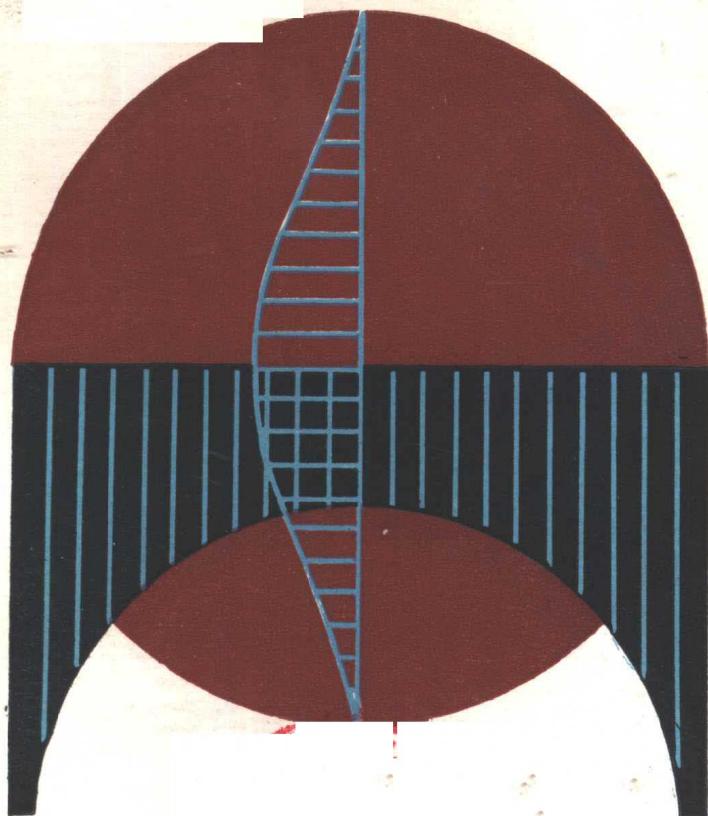


ZUIXIN JIANZHU JIEGOU LIXUE



最新建筑结构力学

〔日〕小幡守著

煤炭工业出版社

最新建筑结构力学

〔日〕小幡守著
冷锦文 曾纪勇译

煤炭工业出版社

内 容 提 要

本书是作者在普通结构力学基础之上进一步编著而成的。它阐述了异形框架的解法，包括用D值法求解、利用建立刚域概念分析框架，以及结构的矩阵解法与差分分析法；对抗震墙的计算、骨架的塑性分析和结构振动计算等也作了叙述；同时还介绍了弹性力学中某些平面问题的分析和有限元法。书中附有习题及习题解答，便于读者自学。

该书是日本最新结构力学(I)的续篇，为了便于读者阅读，书中涉及(I)中某些内容，译者加了详细附注，可使读者不必阅读(I)而直接阅读本书。

本书可供从事结构设计、教学与研究人员参考，也可供对结构力学有兴趣而从事建筑结构技术工作的广大读者阅读。

书中第1、2、3、4、8、10各章由曾纪勇同志翻译，第5、6、7、9各章由冷锦文同志翻译。

责任编辑：张文山

小幡守

最新建筑学シリーズ 4

最新建筑構造力学 I

1978年 第1版

森北出版株式会社 东京 1978年3月1日

*

最新建筑结构力学

(日) 小幡守 著

冷锦文 曾纪勇 译

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平北路16号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本850×1168¹/₃ 印张10³/₄ 插页1

字数281千字 印数1—20,120

1983年6月第1版 1983年6月第1次印刷

书号15035·2548 定价1.40元

序

本书收集在结构力学（I）中未能叙述的许多内容，是迄今为止著者迫于需要而学到的东西，其对象也是对结构力学开始发生兴趣的各位学者。本书所阐述的内容，虽然未必合适，但通过本书可以使人知道，即便是使用烦琐的数学方法，本质上也只不过是反复使之满足力的平衡条件与变形连续条件。各章分析法的推导，是已经叙述过的结构力学基本事项的应用例子，通过对这些问题的理解，可以加深对结构力学的认识，进一步可以提高对其他问题处理能力，如果能这样，著者将感到不胜荣幸。

此外，第6章以下各章内容都是超出本书篇幅的问题，本书只不过作个导引，需要深入研究这方面问题的各位学者，请分别参考有关专门著作。

著者 1978年

目 录

第 1 章 绪 论	1
§ 1-1 概述	1
§ 1-2 多元一次联立方程式的解法	1
(1) 直接法	1
(2) 渐近法	7
§ 1-3 矩阵法	11
(1) 有关矩阵法	11
(2) 矩阵的符号	11
(3) 矩阵运算	15
§ 1-4 差分法	17
(1) 关于差分法	17
(2) 三项差分方程式的解法	21
第 2 章 异形框架的分析	28
§ 2-1 概述	28
§ 2-2 弦转角间的关系	28
§ 2-3 剪力方程式	36
§ 2-4 异形框架的渐近解法	46
§ 2-5 用 D 值法计算异形框架	49
习题	52
第 3 章 考虑刚域、弯曲、剪切变形和 截面变化的框架解法	54
§ 3-1 概述	54
§ 3-2 关于刚域	55
§ 3-3 考虑刚域、弯曲和剪切变形的挠角法基本方程式	57
(1) 简支梁的杆端转角	57
(2) 挠角法基本方程式	62
§ 3-4 变截面杆件的挠角法基本方程式	64
(1) 简支梁的梁端转角	64

(2) 挠角法基本方程式	69
§ 3-5 框架计算实例.....	70
习题	77
第 4 章 用矩阵法分析骨架	78
§ 4-1 概述.....	78
§ 4-2 平面桁架的矩阵分析.....	80
(1) 杆件的刚度矩阵	80
(2) 中间荷载的等效节点力	83
(3) 座标变换.....	85
(4) 结构物的整体刚度矩阵	87
(5) 计算例题	88
§ 4-3 平面框架的矩阵分析.....	95
(1) 杆件的刚度矩阵	95
(2) 中间荷载的等效节点力	99
(3) 座标变换.....	101
(4) 结构物的整体刚度矩阵	102
(5) 例题	102
习题	107
第 5 章 抗震墙的剪力分配系数	109
§ 5-1 概述.....	109
§ 5-2 武藤博士的抗震墙分配系数略算法	109
(1) 无开口独立抗震墙	109
(2) 边界效应	116
(3) 有开口的抗震墙	127
§ 5-3 其他方法.....	128
习题	133
第 6 章 骨架的弹塑性分析	134
§ 6-1 概述.....	134
§ 6-2 简单桁架的塑性分析及塑性设计.....	135
(1) 塑性分析	135
(2) 塑性设计	138
§ 6-3 简单梁与框架的塑性分析.....	140

(1) 弯曲力矩与曲率的关系	140
(2) 简单梁及框架塑性分析	143
(3) 塑性分析法	149
§ 6-4 塑性分析的各种定理及其他	156
习题	158
第 7 章 骨架的振动分析	160
§ 7-1 概述	160
§ 7-2 单质点系的自由振动	162
(1) 非阻尼情况	162
(2) 阻尼情况	164
§ 7-3 多质点系的自由振动	166
(1) 运动方程式及 2 质点系的自由振动	166
(2) 多质点系的固有频率以及振型的数值计算法	175
§ 7-4 简单结构物的强迫振动	179
(1) 单层建筑物情况	179
(2) 两层建筑物情况	183
(3) 反应谱以及振型分析	185
习题	189
第 8 章 平面应力与平面应变问题的分析	190
§ 8-1 概述	190
§ 8-2 基本方程式	191
(1) 对直角坐标系的方程式	191
(2) 对极坐标系的方程式	198
§ 8-3 实例分析	205
(1) 长方形壁板的分析	205
(2) 悬臂壁板的分析	208
(3) 圆筒的分析	212
(4) 圆板的分析	214
§ 8-4 用差分法分析	217
习题	224
第 9 章 平板分析	226
§ 9-1 概述	226

§ 9-2 基本方程式	226
(1) 用直角坐标系求解	226
(2) 用极坐标求解	236
§ 9-3 实例分析	241
(1) 边界条件	241
(2) 承受均布荷载的周边简支矩形板的分析	241
(3) 2对边简支、另2对边任意支承的任意矩形板的分析	244
(4) 圆板的对称弯曲	246
§ 9-4 应用差分法的近似解法	248
(1) 概述	248
(2) 将式子差分化	248
(3) 实例分析	251
习题	255
第10章 有限元法	256
§ 10-1 概述	256
§ 10-2 平面应力问题的分析	259
(1) 单元的特性	259
(2) 三角形单元的刚度矩阵	263
§ 10-3 实例分析	270
§ 10-4 结果分析	274
习题	280
习题解答	282
附注一 渐近法	318
附注二 挠角法	325
附注三 层方程式及有节点移动的矩形框架分析	328
附注四 直角变位图	331
附注五 D值法	333

第1章 統論

§ 1-1 概述

在结构力学-I●中，含有数值计算法的解法，是用具体例子进行阐述的。由于数值计算法比较烦琐，因而本书将要研究的内容多数用电子计算机求解。为此，在本书中主要叙述如何用结构力学“力的平衡”和“变形连续”的基本条件来解决更复杂的问题，以及如何建立数值计算法的基本方程式。

建立解法、推导方程式，这是结构力学的范畴。但是，在实际中必须求得某种形式的数值解。如能利用电子计算机，那是比较理想的，也许利用这样的优越条件有困难，然而，懂得这些数值解法会给我们带来许多方便。因此，在绪论中把与本书关系较大的多元一次联立方程 (Simultaneous equations)、矩阵法 (matrix method) 以及用于微分方程近似计算的数值方法-差方法 (finite difference method)，综合论述如下。

§ 1-2 多元一次联立方程式的解法

(1) 直接法

只存在一组解的一次联立方程式，用直接法求解时，在理论上可以得到严密解。但是，在数值计算过程中，由于舍入的误差，那就不一定必然会得到严密的解。一般说，元素愈多误差愈大。

(a) 克莱姆法 (Cramer's rule) 把要求解的联立方程式列出如下：

● 最新建筑结构力学(I)，小幡守著，森北出版株式会社出版——译者。

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2i}x_i + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{ni}x_i + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right\} \quad (1-1)$$

本法是用计算下面的行列式来求上式的解。

$$x_i = \frac{\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right|} \quad (1-2)$$

这一方法随着元素的增多，加减乘除的次数也大为增多，并使解题的效率降低，而且容易超过电子计算机的容量，因此，元素多的方程式一般不使用。

在式 (1-2) 中，当分母为 0 时，方程式有一组以上的解，因此，只有当分子和分母不为 0 时，方程式才有一组解。

(b) 克劳特法 (Crout's method) 该方法是用逐次消去法来求解。当解式 (1-1) 时，从第 i 式 ($i=2 \sim n$) 减去第 1 式乘以 a_{ii}/a_{11} 之值，这就消去了 x_1 的系数，求得 $x_2 \sim x_n$ 的新系数 $(a_{ij})_1$, ($j=2 \sim n$) 及 $(b_i)_1$ 即

$$(a_{ij})_1 = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad (b_i)_1 = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1$$

用上式计算，从式 (1-1) 中消掉了第 2 式以下的 x_1 项，得到下面的方程式：

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + (a_{22})_1x_2 + \dots + (a_{2i})_1x_i + \dots + (a_{2n})_1x_n = (b_2)_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + (a_{i2})_1x_2 + \dots + (a_{ii})_1x_i + \dots + (a_{in})_1x_n = (b_i)_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + (a_{n2})_1x_2 + \dots + (a_{ni})_1x_i + \dots + (a_{nn})_1x_n = (b_n)_1 \end{array} \right\}$$

(1-3)

然后，把式(1-3)中，第3~n式分别减去第2式乘以
 $(a_{i2})_1/(a_{22})_1$ 之值，($i=3\sim n$)，又消去 x_2 项。用同样方法继续
 消元，则得到下面的方程式：

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1i}x_i + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 + (a_{22})_1x_2 + \dots + (a_{2i})_1x_i + \dots + (a_{2n})_1x_n = (b_2)_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots + (a_{ii})_{i-1}x_i + \dots + (a_{in})_{i-1}x_n = (b_i)_{i-1} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + (a_{nn})_{n-1}x_n = (b_n)_{n-1} \end{array} \right\}$$

(1-4)

像上面这样进行消元的方法，叫作前进消元法(forward substitution)。一个 $n=4$ 的方程式的消元计算，汇总于表1-1。

表中的系数 $(a_{ij})_k$ 及右边的 $(b_i)_k$ 是按下式计算的。

$$\left. \begin{array}{l} (a_{ij})_k = (a_{ij})_{k-1} - \frac{(a_{ik})_{k-1}(a_{kj})_{k-1}}{(a_{kk})_{k-1}} \\ (b_i)_k = (b_i)_{k-1} - \frac{(a_{ik})_{k-1}(b_k)_{k-1}}{(a_{kk})_{k-1}} \end{array} \right\}$$

由式(1-4)的第n式可求出 x_n ，把求得的 x_n 代入n-1式求出
 x_{n-1} 。按下面的顺序可依次求出 x_i 。

表 1-1

x_1	x_2	x_3	x_4	荷重项
$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	b_1
$a_{2,1}$	$\frac{a_{1,2}}{(c_2)_0 - a_{1,1}}$	$\frac{a_{1,3}}{-(c_2)_0 \cdot a_{1,2}}$	$\frac{a_{2,4}}{-(c_2)_0 \cdot a_{1,4}}$	b_2
$\left\{ (c_2)_0 = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \right\}$	$(a_{2,2})_1$	$(a_{2,3})_1$	$(a_{2,4})_1$	$(b_1)_1$
$a_{3,1}$	$\frac{a_{3,2}}{-(c_3)_0 \cdot a_{1,2}}$	$\frac{a_{3,3}}{-(c_3)_0 \cdot a_{1,3}}$	$\frac{a_{3,4}}{-(c_3)_0 \cdot a_{1,4}}$	b_3
$\left\{ (c_3)_0 = \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \right\}$	$(a_{3,2})_1$	$(a_{3,3})_1$	$(a_{3,4})_1$	$-(c_3)_0 \cdot b_1$
	$\left\{ (c_3)_1 = \frac{(a_{2,2})_1}{(a_{2,2})_1} \right\}$	$(a_{3,3})_2$	$(a_{3,4})_2$	$-(c_3)_1 \cdot (b_2)_1$
$a_{4,1}$	$\frac{a_{4,2}}{-(c_4)_0 \cdot a_{1,2}}$	$\frac{a_{4,3}}{-(c_4)_0 \cdot a_{1,3}}$	$\frac{a_{4,4}}{-(c_4)_0 \cdot a_{1,4}}$	b_4
$\left\{ (c_4)_0 = \frac{a_{4,1}}{a_{1,1}} \right\}$	$(a_{4,2})_1$	$(a_{4,3})_1$	$(a_{4,4})_1$	$(c_4)_0 \cdot b_1$
	$\left\{ (c_4)_1 = \frac{(a_{4,2})_1}{(a_{4,2})_1} \right\}$	$(a_{4,3})_2$	$(a_{4,4})_2$	$-(c_4)_1 \cdot (b_2)_1$
		$\left\{ (c_4)_2 = \frac{(a_{4,3})_2}{(a_{4,3})_2} \right\}$	$(a_{4,4})_3$	$-(c_4)_2 \cdot (b_3)_2$
				$(b_4)_3$

$$\left. \begin{aligned}
 x_n &= (b_n)_{n-1} / (a_{nn})_{n-1} \\
 &\vdots \\
 x_1 &= \left\{ (b_1)_{1-1} - \sum_{i=i+1}^n (a_{ij})_{1-1} x_j \right\} / (a_{11})_{1-1} \\
 &\vdots \\
 x_1 &= \left\{ b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j \right\} / a_{11}
 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

一般把式(1-6)叫做回代阶段。

例如,图1-1所示框架,它的挠角法方程式的求解过程,列于表1-2。

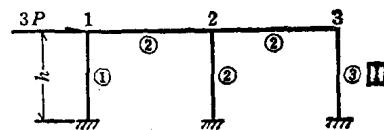


图 1-1

表 1-2

φ_1	φ_2	φ_3	ψ_1	$= (Ph)$
6	2	0	1	0
2 (0.333)	12 -0.667	2 0	2 -0.333	0
	11.333	2	1.667	0
0 (0)	2 0	10 0	3 0	0
	2 (0.176)	-0.353 9.647	-0.294 2.706	0
1 (0.167)	2 -0.333	3 0	4 -0.167	-1 0
	1.667 (0.147)	-0.294 2.706 (0.281)	-0.245 -0.759 2.829	0 0 -1

用回代计算求得 $\psi_1 = -0.353$, $\varphi_3 = 0.099$, $\varphi_2 = 0.034$, $\varphi_1 = 0.047$ 。

用克劳特法计算时，重要的是式（1-5）中右边第2项分母 $(a_{kk})_{k-1}$ 之值，当此值为0或近于0时，就难于求解。因此，在这种情况下，有必要在此项的右边或下边寻找系数最大的项与该项调换，再进行计算。

(c) 焦丹法 (Jordan's method) 它是用只有前进的消元计算法来求解。此时，式(1-1)的消去计算按下面进行。

首先，对公式(1-1)的第一式

$$(a_{1j})_1 = a_{1j}/a_{11}, \quad (b_1)_1 = b_1/a_{11} \quad (j=1 \sim n)$$

又，对第二式和以下各式

$$(a_{ij})_1 = a_{ij} - \frac{a_{11}}{a_{11}} a_{1j}, \quad (b_i)_1 = b_i - \frac{a_{11}}{a_{11}} b_1$$

$$(i=2 \sim n, \quad j=1 \sim n)$$

按上面运算结果，可得到如下的方程式：

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + (a_{12})_1 x_2 + \dots + (a_{1i})_1 x_i + \dots + (a_{1n})_1 x_n = (b_1)_1 \\ 0 + (a_{22})_1 x_2 + \dots + (a_{2i})_1 x_i + \dots + (a_{2n})_1 x_n = (b_2)_1 \\ 0 + (a_{32})_1 x_2 + \dots + (a_{3i})_1 x_i + \dots + (a_{3n})_1 x_n = (b_3)_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + (a_{i2})_1 x_2 + \dots + (a_{ii})_1 x_i + \dots + (a_{in})_1 x_n = (b_i)_1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + (a_{n2})_1 x_2 + \dots + (a_{ni})_1 x_i + \dots + (a_{nn})_1 x_n = (b_n)_1 \end{array} \right\} \quad (1-7)$$

其次，进行下面的计算：把式(1-7)的第一式中 $(a_{12})_1$ 和第3~n式的 $(a_{12})_1$ 消去，再使 $(a_{22})_1$ 为1。

$$(a_{1j})_2 = (a_{1j})_1 - \frac{(a_{12})_1}{(a_{22})_1} (a_{2j})_1, \quad (b_1)_2 = (b_1)_1 - \frac{(a_{12})_1}{(a_{22})_1} (b_2)_1$$

$$(a_{2j})_2 = (a_{2j})_1 / (a_{22})_1, \quad (b_2)_2 = (b_2)_1 / (a_{22})_1$$

$$(a_{ij})_2 = (a_{ij})_1 - \frac{(a_{12})_1}{(a_{22})_1} (a_{2j})_1, \quad (b_i)_2 = (b_i)_1 - \frac{(a_{12})_1}{(a_{22})_1} (b_2)_1$$

$$(i=3 \sim n, \quad j=2 \sim n)$$

经过上面的计算，方程式变成如下形式：

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 0 + (a_{13})_2 x_3 + \dots + (a_{1i})_2 x_i + \dots + (a_{1n})_2 x_n = (b_1)_2 \\ 0 + x_2 + (a_{23})_2 x_3 + \dots + (a_{2i})_2 x_i + \dots + (a_{2n})_2 x_n = (b_2)_2 \\ 0 + 0 + (a_{33})_2 x_3 + \dots + (a_{3i})_2 x_i + \dots + (a_{3n})_2 x_n = (b_3)_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + (a_{i3})_2 x_3 + \dots + (a_{ii})_2 x_i + \dots + (a_{in})_2 x_n = (b_i)_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + (a_{n3})_2 x_3 + \dots + (a_{ni})_2 x_i + \dots + (a_{nn})_2 x_n = (b_n)_2 \end{array} \right\} \quad (1-8)$$

接着，把上式中第1式的 $(a_{13})_2$ 、第2式的 $(a_{23})_2$ 、第4~ n 式的 $(a_{i3})_2$ 消去，再使 $(a_{33})_2 = 1$ 。以下用同样的方法进行计算，最后得到下面的方程式：

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 0 + \dots + 0 + \dots + 0 = (b_1)_n \\ 0 + x_2 + \dots + 0 + \dots + 0 = (b_2)_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots + x_i + \dots + 0 = (b_i)_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots + 0 + \dots + x_n = (b_n)_n \end{array} \right\} \quad (1-9)$$

因而，不要进行回代计算，即可求得 $x_i = (b_i)_n$ 。

把以上的计算，机械地进行下去，当 $n = 4$ 时，计算如表1-3所示。

使用本法时，虽增加了计算程序，但是前进及回代计算的舍入误差积累，有某种程度的减小，这是它的优点。表1-4所示为图1-1的框架的计算结果。

此外，还有平方根法等不再介绍。

(2) 演近法 (iteration method or successive approximation method)

关于演近法●在结构力学-I中，做了概要的叙述，详细的由

● 见附注——译者。

表 1-3

a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}	1	
a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}	0	
a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{43}	0	
a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}	0	
$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	$-b_4$	0	
$(a_{22})_1$	$(a_{32})_1$	$(a_{42})_1$	$-(a_{12})_1$	1	
$(a_{23})_1$	$(a_{33})_1$	$(a_{43})_1$	$-(a_{13})_1$	0	
$(a_{24})_1$	$(a_{34})_1$	$(a_{44})_1$	$-(a_{14})_1$	0	
$-(b_2)_1$	$-(b_3)_1$	$-(b_4)_1$	$(b_1)_1$	0	
$(a_{33})_2$	$(a_{43})_2$	$(a_{13})_2$	$-(a_{23})_2$	1	
$(a_{34})_2$	$(a_{44})_2$	$(a_{14})_2$	$-(a_{24})_2$	0	
$-(b_3)_2$	$-(b_4)_2$	$(b_1)_2$	$(b_2)_2$	0	
$(a_{44})_3$	$(a_{14})_3$	$(a_{24})_3$	$(a_{34})_3$	1	
$-(b_4)_3$	$(b_1)_3$	$(b_2)_3$	$(b_3)_3$	0	
	$(b_1)_4$	$(b_2)_4$	$(b_3)_4$	$(b_4)_4$	
	x_1	x_2	x_3	x_4	

表 1-4

6	2	0	1	1	
2	12	2	2	0	
0	2	10	3	0	
1	2	3	4	0	
0	0	0	1	0	
$11.333^{1)}$	2	1.667	-0.333	1	
$2^{2)}$	10	3	0	0	
$1.667^{3)}$	3	3.833	-0.167	0	
$0^{4)}$	0	1	0	0	
$1) 12 - \frac{2}{6} \times 2 =$	9.647	2.706	0.059	-0.176	1
11.333	2.706	3.588	-0.118	-0.147	0
	0	1	0	0	0
$2) 2 - \frac{1}{6} \times 0 = 2$	2.829	-0.135	-0.098	-0.281	1
	1	0	0	0	0
$3) 2 - \frac{1}{6} \times 1 = 1.667$	0.047	0.034	0.099	-0.353	
$4) 0 - \frac{1}{6} \times 0 = 0$	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	

专门书籍来介绍。作为研究它的收敛性公式，见下式：

$$\beta = \sqrt{\left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right)^2 \right\}} - n < 1 \quad (1-10)$$

式中 a_{ij} —— 方程式的 i 行 j 列的系数；
 n —— 元数。

上式 β 比 1 小的愈多愈容易收敛。

而且可导出下面的公式：

$$Q = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) x_i > 0 \quad (1-11)$$

一次联立方程式的系数群是对称的，欲求的 x_i 值如不是全部为 0，则无论为何值，当用上式计算的值为正时，重复计算即可求得解。

例如，用克莱姆法解表 1-5 的方程式，得 $x_1 = -1$ 、 $x_2 = 0.8$ 、 $x_3 = 0.8$ ，但是用渐近法计算，计算值的变化如表 1-6，是不收敛的。用式 (1-10) 来验算这一方程式，得 $\beta = 7.62$ 。再用式 (1-11) 计算 Q ，当 $x_1 = 1$ 、 $x_2 = 2$ 、 $x_3 = 3$ 时， $Q = 88$ ，当 $x_1 = 1$ 、 $x_2 = 2$ 、 $x_3 = -3$ 时， $Q = -44$ ，因而可见它是不满足收敛条件的。

表 1-5

x_1	x_2	x_3	= (荷重项)
1	2	3	= 3
2	1	4	= 2
3	4	1	= 1

像上面这种情况，按以下方式，可转换为能够收敛的方程式。

$$a'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}, \quad b'_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} b_k \quad (1-12)$$

若把上式的 a'_{ij} 作为系数，令其右边为 b'_i ，则方程式的系数群满足式 (1-11)，计算值收敛，可以得到解。把它用于表 1-5