{4}\cos 3\alpha\Big]$$

$$=\frac{\pi a^3}{3}\Big\{\frac{7}{4}\cos(\alpha-60^\circ)-\frac{1}{4}\Big[\cos(120^\circ-\alpha)+\cos\alpha\Big]\Big\}$$

$$=\frac{\pi a^3}{2}\cos(\alpha-60^\circ),$$

又 $0^\circ<\alpha<120^\circ$， $\therefore$ $-60^\circ<\alpha-60^\circ<60^\circ$.

$\therefore$ 当 $\cos(\alpha-60^\circ)=1$，即 $\alpha=60^\circ$ 时，

$$V_{max}=\frac{\pi}{2}a^3.$$

例 3 $\triangle ABC$三边分别为a，b，c，且$a>b>c$，在两条边上分别取二点P，Q，PQ将$\triangle ABC$面积二等分，求 PQ的最小值.

解：设P，Q分别在AB、BC上，且$BP=x$，$BQ=y$.

则
$$xy=\frac{1}{2}ac.$$

又 $PQ^2=x^2+y^2-2xy\cos B\geqslant 2xy(1-\cos B)$

$$=ac(1-\cos B)=\frac{2\Delta(1-\cos B)}{\sin B}=2\Delta\operatorname{tg}\frac{B}{2},$$

（其中 Δ 为面积）.

同理可证：P，Q在CA，CB上时，$PQ^2\geqslant 2\Delta\operatorname{tg}\frac{C}{2}$；

P，Q在AB，AC上时，$PQ^2\geqslant 2\Delta\operatorname{tg}\frac{A}{2}$.

$\because$ $a>b>c$，$\therefore$ $A>B>C$，

$\therefore$ $2\Delta\operatorname{tg}\frac{A}{2}>2\Delta\operatorname{tg}\frac{B}{2}>2\Delta\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

$$\therefore\ (PQ)_{min}=\sqrt{2\Delta\operatorname{tg}\frac{C}{2}}=\sqrt{2\Delta\cdot\frac{\Delta}{s(s-c)}}$$

$$=\sqrt{2(s-a)(s-b)}.$$

其中，$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

三、三角代换

1. 证明条件等式

例 1 设x，$y\in R$，且$y^2=(a^2-c^2)\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$，$(a>c>0)$．求证：

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

证明：注意到$y^2\geqslant 0, a>c\Rightarrow 1-\dfrac{x^2}{a^2}\geqslant 0\Rightarrow\left|\dfrac{x}{a}\right|\leqslant 1$。

可设$x=a\sin\theta$，$\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $y^2=(a^2-c^2)\cos^2\theta$，

$\because$ $(x-c)^2=(a\sin\theta-c)^2$，$(x+c)^2=(a\sin\theta+c)^2$，

$\therefore$ $(x+c)^2+y^2=(a+c\sin\theta)^2$，

$(x-c)^2+y^2=(a-c\sin\theta)^2$，

又 $a-c\sin\theta>0$，$a+c\sin\theta>0$，

$\therefore$ $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$。

例 2 已知 $a+b+c=abc$，求证：

$$a(1-b^2)(1-c^2)+b(1-a^2)(1-c^2)+c(1-a^2)(1-b^2)=4abc.$$

证明：注意到$a+b+c=abc$，可设 $a=\operatorname{tg}\alpha, b=\operatorname{tg}\beta$，$c=\operatorname{tg}\gamma$。

$\therefore$ $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$，

$\therefore$ $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma$，

即 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=-\operatorname{tg}\gamma$，$\alpha+\beta=K\pi-\gamma$，

$\therefore$ $\alpha+\beta+\gamma=K\pi,(K\in z)$，

$\therefore$ $2(\alpha+\beta+\gamma)=2K\pi$，