大范围变分学

弗尔　W.施雷法著　江嘉禾譯　吳文俊　岳景中

大范圍变分学

(Marston Morse 理論)

H. 賽弗尔　W. 施雷法　著

江　嘉　禾　譯

吳文俊　岳景中　校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书用有限的拓扑学知識，闡明 M. Morse 研究大范圍变分問題的拓扑方法，叙述簡明扼要，易为讀者接受。全书共分三章，第一章連通数和型数，討論了邻域空間的連通数和其上連續函数的临界值的型数，闡明了两条公理并建立了連通数和型数之間的关系。第二章逗留点的型数，討論了欧氏空間上逗留点的型数及其性质。第三章閉流形上的变分問題，利用前两章的方法来討論大范圍变分問題，着重考虑閉流形上的测地綫問題。另有附录一篇，叙述閉流形上的逗留点，討論了一些更精确的結果。注釋一篇，就正文中的某些論据作了交代。最后譯者对原书附录中的結果，补加了近代拓扑学的証明。本书可供高等学校数学系拓扑专門組作为教材或参考书。

VARIATIONSRECHNUNG IM GROSSEN

(Theorie Von M. Morse)

H. Seifert, W. Threlfall

Chelsea Pub. Co., 1948.

大 范 圍 变 分 学

(M. Morse 理論)

江嘉禾 譯 吳文俊 岳景中 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 787×1092 1/25 印張 5 9/25 排版字数 109,000

1963 年11月第 1 版 1963 年11月第 1 次印刷 印数 1—4,000

統一书号 13119·539 定价(十四) 0.78 元

序　言

我們在这本专著里将独立地論述大范圍变分学的一些結果，这些結果是 Marston Morse 作出的。而追源溯流，却不能不說是受了 H. Poincaré 以拓扑学来处理分析問題的影响。有关的資料出自 M. Morse 的下列两本著作：

I. The calculus of variations in the large, Amer. Math. soc. colloquium publ. Vol. 18, New York 1934.

II. Functional topology and abstract variational theory, Mémorial des sciences math. Paris 1938.

此外可参考

III. C. Carathéodory, Variationsrechnung (Leipzig 1934). 該书有一个附录,簡要地叙述了某些重要的工作。

另外一些文献目录見书末的注釋。

鉴于本书的目的，我們不拟涉及指示型这个概念以及有关結果的分析討論,而尽可能单純地来建立一些少有介紹的拓扑方法。

为了簡明易讀起見,我們往往不去照顾应有的一般性,所以,这里只限于討論測地綫問題，而不着手考虑任意的正性且正性正規的变分問題;我們只在最后一节才把固定端点問題引伸到任意端点流形的情形;而对于 Riemann 尺度的基本量,我們假定了它的三次連續可微性,虽然稍費一些笔墨，还是可以从它的二次連續可微性推出所需要的一条測地綫的长度对端点局部坐标的二次連續可微性的。因此，除了少数例外，在正文或注釋中引进的定理都是以适合于我們这个目的的形式来証明的,例如基本长度的存在性卽是。

繪制一些附图得到 H. Fischer 先生的帮助。費心为我們审閱的

有下列諸位先生：W. Blaschke, C. Carathéodory, W. Hantzsche, H. Kneser, W. Maak, W. Magnus, M. Morse, H. Wendt.

H. Seifert

W. Threlfall

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

正文中置于上方圖括弧內的数字表示书末注釋的序碼

引　論

小范圍变分学是和一条泛极綫的直接邻域打交道。它的一个任务，例如說，在于建立这条泛极綫与某些邻近的曲綫相較給出极小值的必要和充分条件。**大范圍**变分学則是考虑界定变分問題的整个流形 $\mathfrak{M}$. 例如，設 $\mathfrak{M}$ 是一个同胚于球面的曲面，配备了一个 Riemann 尺度，于是要考虑的就是連接两个固定点 A 和 B 的**所有**測地綫。

Morse 解决这个或别的大范圍变分問題的思想就是：考虑 $\mathfrak{M}$ 中可以从 A 引到 B 的全部逐段光滑曲綫（§ 12）。这些曲綫在适当規定两条曲綫的距离（§ 13）时构成一个尺度空間，即是这个变分問題的泛函空間 Ω. 这些曲綫的长度 J 是 Ω 上的一个連續函数。与 $\mathfrak{M}$ 的測地綫对应的，是 Ω 上使 J 取“逗留”值的那种点（§ 14）。这就使我們面临着这样一个問題：在一个尺度空間 Ω 中界定了一个連續函数 J，如何来定义这个函数的逗留点，使得其类型与个数将与 Ω 的拓扑結构发生关系。

这样一种关系的存在，也并非是完全不可捉摸的事。在某些特别簡单的情形里，这种关系早已是非常熟悉的了；当尺度空間 Ω 是亏格（环柄数）为 h 的一个閉曲面，J 是其上的一个二次連續可微函数的情形即是。所謂 J 的逗留点，这里是指使得 J 对于諸局部坐标的一阶偏导数在該处全为零之点。

我們先就这种曲面进行討論。为了使問題簡化起見，我們再假定逗留点均非蜕化（§ 8），这就是說，函数 J 对諸局部坐标的 Taylor 展式的二次項构成一个非蜕化的二次型。于是在（二維）**曲面**的情形下，逗留点可以按各个可能的慣性指数分为三类。若 x_1, x_2 是在逗留点处的局部坐标系，坐标原点就是这个逗留点，則把上述二次型化为法式后，这

三种情形就是：

慣性指数	二次型	逗留点类型	逗留点个数
$i=0$	$x_1^2+x_2^2$	极小点	M^0
$i=1$	$-x_1^2+x_2^2$	鞍　点	M^1
$i=2$	$-x_1^2-x_2^2$	极大点	M^2

这里引进的三个数 M^0, M^1, M^2 并非彼此无关*)。它們和曲面的 Euler 示性数 $N=2h-2$ 之間有下述 Kronecker 公式：

$$-M^0+M^1-M^2=N\,(=2h-2). \tag{1}$$

这时我們知道 $M^0\geqslant 1$ 和 $M^2\geqslant 1$，因为在閉曲面上至少存在一个极小点和一个极大点。于是 Kronecker 公式就导致 $M^1\geqslant 2h$：至少存在 $2h$ 个鞍点。因此我們得到不等式

$$M^0\geqslant 1, \quad M^1\geqslant 2h, \quad M^2\geqslant 1. \tag{2}$$

我們以旋轉环面为例，这些关系便一目了然(图 1)。設旋轉軸为 x 軸，环面上的二次連續可微的函数为 $J=z$，即是一个点关于 xy 平面的高度。于是相应于四張水平切面有四个逗留点：极小点、下鞍点、上鞍点、极大点。J 在这些点处取值 γ_1, γ_2, γ_3, γ_4. 这时所有逗留点均非蛻化。环面的环柄数是 $h=1$. 上面(2)的三个关系式的确成立，并且都是等式。

从这些不等式我們看出，在閉曲面这种簡单情形下，尺度空間 Ω 的拓扑結构給出了逗留点个数的一个下界。于是問題在于要把这些不等式搬到任意的尺度空間上去。我們仍然先就閉曲面进行討論，把这些不等式化为一个便于一般化的形狀。

为此目的，我們想到在曲面 Ω 的 k 維連通数 R^k 与 Euler 示性数之間那个形狀酷似 Kronecker 公式(1)的等式：

$$-R^0+R^1-R^2=N. \tag{3}$$

所謂 k 維連通数 R^k，这里是指 Ω 中同調无关 k 維循环的最大个数(§2)。这里不来确切地定义所謂同調无关的循环，只要我們多少能意

*) 上指数在这里以及今后均不表示乘幂，而是指維数。

識到，閉曲綫以及一組閉曲綫都是1維循环，閉曲面則是2維循环，而一个 k 維循环($k>0$)，只要它在 Ω 上可以收縮为一点，則总是同調于零或"非同調无关"的。此外，两个 k 維循环，只要它們在 Ω 上可以彼此形变，更一般的是，只要它們是 Ω 的一个 $k+1$ 維片段的边緣，則总是同調相关的。对于亏格为 h 的这个曲面而言，0 維連通数 $R^0=1$：存在唯一的一个同調无关的 0 維循环，由 Ω 的一个特定的点組成；任何其他的点均可形变为这个点。亏格为 h 的曲面具有 1 維連通数 $R^1=2h$：可以把这个曲面的一个标准剖分的 $2h$ 条紐形剖綫取作同調无关的 1 維循环。最后是 $R^2=1$：仅有的 2 維循环即是整个曲面自身。它是同調无关的，因为在这个曲面上根本不存在以它为边緣的 3 維片段。

因此从(2)得到 Morse 公式

$$M^k \geqslant R^k \quad (k=0,\ 1,\ 2). \tag{4}$$

我們从 Kronecker 公式推得这些不等式，这似乎不大自然。現在我們就不引用 Kronecker 公式来証明它們。为此，同时要表明的是，上述不等式左端的 M^k，也就是說逗留点的类型和个数，在比曲面更一般的情形里，如何加以拓扑的定义。右端的 R^k 是連通数，无論就任意的尺度空間抑或就曲面而言，都是已經有定义的拓扑不变量。

我們再就环面进行討論，考慮环面上的一个 1 維循环，例如一个經圓 $\mathfrak{Z}^1$(图 1)，它不同調于零，所以特別不能收縮为一点。在每个同調于它的循环上，特别是在由它形变而成的每个循环上，我們考慮函数 J 的极大値。在这些循环中我們选出一个，使得上述极大値尽可能地小，例如图 1 的經圓 $\mathfrak{Z}^1_1$. 这个循环不同調于一个位置更低的循环。因此我們把它叫做一个**极小循环**(§5)。

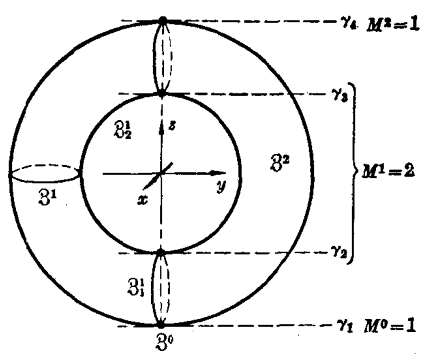

图 1 尺度空間 Ω (旋轉环面)

現在非常清楚，一个极小循环总是通过一个逗留点的。因为J的降值綫(§9)在每个非逗留点的邻域中构成曲面上的一束"平行纤維"，所以一个1維循环，只要它不含有逗留点，就可以沿着这些降值綫形变为一个位置更低的循环，因而不是极小循环。更仔細些就会发觉，一个1維极小循环正是**悬挂**在一个**鞍点**处的，因为从一个极大点它显然可以順流而下，而J的一个极小点又不能作为一个不同調于零的1維循环的极大点。

例如，作为經圓的极小循环3^1_1通过下鞍点，緯圓却悬挂在上鞍点。仅有的那个2維循环悬挂在J的极大点。每个0維循环(例如每个点)均可向下形变直到絕对极小点。

于是我們看出，环面上各个同調无关的循环均各对应着一个逗留点，即是它所悬挂的那个逗留点，并且一个k維循环正是悬挂在一个慣性指数为k的逗留点。由此推出，在我們这个例子里，不等式$M^k \geqslant R^k$終究为眞(§5)，因为M^k是慣性指数为k的逗留点的个数，而R^k是Ω上同調无关k維循环的个数。

因为J可以具有更多的极小和极大，所以按 Kronecker 公式，鞍点个数也就有所增加。对此我們举一个例子：如果使环面长上两个瘤子(图2)，則数M^k增加了，而連通数R^k却保持不变，因为有瘤环面与无瘤环面是同胚的。这时并沒有1維循环悬挂在新出現的属于J值γ的这个鞍点g.

这样，无須仰賴于 Kronecker 公式，不等式$M^k \geqslant R^k$的直观意义也就昭然若揭了。根据这种直观的推导，我們現在把数M^k用便于一般化的拓扑不变量表示出来。由于在任意的尺度空間中，虽然可以說一个函数J的連續性，但却不能說其可微性，所以我們前面关于逗留点的定义及其按慣性指数的分类都不适用了。显而易見，上面从分析定义得到的一个結果，即所謂极小循环的悬挂，应該把它提炼成逗留点的拓扑定义。

假若我們打算要求：在一个逗留点处应当悬挂着一个完整的循环，

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

就势必不能将全部逗留点都网罗无遺，例如有瘤环面的最低鞍点 g 就不合这个要求（图 2）。由于一个点成为逗留点这个性质，乃是一个小范圍的性质，所以我們考慮的应該只限于充分小的一段循环。就最低鞍点 g 而言，例如可以悬挂有一个 1 維循环的一小段。这一小段我們也称之为一个 1 維鏈。它除了其最高点 g 外完全在 g 的 J 值 γ 以下（图 2 中以粗綫所繪者）。这个事实我們也表达为：这个 1 維鏈在点集 $\{J<\gamma\}+g$ 中，而其边緣則在 $\{J<\gamma\}$ 中。在拓扑学里，这样一个 1 維鏈称为点集 $\{J<\gamma\}+g$ 的一个模 $\{J<\gamma\}$ **相对** 1 維循环（§3）。这种称謂是符合数学上的語言习慣的：相对循环只是除了在 γ 以下的那部分不計外是完全确定的。

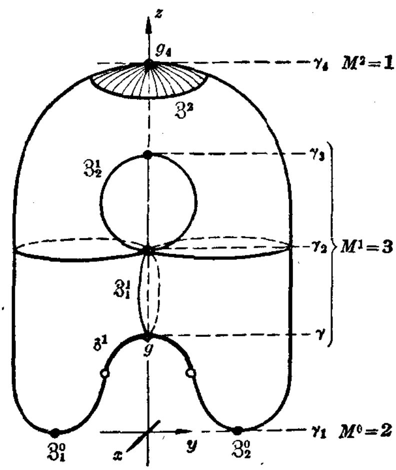

图 2　尺度空間 Ω（有瘤环面）

現在这个 1 維鏈在其端点保持不变时不能形变为一个完全在 γ 以下的鏈。对于这个 1 維鏈說来，$\{J<\gamma\}$ 上根本就不存在任何同調于它的 1 維鏈。这个事实我們表达为：这个相对 1 維循环是模 $\{J<\gamma\}$ 不同調于零的。

相当的叙述对极大点說来也是适用的。一个相对 1 維循环这时是通过极大点的一段曲綫。但是，也在端点保持不变时，它却可以形变为一个在这极大值以下的鏈，所以是 mod $\{J<\gamma_4\}$ 同調于零的。仿此，一个把极大点包含在內的曲面片（例如图 2 中有阴影的部分），現在就是 $\{J<\gamma_4\}+g_4$ 的一个相对 2 維循环，它是 mod $\{J<\gamma_4\}$ 不同調于零的。最后，在一个极小点只有一个相对 0 維循环，即是极小点本身，而它是不同調于零的。

这样一来，逗留点的各种类型就由其拓扑性质区别出来。对于一个

惯性指数为 i 的非蜕化逗留点說来，总有一个同調无关的相对 i 維循环。現在，基于 J 的可微性而建立起来的一个逗留点的惯性指数，就可以代之以有拓扑定义的属于各維数 0, 1, 2, …的**型数**：J 值为 γ 的一个逗留点 g，其 k 維型数 m^k，乃是 $\{J<\gamma\}+g$ 的模 $\{J<\gamma\}$ 同調无关相对 k 維循环的最大个数。

于是，例如一个鞍点 $(i=1)$ 的型数是 $m^1=1$，其余的型数 $=0$. 因为 $\{J<\gamma\}+g$ 上恰好有一个同調无关的相对 1 維循环，但却沒有任何 0 維循环或 2 維循环是模 $\{J<\gamma\}$ 不同調于零的。維数大于 2 的不同調于零的相对循环就更加不存在了；因此所有高維的型数均 $=0$. 要求适合不等式 $M^k \geqslant R^k$ 的数 M^k，現在就是按所有逗留点計得的一切 k 維型数之和：

$$M^k=\sum_{\nu} m_{\nu}^k.$$

我們首先注意，倘若我們是和一个流形上的一个二次連續可微函数 J 的非蜕化逗留点打交道的話，那么通过型数把逗留点加以拓扑分类，并未超出通过惯性指数来分类的范圍。因为这时型数 m^k 是按公式

$$m^k=\delta_i^k$$

由惯性指数 i 所确定的（§8）。但是，型数的拓扑定义在分析方法失灵的下列三种情况下却仍然有效：

I. 逗留点**蜕化**的情形。我們都知道，即使把一个解析函数在一个逗留点的邻域中展开时，如果对展开系数不作任何假定，这事情本身可能有多么复杂。“猴鞍面”(1)提供了蜕化逗留点的一个簡例。大家知道，猴鞍面在鞍峰部分有一个为放置猴尾用的缺口，所以有一个接連着三个斜坡的鞍点；这个鞍点的 1 維型数是 $m^1=2$. 这里应該提到借助于型数而得到的一个有意义的結果，即 Morse 公式，我們将在附录里来討論它。这个公式正好类似于 n 維閉流形 Ω 上的一个二次連續可微函数 J 的 Kronecker 公式。

II. 逗留点**非孤立**的情形。例如我們考虑 xyz 空間的单位球面以及其上的函数 $J=z^2$. 这个函数在 $z=0$ 时，即在 xy 平面上有一个絕对

极小。因此整个的赤道圓周均由逗留点組成。型数也可以适当地搬到这种逗留集上。

III. 拓扑地引进了型数，才开始有可能在**任意的**尺度空間中討論逗留点。借助于型数，才能够估計大范圍变分問題中測地綫的条数。至于如何实現这种估計，我們現在大致叙述一下。

我們回到一开始就提到的所謂变分問題的泛函空間，亦即是在配置了 Riemann 尺度的流形 $\mathfrak{M}$ 上，两个固定端点 A 和 B 之間的所有逐段光滑曲綫所成的尺度空間 Ω. $\mathfrak{M}$ 上的这种曲綫的长度，是 Ω 上的一个連續函数 J. 所謂 J 在 Ω 上的逗留点，現在是指相应于从 A 到 B 的測地綫的那种点。所以这里不是用型数来**定义**逗留点，但却可以用来**分类**(§ 14)。我們假設：$\mathfrak{M}$ 上从 A 到 B 长度**有界**的測地綫只有有限多条。

我們来考虑其中确定的一条測地綫 g，仍以 g 表示这条測地綫在 Ω 中的对应点。命 $J=\gamma$ 是 g 的长度。于是可以求出 Ω 中的点集 $\{J<\gamma\}+g$ 的模 $\{J<\gamma\}$ 相对 k 維循环，其中同調无关的最大个数，称为这条測地綫 g 的 k 維型数 m^k.

如果現在仍以 M^k 表示对所有从 A 到 B 的測地綫計得的 k 維型数 m^k 之和，則在泛函空間 Ω 中不等式

$$M^k \geqslant R^k$$

也成立。其次，有限性定理(第三章，§ 14, 54 頁)成立，据此，每一条測地綫只对 M^k 提供一个有限值。确切地說：一条孤立測地綫的型数均有限，且只有有限多个异于零。

在某些情形下，这就有可能获得測地連綫条数的一个估計，当这个泛函空間无限連通 (§ 19)，即所有維数的連通数之和是无限大的情形正是如此。这时必定有无限多条測地綫。

所以問題自然归結到要确定这个变分問題的泛函空間 Ω 的連通数。但这还沒有一个一般的方法。有时也可以借助于下述定理来确定，即連通数不依賴于 $\mathfrak{M}$ 上的 Riemann 尺度以及端点 A, B 的选擇

(§ 21)。因此，可以适当地选擇尺度和端点。然后不是**直接**去确定諸連通数，而是来証实对于这种特殊的选擇說来，某个条件(§ 6)得以滿足，以致不等式 $M^k \geqslant R^k$ 变成了等式，而 R^k 也就由这个特殊的变分問題中可以算出的各个型数确定出来了。

因此，要估計測地綫的条数，就需要驗証不等式 $M^k \geqslant R^k$(§ 5)，**有限性定理**(§ 14)以及計算連通数 R^k. 我們从不等式 $M^k \geqslant R^k$ 入手进行討論，这个不等式是在很一般的假設下証明的。

这时关于逗留点的类型未作任何假設，并且与此毫不相干，我們以后将把泛函空間 Ω 中与測地綫相应的点叫做逗留点，所以我們的討論和先前以环面为例来証明这些不等式时处理得稍微不同一些：我們首先引进的完全不是 Ω 中**逗留点**的型数，而是函数 J 的**临界值**的型数。至于临界值与逗留点之間的关系，要在 § 17 中才見分曉。

第一章　連通数与型数

§1　邻域空間与連續映相

我們来回顾一下对于研究大范圍变分学是相当重要的一些拓扑知識[2]。

1．一个邻域空間Ω是一些元素的集合，这些元素叫做点，使得对于每个点p均定义了它的一些邻域

$$\mathfrak{U}(p|\Omega).$$

邻域是Ω的子集，滿足下列两公理：

a）p的每个邻域均含有点p.

b）对于p的每个邻域而言，含有該邻域的任何集合也是p的一个邻域。

2．有了这种結构之后，就足以在Ω上来定义一个連續函数J：实函数$J(p)$在Ω的点p处連續，如果对任何正数ε，存在p的一个邻域，使得在这个邻域中J与$J(p)$相差不过ε. 如果这个函数在Ω的每一点处均連續，則称它在整个Ω上連續。

3．若Ω_1是另外一个邻域空間，并且对于Ω的每一点p，有Ω_1的一点p_1与之相应（但不必可逆），这样就建立了一个映Ω入Ω_1的映相。如果对于象点p_1在Ω_1中的任何已知邻域$\mathfrak{U}(p_1|\Omega_1)$而言，存在一个邻域$\mathfrak{U}(p|\Omega)$，它的象含于$\mathfrak{U}(p_1|\Omega_1)$中，則称这个映象在$\Omega$的点$p$处連續。如果这个映象在$\Omega$的每个点处均連續，則称它为一个映$\Omega$入$\Omega_1$的連續映相。

4．于是，一个連續函数可以看成是把Ω映入一个特殊的邻域空間，即映入数直綫的一个連續映相。这样的函数概念有必要加以推广，即把另外的邻域空間当作数直綫，并考虑多个独立变点的情形。假定

給了 r 个邻域空間 $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_r$，并命 $p_1, p_2, \cdots, p_r$ 是这些邻域空間上的一組变点。对于这种"变元組" $p_1, \cdots, p_r$，我們让一个邻域空間 Y 的一点 y 与之相应。这时我們把 y 称为 $p_1, \cdots, p_r$ 的一个函数:

$$y=f(p_1, \cdots, p_r).$$

如果对于任何邻域 $\mathfrak{U}(y|Y)$ 而言，存在这样一些邻域 $\mathfrak{U}(p_1|\Omega_1), \cdots, \mathfrak{U}(p_r|\Omega_r)$，使得对于这些邻域中每一組使 f 有定义的 $p_1, \cdots, p_r$ 說来，$f(p_1, \cdots, p_r)$ 均在 $\mathfrak{U}(y|Y)$ 中，則称这个函数对变元組 $p_1, \cdots, p_r$ 为連續。如果函数 $f(p_1, \cdots, p_r)$ 对每个使它有定义的变元組均連續，則我們也說，点 y 連續依賴于点 $p_1, \cdots, p_r$. 今后我們将和一个流形 $\mathfrak{M}^n$ 的某些曲綫打交道，这些曲綫作为一个泛函空間 Ω 的"点"相当于函数 y，而变元則是在 $\mathfrak{M}^n$ 上变动的这些曲綫的端点。

5. 所謂一个拓扑映相，乃是指一个双方单值且双方連續的映相。两个彼此可以拓扑映成的邻域空間，就称为是同胚的。

6. 一个邻域空間 Ω 的任何**子集** Z 本身就是一个邻域空間，因为 Z 的一点 p 关于 Z 的邻域 $\mathfrak{U}(p|Z)$，我們定义为一个邻域 $\mathfrak{U}(p|\Omega)$ 与 Z 的交（从而，Z 的任何一个子集，含有这种邻域时，也就是点 p 的一个邻域）。

7. 在第三章中，我們将和一些特殊的邻域空間，即和尺度空間打交道。一个"点"集合称为一个尺度空間，如果对于其中任何两点 a 和 b，定义了它們之間的非負距离 $\rho(a, b)$，滿足下面的公理:

a) 恒等公理: $\rho(a, b)=0$ 的充要条件是 $a=b$;

b) 对称公理: $\rho(a, b)=\rho(b, a)$;

c) 三角形公理: $\rho(a, b)+\rho(b, c)\geqslant\rho(a, c)$.

一个尺度空間由于下述約定而成为一个邻域空間: 一个点集是一点 p 的邻域，充分而必要的条件是，存在一个正数 ε，使得凡是与 p 的距离小于 ε 的点均属于这个点集。特别是使得 $\rho(p, q)<\varepsilon$ 的一切点 q 的集合，称为 p 的一个球形邻域，說得更确切些，称为 p 的（开）ε 邻域；我們把它記为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com