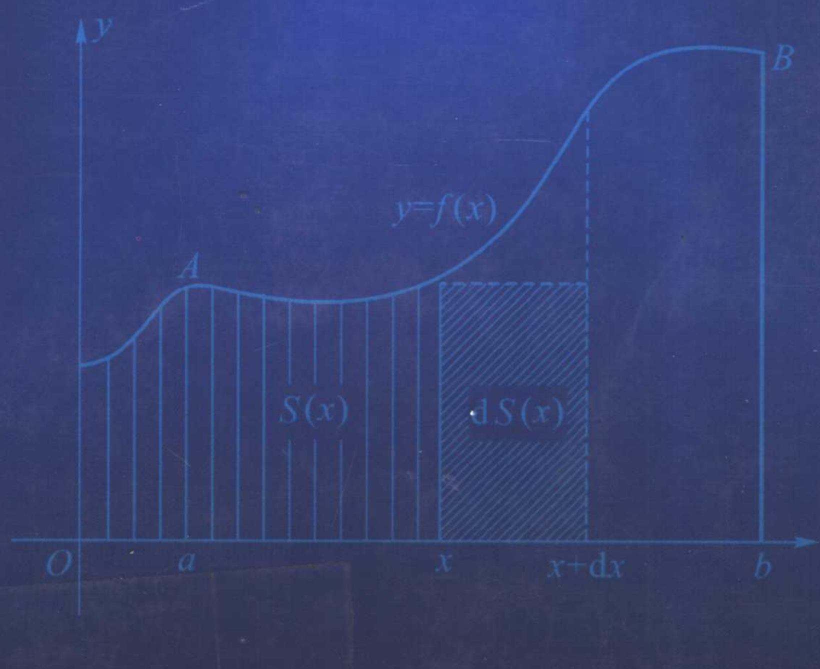
# 微积分（上）

# Calculus（I）

阎占立 编




CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

# 微积分(上)

阎占立　编

郑州大学系统科学与数学系

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分(上)/阎占立 编　北京:高等教育出版社;
海德堡:施普林格出版社,2000.7
ISBN 7-04-008693 X

Ⅰ.微…　Ⅱ.阎…　Ⅲ.微积分　Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 63085 号

微积分(上)
阎占立　编

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社　施普林格出版社 | | |
| **社　址** | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　话** | 010-64054588 | **传　真** | 010-64014048 |
| **网　址** | http://www.hep.edu.cn | | |
| **经　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **印　刷** | 北京民族印刷厂 | | |
| **开　本** | 787×1092　1/16 | **版　次** | 2000 年 7 月第 1 版 |
| **印　张** | 22 | **印　次** | 2000 年 7 月第 1 次印刷 |
| **字　数** | 550 000 | **定　价** | 22.50 元 |

# 写给教师的话

本书是为大学理工科各专业和文理科部分专业编写的教材.全书分为:

微积分(一)(一元函数微积分)

微积分(二)(多元函数微积分)

微积分(三)(专题　仅供理工科部分专业选用)

自牛顿-莱布尼茨时代开始到现在的三百多年间,微积分的教科书和专著足有上百种之多,可以说,它在理论的深度上和应用的广度上都已经是非常完美的了.但是,微积分作为理工科和文理科的重要基础课,在教材内容的取舍和各部分先后次序的安排(以及教师的讲授方法)上,应当说还有许多问题有待讨论.大家对其中有些问题可能不会(也不需要)有一个一致的意见.

1976年,我在物理系讲授高等数学时总感觉到有一个很难处理的问题,那就是如何能够为普通物理和其它专业基础课,及时地准备好这些课程所需要的微积分基础知识(当时的情形是普通物理与高等数学同时开课).本书第1章(微积分浅释)的雏形正是当时为解决上述问题而编写的讲义的一部分.现在,虽然都把普通物理等专业基础课放在一年级第二学期开课,可是教学对象与专业基础课的内容和要求也与那时不同了,微积分教学滞后于专业基础课教学的情形在教学过程中还依然存在.因此,想再试一试看能否解决上述问题是编者编写本书的目的之一.

自实行双休日制度和新生军训制度以来,微积分教学的学时数量相对减少,教学内容多同讲授时数少之间就产生了矛盾.要解决这个问题,就得把注意力放在教学改革(包括改革教材和教法)上.把那些不属于微积分理论和方法的主体部分留给学生去阅读,一方面可以省出授课时数,另一方面也培养了学生的阅读能力.我们常说“培养分析问题和解决问题的能力”,那么阅读能力也应当包括在其中.本书中的阅读材料(包括注释和带“*”的内容)正是为了达到上述目的而设计的.

学习数学似乎能够自然地培养自己正确思维的习惯,但是学习一点形式逻辑的基础知识能自觉地去正确思维,避免逻辑错误.我们常说“注重素质教育”,对数学教学来说,主要应指培养学生正确思维的习惯和提高他们的基本演算能力.书中插入的有关形式逻辑的基础知识,多数都是学生在中学语文课中学习过的,并且都是以注释形式出现在有关章节之后.它们当然不属于教师的讲授内容.

微积分(一)的前6章适用于开设有微积分课程的所有专业.讲完这6章,约需48~50个学时.从第7章开始,教师可根据不同专业对以后的章节加以取舍或变动次序.例如,对于理工科各专业,假若第一学期讲不完微积分(一)的话,可先讲第9章(把第8章留到第二学期讲),因为在第二学期开课的普通物理课(质点运动学)要用到向量微分法.讲完上册(包括重点讲评部分习题的解法)约需74~76个学时(学时分配在目录中).

下册是根据理工科中物理类各专业对微积分的教学要求和计划在80个学时内讲完的想法编写的(学时分配在目录中).为了也能适用于那些计划总学时数较少的其它专业,就把下册

分成了两部分:微积分(二)[约需 54 个学时]和微积分(三)[约需 26 个学时].其中,微积分(二)的前 3 章(即第 11、12、13 章),除带有“*”的几节外,也适用于经济类的某些专业[约需 34 个学时].

在本书编写过程中,得到郑州大学教务处和数学系领导的鼓励和支持,也得到系里众多教师的帮助.在本书初稿试用的四年(1996-1999)间,很多教师都对其中的错误给予指正,并对如何修改提出宝贵意见.在此,对他们的支持和帮助表示衷心的感谢.书中可能还会有错误和不当之处,恳请专家和采用本书作为教材的教师们指正.

编者

2000 年 6 月

# 写给学生的话

学习任何一门科学知识，都要花费时间和精力，掌握一个科学的学习方法，就会省时，省力，收到事半功倍的效果. 你学习的任何一门课程，不管它属于自然科学，还是社会科学或交叉学科，由于它自身的特点，就决定了学习它的科学方法.（大学）数学的特点是什么呢？抽象性和运用逻辑不能算是它独有的特点，因为任何一门理论科学都有不同程度的抽象性，并且也都运用到逻辑. 数学的特点，简单地说，就是它的任何一个结论，除少数公理（公理是通过实践检验为正确的结论）外，都必须根据概念的定义和已经证明为正确的结论，通过推理（思维的一种逻辑形式）来论证. 实验科学（如物理和化学）可以通过反复实验来验证它的结论的真实性（与客观事实相符或基本相符），但是数学不能用米尺（不论最小刻度多么小）通过测量来证明勾股定理. 社会科学中的一个结论，可能是大致地包括一般，但是数学中的任何一个结论，都不能有一个例外，否则，这个结论就是不正确的.

人们在实践中得到的（同类）感性认识多了就会在头脑中产生一个概念，它是一类客观事物的本质属性（而不是个别现象）在人们头脑中的（正确）反映. 概念有它的内涵（事物的本质属性）与外延（概念所反映的那一类事物）. 概念是存在于人们头脑中抽象的东西，要把一个概念与另一些概念区别开来，就要借助词语称呼它，并用简明扼要的语言给它下定义.

就人们的认识过程来说，随着认识的不断深化，反映在人们头脑中的概念是可以改变的，例如古代人说的“数”可能只有 1,2,3，而我们现在说的“数”不仅有自然数、分数、无理数，而且还有它们的相反数. 当然，作为明确概念的定义也会随着改变. 一门科学中的重要概念的定义，往往标志着那门科学发展的水平，甚至会产生一种新的科学理论.

就人们的思维来说，概念必须是同一的，不能说是“东”又是“西”，似是而非，捉摸不定. 不然的话，就要犯“偷换概念”的逻辑错误.

微积分（学）这门科学，研究的对象是函数，确切一点说，应当是“连续函数”或“几乎连续函数”. 它的理论基础是描述函数变化状态或变化总趋势的极限理论. 当你在中学里学习到数列极限（函数极限的简单情形）时，你是否也曾认为“$0.\dot{9}<1$”，或者向教师提出过“不论 $0.\dot{9}=0.999\cdots$ 中有多少个 9，也不会等于 1”这样的问题. 那么现在反问你：“假若 $0.\dot{9}<1$，那么 $0.\dot{9}$ 比 1 小多少？”你不可能说出一个正数 $\varepsilon$（无论它有多么小）使 $1-0.\dot{9}\geqslant\varepsilon$. 因此，$0.\dot{9}=1$. 事实上，我们说“$0.\dot{9}=1$”是指

$$
\begin{aligned}
0.\dot{9} &= 0.999\cdots = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots+\frac{9}{10^n}\right) \\
&= \frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^{n-1}}\right) \\
&= \frac{9}{10}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}} = \frac{9}{10}\cdot\frac{10}{9}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = 1-0 = 1
\end{aligned}
$$

而你向教师所提问题的那句话中,不仅包含着“事实错误”($0.\dot{9}<1$),而且也包含有“逻辑错误”(偷换概念).所谓“事实错误”,就是结论与事实不相符(即结论不真实);所谓“逻辑错误”,就是把一种思想与另一种思想不正确地联结在一起(即思维不正确).在上述那句话“不论$0.\dot{9}=0.999\cdots$中有多少个9,也不会等于1”中,前面说的是$0.\dot{9}=0.999\cdots$(无限循环小数),而在得出结论时又把它偷换成$0.999\cdots9$(有限小数).这样,就违反了思维中的“同一律”.

读者知道,数学中所说的“相等”或“等于”(记成“=”)都是就研究的具体对象在某种确定的含义下才有意义,离开研究的具体对象和确定的含义来谈论“相等”是没有意义的,而且有可能犯逻辑错误,从而造成事实错误.不论何时何地,即使最后的结论是真实的,逻辑错误也是不允许犯的,因为这种思维是不正确的,或者说是不合逻辑的.学习高等数学(这里指微积分)当然离不开初等数学的那些知识,但是读者要小心,由于研究的对象变了,不要把限于初等数学才能运用的术语(包括记号)和结论,随意照搬到高等数学中来.这就是说,对于高等数学中的某些概念和结论,你用初等数学的观念是不可理解的.

不论是初等数学,还是高等数学,其中都会有很多概念和定理(正确的重要结论).概念的内涵是用定义这一逻辑形式说明的,假若不理解定义说的是什么,就会在形成判断(思维的逻辑形式)和进行推理时出现逻辑错误,进而有可能造成事实错误.学习过程中,当然应该开动脑筋,独立思考,灵活运用,但是当你还没有完全理解概念的定义和定理的意思时,千万不要随意去改动其中一个字或一个词,甚至一个记号,因为这样做的结果有可能造成逻辑或事实上的错误.因此,当你还不很理解一个概念时,就先把它的定义死记硬背下来,在以后的不断学习过程中会逐渐理解它.非数学专业的读者学习高等数学时,常常只记定义与结论(不记定义与结论就更不对了),而不喜欢看定理的证明.其实,看一看证明(即论证),一是可以加深你对概念的理解程度,二是从看定理的证明中有时会学习到解题方法.

微积分(学)的英文名称“*calculus*”,有计算(或演算)的含义.可见,读者学习微积分必须做一定数量的习题(尤其是求函数的导数与积分),不然的话,就是“上山打柴而空手归”.做微积分的习题时,开始都是照着书上或教师在黑板上举的例题,“比着葫芦画瓢”.当你还不很理解其中的道理时,尤其应当如此,即使把例题抄一遍,对你也会有好处.

在做微积分习题时,也要像在中学里做数学习题那样,算式要整齐和有规矩,还要正确使用标点符号.遇到有不会做的习题时,可以先把它放在一边,去做其它的习题;你做题多了,熟能生巧,再回过头来去做那些习题时,或许会感到它很容易.对于带“*”的习题,你不必勉强去做它.

本书所编入的注释与阅读材料也是本书的组成部分,希望读者能够认真阅读一下.至于本书中的附录和下册中带“*”的几节,除数学专业的读者外,没有兴趣的读者可以不看它.

编者

2000年6月

# 目　录



① 方框中的 8 表示学时数，以下类同.

# 第 0 章　阅读(中学数学知识摘要)

本章大多数内容是读者在中学数学中学习过的基础知识,我们把它们在本章汇总的目的是解释一下本书以后常用的有关中学数学的术语、记号和结论.对于有较好中学数学基础的读者来说,只要粗读一下就行了.读一读它,或许你能从中学到一些你还不曾知道的新知识.

## §0-1　集合及其运算

**1. 集合**　把具有某种特性的对象(或事物)放在一起就说它们组成一个集合(简称为集),其中每一个对象称为该集合的元素(简称为元).集合与元素在近代数学中都作为原始概念,就像几何学中的点、直线和平面.当不需要写出集合的具体元素时,就用大写字母 $A$、$B$、$C$、…表示集合;当有必要写出集合的元素时,可以把集合的所有元素都写在一个花括号内(同一个元素不准重复出现)表示这个集合,也可以表示成形式 $\{x \mid P(x)\}$,其中 $x$ 表示元素,而 $P(x)$ 表示元素 $x$ 具有性质 $P$.例如,全体正整数组成的集合可以表示成

$$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\} \quad 或者 \quad \{n \mid n 为正整数\}$$

集合的元素有时用小写字母 $a$、$b$、$c$、…表示.$a$ 是集合 $A$ 的元素就记成"$a \in A$",读作"$a$ 属于 $A$";$a$ 不是集合 $A$ 的元素就记成"$a \overline{\in} A$",读作"$a$ 不属于 $A$".空集作为一个特殊的集合不含任何元素,记成 $\varnothing$.

**2. 集合的运算**　两个集合 $A$ 与 $B$ 含有相同的元素时就记成"$A=B$",读作"$A$ 等于 $B$".若集合 $A$ 的元素都是集合 $B$ 的元素时就记成"$A \subset B$",读作"$A$ 包含在 $B$ 中"或"$B$ 包含 $A$",也称 $A$ 为 $B$ 的子集(特别地,$A=B$ 时,$A$ 也算作 $B$ 的子集).空集可看作任何集合的子集.

当讨论集合之间的运算时,首先需要约定一个"大集合"$U$(在集合论中称 $U$ 为全集),而所讨论的集合都是 $U$ 的子集.设 $A$ 与 $B$ 都是 $U$ 的子集,把 $A$ 与 $B$ 的所有元素放在一起组成的新集合记成"$A \cup B$",即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A 或 x \in B\}$$

称它为 $A$ 与 $B$ 的并(集);而把 $A$ 与 $B$ 的公共元素放在一起组成另一个新集合记成"$A \cap B$",即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A 且 x \in B\}$$

称它为 $A$ 与 $B$ 的交(集).假若 $A$ 与 $B$ 没有公共元素,即 $A \cap B = \varnothing$,就说它们不相交.属于 $A$ 而不属于 $B$ 的所有元素组成的新集合记成"$A-B$"或"$A \setminus B$",即

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A 且 x \overline{\in} B\}$$

称它为 $A$ 减去 $B$ 的差(集).设 $A$ 为全集 $U$ 的子集,则称差

$$U - A = \{x \mid x \in U 且 x \overline{\in} A\}$$

为 $A$(关于 $U$)的余集或补集,记成 $A^c$.

## §0-2　实数

用单位量去测量同类量时就得到抽象的"数".在人们的日常生活或工程技术实践中,有理数(正整数、负整数、零、正分数与负分数)足够用了.但在理论研究工作中,有必要把数的概念

作进一步的扩张，因为从精确意义上说，有理数不足以表示连续量的大小或多少．早在公元前 5 世纪时的古希腊人认为线段是由不能再分割的最小“原子”组成的，当把取作单位的线段的长度看作 $m$ 个原子组成时，每个原子的长度为 $\frac{1}{m}$，而含 $n$ 个原子的线段的长度就是 $\frac{n}{m}$(有理数)．后来不久，古希腊人又发现，边长为一个单位长的正方形的对角线的长度不是有理数．事实上，假若它是有理数，则它可以表示成既约分数 $\frac{n}{m}$($n$ 与 $m$ 没有公因数)．根据勾股定理，$\left(\frac{n}{m}\right)^2=1^2+1^2=2$，即 $n^2=2m^2$，故 $n$ 为偶数．设 $n=2k$($k$ 为正整数)，则 $(2k)^2=2m^2$ 或 $m^2=2k^2$，故 $m$ 也是偶数．这样一来，$n$ 与 $m$ 就有公因数 2，与 $\frac{n}{m}$ 是既约分数的假设相矛盾．现在，人们都知道，它是无理数 $\sqrt{2}$(可是，无理数理论一直到 19 世纪 70 年代才建立起来)．

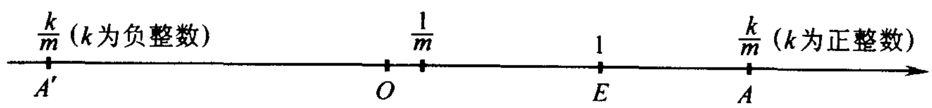



图 0－1

大家都知道，任一个有理数 $\frac{k}{m}$($m$ 为正整数，$k$ 为整数)都可以用数轴(确定有原点和单位的有向直线)上的某一个点表示．首先把单位(线段)$OE$ 分成 $m$ 等份，若 $k$ 是正整数，在数轴上自原点 $O$ 朝着正方向取线段 $OA$，使 $OA$ 的长度等于 $k$ 个等份(即长度为 $\frac{k}{m}$)，于是点 $A$ 就表示正有理数 $\frac{k}{m}$；若 $k$ 是负整数，在数轴的负方向上取点 $A'$，使 $OA'$ 的长度等于 $\frac{-k}{m}$(图 0－1)．

如果设想在数轴上画出表示所有可能的有理数的点(称为有理点)，则数轴将不能被这些有理点所填满，即在数轴上还会留下很多空隙．例如，图 0－2 中那个边长为一个单位的正方形，它的对角线的长度所对应的点 $A$ 就是这些空隙中的一个．这表明，所有的有理点组成的集合与数轴上所有点组成的集合相比较是不完备的，或者说是不连续的．我们就把数轴上除有理点外的其它点(空隙)称为“无理数”所对应的无理点(这里当然不能算是无理数的定义)．有理数与无理数合称为实数．于是，实数集合与数轴上点的集合是一一对应的．为方便起见，我们以后把实数与数轴上表示实数的点不加区别，例如“数 $a$”有时就说成“点 $a$”．这当然是就它们之间的一一对应关系来说的，而不是说，“实数”就是数轴上的“点”．至于“实数”到底是什么，读者可以不必管它，只要知道它的运算性质(如同有理数那样)就行了．

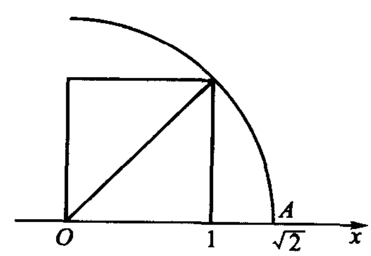



图 0－2

**1．绝对值**　实数 $a$ 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$$

在数轴上，实数 $a$ 的绝对值 $|a|$ 表示点 $a$ 到原点 $O$ 的距离．

假若引入记号

$$\operatorname{sgn}a=\begin{cases}1, & a>0\\ 0, & a=0\\ -1, & a<0\end{cases}$$

其中 sgn 是 sign(记号,符号)的缩写,则实数 $a$ 的绝对值

$$|a|=a\cdot\operatorname{sgn}a$$

实数的绝对值有下面的性质:

(i) $|a|\geqslant 0$ (ii) $\pm a\leqslant|a|$ 或 $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$

(iii) $|-a|=|a|$ (iv) $|ab|=|a||b|$

(v) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ (vi) $||a|-|b||\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$

除最后一个性质外,其余性质都是很明显的.下面只证性质(vi):

由 $\pm a\leqslant|a|$ 与 $\pm b\leqslant|b|$ 推出 $\pm(a+b)\leqslant|a|+|b|$,故

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

而 $|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|$. 又因为

$$|a|=|(a\pm b)\mp b|\leqslant|a\pm b|+|b|$$

所以,$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|$;同理 $|b|-|a|\leqslant|b\pm a|$. 因此

$$\pm(|a|-|b|)\leqslant|a\pm b| \text{ 或 } ||a|-|b||\leqslant|a\pm b|$$

**2. 算术根** 正数 $a$ 的 $n$ 次正方根 $p$($p>0$ 且 $p^n=a$)称为 $a$ 的$n$ 次算术根,记成 $\sqrt[n]{a}$(规定 $\sqrt[n]{0}=0$). 特别,称 $\sqrt{a}$ ($a\geqslant 0$)为 $a$ 的算术平方根. 因此

$$\sqrt{(-5)^2}=5 \quad (\neq -5)$$

对于任何实数 $x$,总有 $\sqrt{x^2}=|x|$;除已知 $x\geqslant 0$ 外,一般不能写成 $\sqrt{x^2}=x$(因为 $x<0$ 时它不成立). 一个正数的偶次方根不是唯一的,而算术根是唯一的. 引入算术根的主要目的是在等式两端作开方运算时,等式(两端取算术根时)还能够保持成立.

**3. 区间** 实数的集合

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\} \quad 与 \quad [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

依次称为开区间与闭区间. 有时还遇到集合

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\} \quad (左闭右开区间)$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\} \quad (左开右闭区间)$$

因为其中 $a$ 与 $b$ 都是实数,所以称它们为有限区间. 全体实数组成的集合记成 $\mathbf{R}$ 或 $(-\infty,+\infty)$,其中“$-\infty$”与“$+\infty$”都是记号(暂且读作“负无穷大”与“正无穷大”),而不是实数. 但对于任何实数 $x$,我们约定可以记成“$-\infty<x<+\infty$”. 它与下面这些不解自明的区间

$$(-\infty,a)、\ (-\infty,a]、\ (a,+\infty)、\ [a,+\infty)$$

都称为无限区间. 以后为方便起见,不论是哪一种类型的区间,就统一地记成 $\langle a,b\rangle$,这里 $a$ 可以是 $-\infty$,而 $b$ 可以是 $+\infty$.

对于给定的正数 $\varepsilon$,不等式 $|x|<\varepsilon$ 与 $-\varepsilon<x<\varepsilon$ 是同解的,因为它们的解都是集合 $(-\varepsilon,\varepsilon)$. 而对于不等式 $|x|>\varepsilon$($\varepsilon>0$),或者 $x>\varepsilon$(当 $x>0$ 时),或者 $-x>\varepsilon$(当 $x<0$ 时). 因此

$$|x|>\varepsilon(\varepsilon>0)\text{ 当且仅当 } x>\varepsilon \text{ 或 } x<-\varepsilon$$

用集合的记号表示,就是

$$\begin{aligned}\{x \mid |x|>\varepsilon>0\} &= \{x \mid x>\varepsilon>0\} \cup \{x \mid x<-\varepsilon<0\} \\ &= (\varepsilon,+\infty) \cup (-\infty,-\varepsilon)\end{aligned}$$

## 习 题

1. 读者在中学数学中都已经知道如下恒等式:

(1) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n+1)n}{2}$; (2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(3) 牛顿二项式公式:

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\quad(0\leqslant k\leqslant n)$;

请你用数学归纳法证明下面的不等式:

(4) 伯努利(Bernoulli)不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同符号且都大于 $-1$. 特别地,

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(x>-1);$$

(5) $n!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n(n\geqslant 2)$; (6) $2!\ 4!\ \cdots(2n)!>[(n+1)!]^n\quad(n\geqslant 2)$;

(7) $\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

2. 设 $n$ 为正整数. 证明:

(1) $1+2a+3a^2+\cdots+na^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{(n+1)n}{2}, & a=1\\ \dfrac{1-a^n-na^n+na^{n+1}}{(1-a)^2}, & a\neq 1\end{cases}$ (2) $(n!)^2\geqslant n^n$.

## 选 解

1.(5)**证** 当 $n=2$ 时,$\left(\dfrac{2+1}{2}\right)^2=\dfrac{9}{4}>2\cdot 1=2!$;假设不等式对 $n=k$ 成立,则

$$(k+1)!=(k+1)k!<(k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right)^k=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}$$

根据不等式

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\geqslant 1+\frac{k+1}{k+1}=2\quad\text{(伯努利不等式)}$$

可得

$$(k+1)!<2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}\leqslant\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

根据数学归纳法,有

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\quad(n\geqslant 2)$$

## §0-3 数列与级数

"有头无尾"的一串有顺序的数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

称为无穷数列(简称为数列),简记成 $a_n(n=1,2,\cdots)$. 例如,

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

$$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$$

$$1,0,1,0,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots$$

记号"$a_n$"既表示数列本身(这时 $n=1,2,\cdots$),又表示该数列的通项或一般项.在以后的讨论中,读者可根据上下文或 $a_n$ 前的说明语(如数列 $a_n$ 或通项 $a_n$)加以区别.

**1. 数列的极限** 设有数列 $a_n(n=1,2,\cdots)$. 当 $n$ 无限变大时,$a_n$ 能够无限制地接近唯一常数 $c$,则称 $a_n$ 为收敛数列,并称 $c$ 为该数列 $a_n$ 的极限,记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c \quad \text{或} \quad a_n \to c(n\to\infty)$$

(简记成 $\lim a_n = c$) (简记成 $a_n \to c$)

为了用作推理,又把数列极限的定义换一种说法(称为"$\varepsilon - N$"说法),即称常数 $c$ 为数列 $a_n$ 的极限,假若 $c$ 满足下面的条件:

(甲) 任意给定正数 $\varepsilon$,都有相对应的正整数 $N=N(\varepsilon)$,当 $n \geqslant N$ 时,有 $|a_n - c| \leqslant \varepsilon$

读者在中学里对这种"$\varepsilon - N$"说法或许就没有完全弄明白,不过没有关系,你暂且可以把它放在一边.根据上面那种"无限接近"的说法,读者凭借直觉也会相信下面这些结论:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[m]{n}}=0,\ \lim_{n\to\infty}q^n=0\ (|q|<1)$$

当然,有的数列可能没有极限,例如上面指出的数列

$$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$$

$$1,0,1,\cdots,\frac{1-(-1)^n}{2},\cdots$$

没有极限的数列称为不收敛数列或发散数列.

为了使读者明白上述条件(甲)的含义,把条件(甲)再换一种说法(图 0-3):

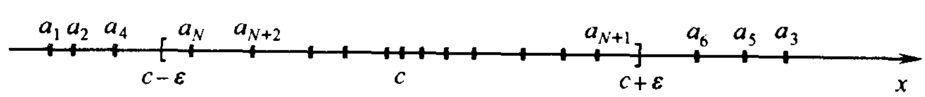



图 0-3

(乙)任意给定正数 $\varepsilon$,数列 $a_n$ 从某项 $a_N$($N$ 与 $\varepsilon$ 有关)开始,以后各项 $a_n(n\geqslant N)$都要落入区间$[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$(即 $c-\varepsilon \leqslant a_n \leqslant c+\varepsilon$).

或者说成：

(丙)任意给定正数 $\varepsilon$，数列 $a_n$ 落到区间 $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 外面的项(不是指数值)最多有有限个.

除极简单的能够一下看出某些数列的极限的情形外，一般都是按下面的极限运算规则求极限的.要证明这些规则，需要上面所说的“$\varepsilon - N$”说法，可是中学数学中没有继续这样做下去.读者学习到本书的§2－3时将会给出它们的证明.

下面的结论称为极限的四则运算规则：若数列 $a_n$ 与 $b_n$ 都有极限，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$，  $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n) = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ($k$ 为常数)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$  ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$).

**例 1** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})} = \dfrac{1}{1+0} = 1.$

**例 2**
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

**例 3** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$ ($a>0$ 为常数).

**证** 首先设 $a \geqslant 1$.令 $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$ ($h_n \geqslant 0$)，则

$$a = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2!}h_n^2 + \cdots + h_n^n \text{(二项式公式)}$$

于是，$a \geqslant 1 + nh_n$.从而

$$0 \leqslant h_n \leqslant \frac{a-1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$，即得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+h_n) = 1$.

其次，当 $0<a<1$ 时，$1/a>1$.根据已证的结论，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

**2. 级数及其收敛性** 把一个数列 $a_n$ ($n=1,2,\cdots$)的各项依次用加号“+”联结起来的式子

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

称为无穷级数(简称为级数).说它是“式子”，而不说是“和”，是因为我们不能像有限代数学中那样逐项加而得出一个数(即和)来.因此，我们要用极限法定义它的和.令

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\vdots$$

称 $s_n$ ($n=1,2,\cdots$)为上述级数的部分和.它是一个数列.若它有极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (常数)，则称

$s$ 为上述级数的和,记成

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=s$$

并称这样的级数为收敛级数.假若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在,则称它为发散级数.

例如,级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的部分和

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

于是,$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$,即该级数是收敛的且其和是 1,而且可以记成

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

再如级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\qquad(\text{调和级数})$$

假若它是收敛的,设它的和为 $s$,则它的所有偶数项组成的级数

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)+\cdots\cdots\end{aligned}$$

的和是 $\frac{1}{2}s$,从而它的所有奇数项组成的级数

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots$$

的和也是 $\frac{1}{2}s$.这是不可能的,因为

$$1>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{3}>\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5}>\frac{1}{6},\cdots$$

即上述调和级数是发散的.

若级数 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 是收敛的,则它的通项 $a_n$ 有极限为 0,即

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0\qquad(\text{级数收敛的必要条件})$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}s_n-\lim\limits_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0$.但是,请读者注意,不能仅仅由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 推出"级数是收敛的"! 因为它不是级数收敛的充分条件.例如,上面的调和级数,其通项 $a_n=\frac{1}{n}$ 的极限是 0,但它是发散的.

**3. 等比级数** 称形状为

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\quad(a\neq 0,q\neq 0)$$

的级数为等比级数(称 $q$ 为公比).令

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

则 $qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$,所以

$$s_n - qs_n = a - aq^n$$

因此,当 $q \neq 1$ 时

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{\text{首项} - \text{末项} \cdot \text{公比}}{1 - \text{公比}} \quad (\text{公比} \neq 1)$$

若 $|q| < 1$,则 $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$,从而

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{a - aq^n}{1 - q} = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}\right) = \frac{a}{1 - q}$$

若 $|q| > 1$,由于极限 $\lim\limits_{n \to \infty} aq^n\ (a \neq 0)$ 不存在,所以极限 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ 也不存在;当 $q = 1$ 时,

$$s_n = a + a + a + \cdots + a = na \quad (a \neq 0)$$

显然极限 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ 不存在;而当 $q = -1$ 时,

$$s_{2n-1} = a(a \neq 0), \quad s_{2n} = 0$$

极限 $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ 不存在.综合以上结论:当 $|q| < 1$ 时,等比级数是收敛的,且

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1 - q} \ (\text{和})$$

而当 $|q| \geqslant 1$ 时,等比级数是发散的(当然也就没有和).

## 习　题

1. 先把下列数列作恒等变换,再利用极限运算规则求出极限:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}}$;　(2) $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n} - \dfrac{n^2}{2(n+1)}\right]$;

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;　(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}$;

(5) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;　(6) $\lim\limits_{n \to \infty}\left[\sqrt{1 + 2 + \cdots + n} - \sqrt{1 + 2 + \cdots + (n-1)}\right]$.

2. 设有数列 $a_n\ (n = 1, 2, \cdots)$.若有

$$\lim_{n \to \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \to \infty} a_{2n} = c$$

证明:$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = c$(提示:根据条件丙).

3. 设数列 $a_n = \dfrac{1 - (-1)^n}{2}\ (n = 1, 2, \cdots)$,即

$$1, 0, 1, 0, \cdots, \frac{1 - (-1)^n}{2}, \cdots$$

为什么说它没有极限?[提示:根据条件丙说明 0 和 $c \neq 0$ 都不是它的极限.]

4. 举例说明:若数列 $a_n$ 与 $b_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 都没有极限,而数列 $a_n + b_n$ 与 $a_n b_n$ 可能会有极限.

5. 设数列 $a_n$ 有极限(即收敛),而数列 $b_n$ 没有极限(即发散).你对数列