

材料力学精讲

奚绍中 编

西南交通大学出版社

材料力学精讲

奚绍中 编

西南交通大学出版社

(川) 新登字 018 号

内 容 简 介

本书系对材料力学课程(多学时)基本部分的总结与补充,重点放在使读者进一步深刻理解并熟练掌握基本教学内容上,不以单纯讲述专题和新内容为目的。

本书的章次安排与材料力学教科书相一致,以便于学生在学习材料力学课程时参考。本书亦可作为选修课教材,或供教师在教学中参考。

材料力学精讲 奚绍中 编

西南交通大学出版社出版发行

(成都·九里堤)

四川省新华书店经销

仁寿县印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 6.125

字数: 120 千字 印数: 1—1000 册

1993 年 9 月第 1 版 1993 年 9 月第 1 次印刷

ISBN7-81022-486-7/O·012

定价: 4.80 元

目 录

第一章 轴向拉伸和压缩	(1)
§ 1.1 重要概念的回顾	(1)
§ 1.2 基本公式 $\sigma = N/A$ 的适用条件	(10)
§ 1.3 关于圣维南原理	(14)
§ 1.4 关于拉压超静定问题	(16)
§ 1.5 对称性和反对称性的利用	(20)
§ 1.6 绕线薄壁圆筒	(24)
§ 1.7 拉压超静定杆系中的 弹塑性问题及残余应力	(28)
习 题	(34)
第二章 扭转与剪切	(36)
§ 2.1 扭转问题中若干基本概念的回顾	(36)
§ 2.2 关于扭转问题中的变形协调条件	(40)
§ 2.3 受扭圆杆的弹塑性问题及残余应力	(47)
§ 2.4 偏心受力螺栓连接的分析	(50)
§ 2.5 关于密圈圆柱螺旋弹簧受拉压时 簧杆横截面上的应力	(54)
§ 2.6 关于密圈圆柱螺旋弹簧受拉压时的位移	(63)
习 题	(67)
第三章 弯 曲	(68)
§ 3.1 剪力图弯矩图和挠曲线	(68)
§ 3.2 几个涉及概念和技巧的问题	(78)
§ 3.3 关于弯曲剪应力的分析方法	(86)
§ 3.4 多腹板梁的弯曲剪应力	(96)

§ 3.5 两种材料的组合梁	(104)
§ 3.6 梁的弹塑性问题及残余应力	(113)
习 题	(118)
第四章 应力状态和强度理论	(121)
§ 4.1 关于应力状态和应力圆	(121)
§ 4.2 三向应力状态下的应力圆	(128)
§ 4.3 平面应力状态下广义胡克定律的运用	(136)
§ 4.4 双剪强度理论	(141)
习 题	(147)
第五章 组合变形	(150)
§ 5.1 变扭组合	(150)
§ 5.2 平行杆系的扭转	(159)
§ 5.3 关于斜弯曲	(164)
§ 5.4 小刚度杆的偏心压缩	(169)
习 题	(173)
第六章 压杆的稳定性	(175)
§ 6.1 推导欧拉临界力公式时的要点	(175)
§ 6.2 处理稳定性问题的某些思路	(182)
§ 6.3 杆和杆系平衡位置的稳定性	(186)
习 题	(189)
习题答案	(190)

第一章 轴向拉伸和压缩

§ 1.1 重要概念的回顾

拉伸和压缩是材料力学中最基本的内容。由于比较简单，人们往往掉以轻心。实际上，固体力学中的许多基本概念，如应力、应变、变形、位移等等都是从这里引出的。现结合下面几个例子回顾一些基本概念。

例 1.1 图 1.1, a 、 b 所示两根等截面直杆系在线弹性范围内工作，它们的长度 L 、横截面积 A 、材料的拉压弹性模量 E ，以及荷载 P 和 q 的值均相同。试绘出各杆的轴力 N_y 、横截面上正应力 σ_y 、纵向线应变 ϵ_y 、横截面的纵向位移 Δ_y 随横截面位置的变化图，即 N_y-y 图、 σ_y-y 图、 ϵ_y-y 图以及 Δ_y-y 图。

解：图 1.1, a 、 b 所示两根杆虽然外部约束情况不同，荷载情况也不相同，但求得约束反力后便可知，两根杆的受力情况却完全相同。它们的任意横截面上的轴力均为

$$N_y = P + q(L - y)$$

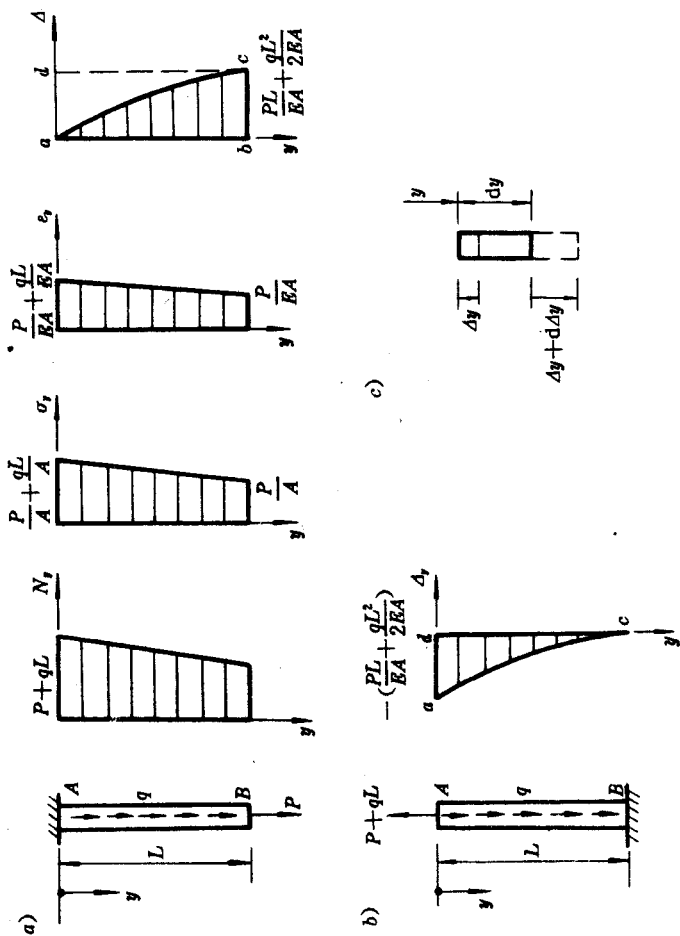
又因两杆的横截面积 A 相等而横截面上的正应力均有

$$\sigma_y = \frac{P}{A} + \frac{q(L - y)}{A}$$

两杆在对应横截面处的纵向线应变 ϵ_y ，由于两杆材料的弹性模量 E 相等，因而也是相等的，均为

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{P}{EA} + \frac{q(L - y)}{EA} \quad (a)$$

由此并可判明，两杆中相应杆段的绝对变形（伸长）以及相应杆段之两端面



间的相对位移亦相同。图 1.1, a 中示出了对于两杆同样适用的 N_y - y 图、 σ_y - y 图和 ϵ_y - y 图。

需要注意的是, 杆的横截面的绝对位移 (通常就称为位移) 不仅与杆的变形情况有关, 而且还与外部的约束条件有关。图 1.1, a 所示杆系在 $y=0$ 的 A 截面处固定, 故任意横截面的纵向位移* 为

$$\Delta_y = \int_0^y \epsilon_y dy = \int_0^y \left[\frac{P}{EA} + \frac{q(L-y)}{EA} \right] dy = \frac{P}{EA}y + \frac{qL}{EA}y - \frac{q}{2EA}y^2 \quad (b)$$

相应的 Δ_y - y 图如图 1.1, a 中所示。该图线的斜率为

$$\frac{d\Delta_y}{dy} = \frac{P}{EA} + \frac{qL}{EA} - \frac{qy}{EA} \quad (c)$$

在 $y=0$ 处 $\frac{d\Delta_y}{dy} = \frac{P+qL}{EA}$; 在 $y=L$ 处 $\frac{d\Delta_y}{dy} = \frac{P}{EA} = \epsilon_y|_{y=L} \neq 0$ 。应该指出, 式 (b) 实际上是依据图 1.1, c 所示微段杆的变形和位移关系 $d\Delta_y = \epsilon_y dy$ 列出的, 因而也就有 $\frac{d\Delta_y}{dy} = \epsilon_y$ 。

图 1.1, b 所示杆系在 $y=L$ 的 B 截面处固定, 故纵向位移积分表达式中的积分下限此时应为 L , 于是有

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \int_L^y \epsilon_y dy = \left(\frac{P}{EA}y + \frac{qL}{EA}y - \frac{q}{2EA}y^2 \right) \Big|_L^y \\ &= \left(\frac{P}{EA}y + \frac{qL}{EA}y - \frac{q}{2EA}y^2 \right) - \left(\frac{PL}{EA} + \frac{qL^2}{2EA} \right) \end{aligned} \quad (d)$$

相应的 Δ_y - y 图如图 1.1, b 中所示。注意到式 (d) 中第三个等号右边的第一个括号所表示的就是式 (b) 所示图 1.1, a 中上端固定之杆其任意横截面的纵向位移, 而第二个括号表示的则是该杆 B 端的纵向位移, 故知图 1.1, b 所示下端固定杆的 Δ_y - y 图之横坐标就等于图 1.1, a 中所示 Δ_y - y 图中曲边 ac 的横坐标减去矩形 $abcd$ 的宽度。事实上, 这一结果只要注意到两根杆的变形相同便可由物理概念得知: 下端固定杆任何截面的位移就等于上端固定杆相应截面的位移叠加上该杆下端上移 (y 的负向) 至初始位置的刚体位移。

通过这个例子读者要进一步认识到, 变形和位移是两个不同的概念, 它

* 也就是任意横截面相对于固定截面的位移, 故积分的下限应是固定截面的坐标。

们之间虽有联系但又有区别，不能混淆。

例 1.2 图 1.2, a 所示杆系中, ①、②、③三杆的抗拉刚度 EA 相同, 试求荷载 P 作用点的位移。

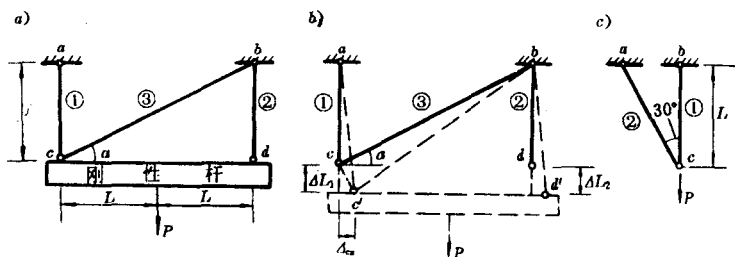


图 1.2

解: 易于求得各杆的轴力为 $N_1 = N_2 = +\frac{P}{2}$, $N_3 = 0$ 。从而可知各杆的变形为 $\Delta L_1 = \Delta L_2 = +\frac{PL}{2EA}$, $\Delta L_3 = 0$ 。在①杆伸长时, 由于③杆的长度未变, 故③杆连同节点 c 将绕铰 b 作刚体转动, c 点移至 c' (图 1.2, b), 从而使荷载 P 的作用点在产生竖向位移

$$\Delta_y = \frac{\Delta L_1 + \Delta L_2}{2} = \frac{PL}{2EA} (\downarrow)$$

的同时产生水平位移

$$\Delta_x = \Delta_x = \Delta L_1 \tan \alpha = \frac{PL}{4EA} (\rightarrow)$$

这说明, 杆系中不受力的杆件 (“零杆”) 虽不变形, 但对杆系的位移会产生明显的影响。图 1.2, c 所示杆系是又一个例子, 该杆系由于零杆②的存在, 使节点 c 在产生竖向位移 $\Delta_y = \Delta L_1 = \frac{PL}{EA} (\downarrow)$ 的同时, 还产生水平位移 $\Delta_x = \frac{\Delta L_1}{\tan 30^\circ} = \frac{PL}{\sqrt{3} EA}$ 。

例 1.3 图 1.3, a 所示为受轴向拉伸的空心正方形截面薄壁杆, 试求该杆横截面上 A 、 B 两点的相对位移。材料的弹性常数 E 、 ν 为已知。

解: 因是薄壁截面杆, 其横截面积可认为等于 $4at$, 于是得横截面上的正应力 $\sigma = \frac{P}{4at}$, 杆的纵向线应变 $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{4Eat}$, 横向线应变 $\epsilon' = -\nu\epsilon = -$

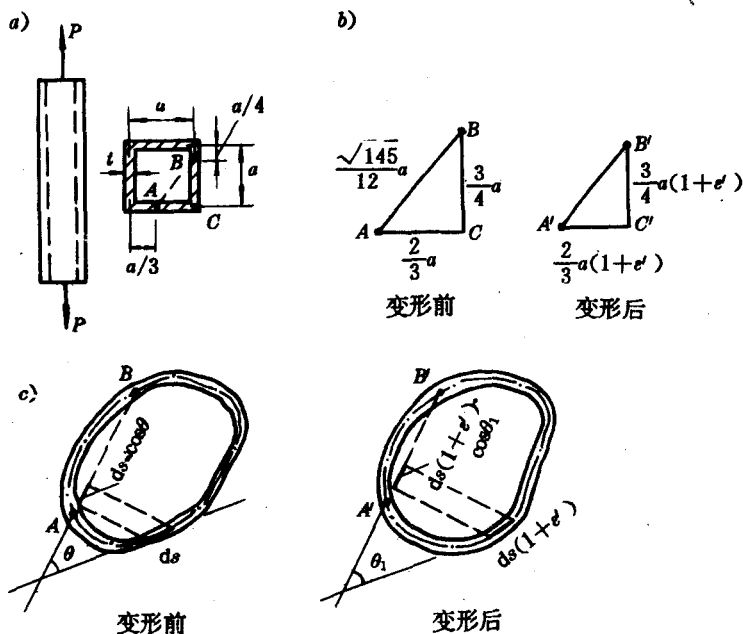


图 1.3

$\frac{P\nu}{4Eat}$ 。这个横向线应变 ϵ' 对于求连线在杆壁上的两个点的相对位移来说，读者是不会有疑问的；图 1.3, a 中 A 、 C 两点的相对位移参照图 1.3, b 可知为

$$\Delta_{AC} = \overline{A'C'} - \overline{AC} = \frac{2}{3}a(1 + \epsilon') - \frac{2}{3}a = \left(\frac{2}{3}a\right)\epsilon'$$

同理，

$$\Delta_{BC} = \overline{B'C'} - \overline{BC} = \left(\frac{3}{4}a\right)\epsilon'$$

问题是现在要求相对位移的两个点 A 和 B 的连线不在杆壁上，那么相对位移 Δ_{AB} 是否等于 $(\overline{AB})\epsilon'$ 。结论是肯定的，因为在均匀拉伸的情况下，这个正方形空心截面相邻边之间的夹角（直角）显然不会改变，杆件变形后原 A 、

B 两点间的距离 $\overline{A'B'}$ 仍可由勾股弦定理求出:

$$\begin{aligned}\overline{A'B'} &= \sqrt{(\overline{A'C'})^2 + (\overline{B'C'})^2} = \sqrt{\left[\frac{2}{3}a(1+\epsilon')\right]^2 + \left[\frac{3}{4}a(1+\epsilon')\right]^2} \\ &= (1+\epsilon')\sqrt{\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2} = (1+\epsilon')\overline{AB}\end{aligned}$$

从而有

$$\Delta_{AB} = \overline{A'B'} - \overline{AB} = (\overline{AB})\epsilon' = -\frac{\sqrt{145}}{48} \frac{P\nu}{El}$$

从此例可见, 轴向拉伸(压缩)杆件即使横截面是中空的, 其同一横截面上任何两点的相对位移均可将横向线应变 ϵ' 乘以两点间原来的距离求得。下面就空心横截面为任意形状的情况(图 1.3, c)进一步加以论证。为求该杆横截面上 A 、 B 两点的相对位移, 在 A 、 B 两点间的曲线周边上取一微段 ds , 它在连线 $\overline{AB}$ 上的投影为 $ds \cdot \cos\theta$ 。杆件受力而变形后, A 、 B 两点分别移至 A' 和 B' , 微段 ds 的长度变为 $ds(1+\epsilon')$, 它在连线 $\overline{A'B'}$ 上的投影为 $ds(1+\epsilon')\cos\theta_1$, 这里夹角 θ_1 在小变形情况下可以认为近似等于原来的夹角 θ 。由此可知, 微段 ds 的两个端点在 A 、 B 两点连线方向的相对位移为

$$ds(1+\epsilon')\cos\theta - ds\cos\theta = (ds\cos\theta)\epsilon'$$

而 A 、 B 两点的相对位移则是沿曲线周边 $\widehat{AB}$ 所有微段 ds 两端的上述相对位移之和, 即

$$\Delta_{AB} = \int_{\widehat{AB}} (ds\cos\theta)\epsilon' = \epsilon' \cdot \overline{AB} = -\nu\epsilon\overline{AB}$$

在此例中涉及到横向变形系数(泊松系数) ν , 它是材料在单向应力状态下横向线应变 ϵ' 与纵向线应变 ϵ 之比的绝对值, 即 $\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|$ 。在不是单向应力状态的情况下, 不能随便套用。图 1.4, a 所示的单元体处于平面应力状态, 如果已知此时 $\epsilon_x = +1.7 \times 10^{-4}$, $\epsilon_y = +0.4 \times 10^{-4}$, 而 $\nu = 0.4$, 则垂直于纸面方向的线应变 ϵ_z 并不等于 $-\nu(\epsilon_x + \epsilon_y) = -0.63 \times 10^{-4}$, 因为这里的 ϵ_x 、 ϵ_y 并非单向应力状态下的。为了得出正确的 ϵ_z , 应如图 1.4, b 所示将平面应力状态分解为两个单向应力状态, 然后利用横向变形系数 ν 分别求出 ϵ'_x 和 ϵ'_y , 而平面应力状态下的线应变 ϵ_z 为

$$\epsilon_z = \epsilon'_z + \epsilon''_z = -\nu \left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \right) \quad (a)$$

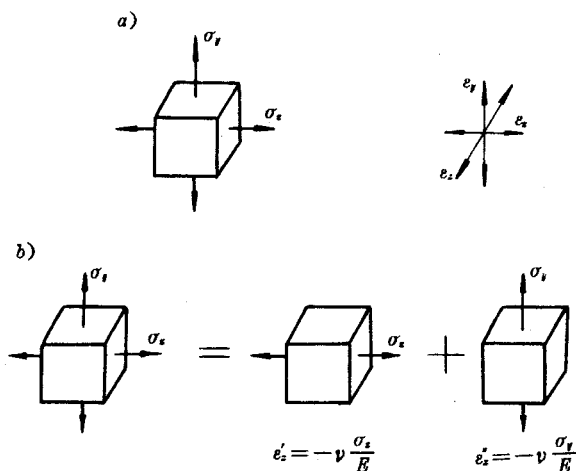


图 1.4

显然，这里的 $\frac{\sigma_x}{E}$ 并非前面所给出的二向应力状态下的 ϵ_x ($=+1.7 \times 10^{-4}$)， $\frac{\sigma_y}{E}$ 亦非二向应力状态下的 ϵ_y ($=+0.4 \times 10^{-4}$)。为求出 ϵ_z ，需将式 (a) 中的 $(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E})$ 与给出的平面应力状态下的 ϵ_x 和 ϵ_y 相联系。注意到在平面应力状态下， $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E}$ ， $\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E}$ ，而它们之和为

$$\epsilon_x + \epsilon_y = \frac{1-\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

亦即

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{E} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{1-\nu}$$

以此代入式 (a) 便得

$$\epsilon_z = \frac{-\nu}{1-\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y) = -0.90 \times 10^{-4}$$

例 1.4 对于图 1.5, *a* 所示受轴向拉伸的薄壁圆管: (1) 求壁厚 δ 的变化 $\Delta\delta$ 及平均直径 D 的变化 ΔD ; (2) 判明图 1.5, *b* 和图 1.5, *c* 所示壁厚由 δ 变为 δ' 的图像哪一个是正确的。

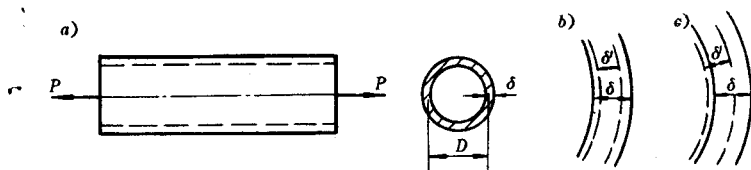


图 1.5

解: (1) 此杆的横向线应变为 $\epsilon' = -\nu\epsilon = -\nu \left(\frac{P}{\pi D \delta E} \right)$, 于是根据例 1.3 中所得关于相对位移的结论, 此杆横截面上沿同一半径内外壁处两点的相对位移, 亦即壁厚的变化为

$$\Delta\delta = \delta \cdot \epsilon' = \delta \left(-\nu \frac{P}{\pi D \delta E} \right) = -\frac{\nu P}{\pi D E}$$

而平均直径 D 之两端点的相对位移, 亦即平均直径的变化为

$$\Delta D = D \cdot \epsilon' = D \left(-\nu \frac{P}{\pi D \delta E} \right) = -\frac{\nu P}{\pi \delta E}$$

(2) 此薄壁圆管内直径和外直径的变化分别为

$$\Delta D_{\text{内}} = D_{\text{内}} \cdot \epsilon' = D_{\text{内}} \left(-\nu \frac{P}{\pi D \delta E} \right), \Delta D_{\text{外}} = D_{\text{外}} \cdot \epsilon' = D_{\text{外}} \left(-\nu \frac{P}{\pi D \delta E} \right)$$

它们都是负值, 即内、外直径都是缩短, 只是外直径的缩短因 $D_{\text{外}} > D_{\text{内}}$ 而要多一些, 可见图 1.5, *c* 所示图像正确。

例 1.5 矩形截面杆受轴向拉伸 (图 1.6, *a*), 作用在两个端面上的匀布荷载其集度为 p 。杆受力前在其表面上画有与轴线成 β 角的线段 AB , 问当杆件受力而变形时: (1) 若 $\beta = 30^\circ$ 则线段 AB 是伸长还是缩短? β 角是变大还是变小? (2) 若 $\beta = 60^\circ$ 则情况是否与 $\beta = 30^\circ$ 时相同? 该杆在线弹性范围内工作。

解: (1) 此杆受力时, 在 $\beta = 30^\circ$ 情况下与线段 AB 平行的 $\alpha = 30^\circ$ 斜截面上和与线段 AB 垂直的 $\alpha = 120^\circ$ 斜截面上都既有正应力又有剪应力, 利用图 1.6, *b* 所示单向拉伸应力状态下的应力圆可求得上述两个相互垂直的斜

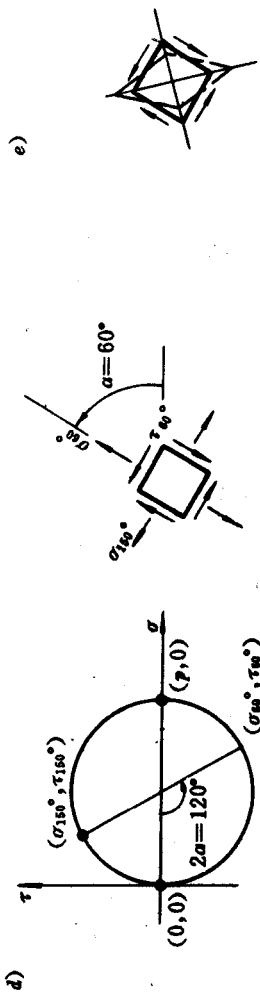
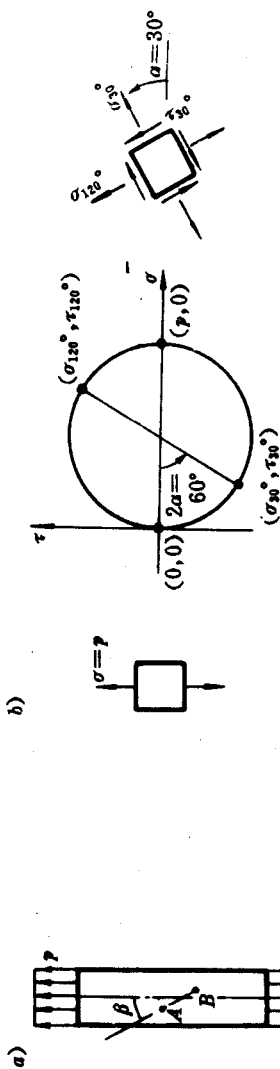


Fig. 1.6

截面上的应力,显然此时有 $\sigma_{120^\circ} > \sigma_{30^\circ}$ 。需要注意的是,因为不仅与线段 AB 垂直的斜截面上有正应力 σ_{120° ,而且与线段 AB 平行的斜截面上也有正应力 σ_{30° ,所以线段 AB 的线应变是

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{120^\circ}}{E} - \nu \frac{\sigma_{30^\circ}}{E}$$

由于 $\sigma_{120^\circ} > \sigma_{30^\circ}$ 而 ν 又是小于 1 的量,故 ϵ_{AB} 在 $\beta = 30^\circ$ 时必为正值,即线段伸长。至于 β 角的变化,根据图 1.6, b 中所示两对斜截面上剪应力的指向如图 1.6, c 中所示, β 角系变小。

(2) 在 $\beta = 60^\circ$ 情况下,与线段 AB 平行的 $\alpha = 60^\circ$ 斜截面上和与线段 AB 垂直的 $\alpha = 150^\circ$ 斜截面上的应力如图 1.6, d 所示,此时, $\sigma_{150^\circ} < \sigma_{60^\circ}$, 且 $\sigma_{150^\circ} = +\frac{p}{4}$, $\sigma_{60^\circ} = +\frac{3p}{4}$ 。因此线段 AB 的线应变为

$$\epsilon_{AB} = \frac{\sigma_{150^\circ}}{E} - \nu \frac{\sigma_{60^\circ}}{E} = \frac{1}{E} \left(\frac{p}{4} - \nu \cdot \frac{3p}{4} \right) = \frac{p}{4E} (1 - 3\nu)$$

可见:若 $\nu < 1/3$, 则 ϵ_{AB} 为正值,即线段 AB 伸长;若 $\nu = 1/3$, 则 $\epsilon_{AB} = 0$, 线段 AB 既不伸长也不缩短;若 $\nu > 1/3$, 则 ϵ_{AB} 为负值而线段 AB 缩短。事实上易于想到:当线段 AB 与杆的轴线的夹角 β 为零时 ϵ_{AB} 当然为正值,当 $\beta = 90^\circ$ 时 ϵ_{AB} 必为负值,因此在 $\beta = 0$ 和 $\beta = 90^\circ$ 之间必有一个与 $\epsilon_{AB} = 0$ 对应的 β 角;若 ν 的值比较大从而横向线应变比较大(指绝对值),则 $\epsilon_{AB} = 0$ 所对应的 β 角就会小些。此例中,当 $\nu = 1/3$ 时与 $\epsilon_{AB} = 0$ 对应的 β 角为 60° , 因此 $\nu > 1/3$ 时与 $\epsilon_{AB} = 0$ 对应的 β 角必小于 60° , 从而在 $\beta = 60^\circ$ 情况下 ϵ_{AB} 为负值。至于 β 角的变化,如图 1.6, e 所示仍为减小。显然,当杆受轴向拉伸时, A 、 B 两点的竖直距离必定增大,而水平距离必定减小,故在 $0 \leq \beta \leq 90^\circ$ 范围内无论夹角 β 为多少,它必定减小。

§ 1.2 基本公式 $\sigma = N/A$ 的适用条件

轴向拉伸(压缩)杆件横截面上正应力的计算公式 $\sigma = N/A$ 是在根据平截面假设得到横截面上正应力为均匀分布之后,再由静力学条件 $N = \int_A \sigma dA$ 导出的,因此这个基本公式只适用于平截面

假设成立之时。事实上并非所有的杆件受轴向拉伸（压缩）时对其变形均可作平截面假设。Z形截面等直杆受轴向拉伸时（图 1.7, a），杆件在伸长的同时，它的两个翼缘并在各自的纵向平面内沿相反的方向弯曲，使横截面不再保持为平面而发生翘曲，横截面上除了对应于均匀伸长的正应力 σ_N （图 1.7, b）之外，还有因横截面不能自由翘曲而产生的附加正应力 σ_w （图 1.7, c），尽管后者在横截面上既不组成合力（ $\int_A \sigma_w dA = 0$ ），也不组成合力偶矩（两个相互平行的翼缘平面内的力偶矩 M_1 和 M_2 等值反向），因而横截面上总的正应力 $\sigma = \sigma_N + \sigma_w$ 组成的合力仍为通过横截面形心的轴力 N ，但正应力 σ 在横截面上已非均匀分布， $\sigma \neq N/A$ 。理论分析和实验甚至还都表明，受轴向拉伸的 Z 形截面杆若它的翼缘宽度与腹板高度呈某种比例，则横截面上靠近翼缘边缘处出现压应力。此外，此种杆件受拉时横截面上尚有不组成剪力和面内力偶矩的剪应力（图 1.7, c 中未示出）。

由上所述，读者还可注意到：

1. 材料力学中分析拉伸（压缩）杆件横截面上的正应力时讲授平截面假设，并非只是为了介绍“材料力学方法”，实际上也是说明应用公式 $\sigma = N/A$ 的限制条件。

2. 轴向拉伸（压缩）杆件，若横截面上的正应力均匀分布，则其合力必过横截面的形心（即该合力为轴力），但横截面上的正应力非均匀分布时，它们仍可能只组成轴力。这就是说，轴向拉、压杆件其横截面上正应力的合力过截面形心是正应力均匀分布的必要条件，但不是充分条件。

3. 如图 1.7, c 所示的那类应力，既然在整个横截面上不组成合力和合力偶矩，与它们相应的变形也不属于杆件的基本变形形

• 参看例如：奚绍中、郑世瀛编，应用弹性力学，中国铁道出版社，1981，第八章。

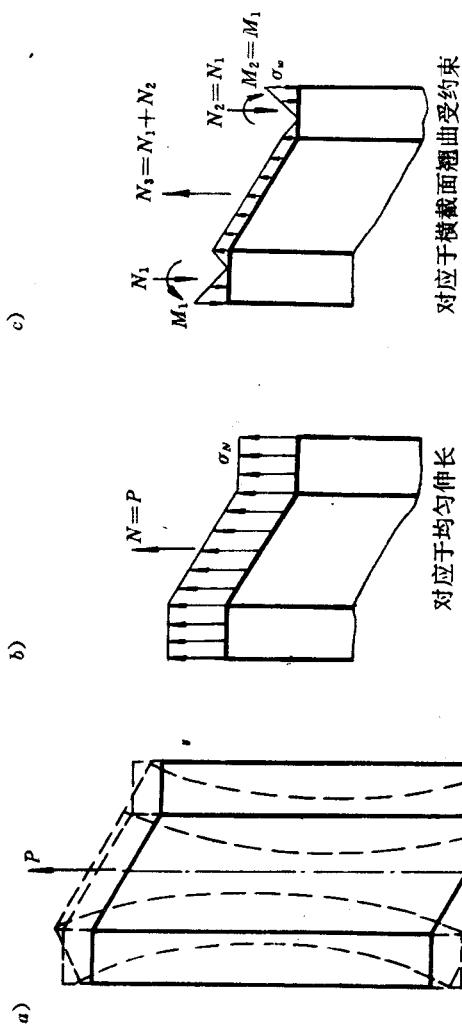


图 1.7