S X J M · · ·

数学建模

华东师范大学出版社

·袁震东 洪渊
林武忠 蒋鲁敏
编著

·SHUXUE JIANMO

·YUANZHENDONG
HONGYUAN
LINWUZHONG
JIANGLUMIN
BIANZHU

·HUADONG SHIFAN
DAXUE CHUBANSHE

华东师范大学教材出版基金资助出版

数学建模

袁震东 洪 渊
林武忠 蒋鲁敏 编著

华东师范大学出版社

封面设计　周艳梅

数　学　建　模

袁震东　洪　渊　林武忠　蒋鲁敏　编著

华东师范大学出版社出版发行

(上海市中山北路3663号　邮政编码 200062)

新华书店上海发行所经销

江苏省句容市排印厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 10　字数 245 千字

1997年11月第1版　　1997年11月第1次印刷

印数 001~2000 本

ISBN7-5617-1588-9/O·060

定价　14.00元

序　言

数学建模是应用数学方法解决实际问题的主要步骤，也是数学教学的重要内容．数学建模这门课程的教学目的是培养学生归结数学问题、寻求解法、验证解的合理性的能力．《数学建模》教材应该体现这一教学目的．

从数学建模的特点来看，数学建模的学习可能有两种方式：继承式学习与探究式学习．继承式学习以掌握人类积累起来的知识为目的，以理解和记忆为主要手段；探究式学习以培养学生解决问题的能力为目标，以学习归结问题、寻求解法、验证推广为手段．这两种方式均有其存在的理由，相互之间也有一定的联系．但近年来各发达国家更重视后一种学习方式的趋势已十分明显．

我们认为，数学建模的教学应以引导学生进行探究式学习为主要途径．学生学习时应首先弄清实际问题的含义，学会从复杂的背景中找出问题的关键所在，根据问题的特点，选择适当的数学模型，把实际问题化为清晰的数学问题．培养数学建模的能力，单靠记忆是不行的，靠理解也不行，还必须要有实践训练．有人用绘画做譬喻：画家用简单几笔就能勾划出运动员的动作势态或舞蹈家的优美舞姿，这是由于画家经过长期的观察和苦练，能迅速抓住动作关键部位的轮廓，舍弃了大量次要因素，使人体形象逼真动人地再现于画中．欲培养学生数学建模的能力，也要采用一点培养画家那样的训练．这就要注重范例的分析和演示．因此一本数学建模教材，可以看作提供训练范例的教科书．通过范例的演示与讲解，通过解决一些实际问题的训练，逐步培养学生数学建模的能力．

用不同的范例来训练学生可以获得不同的效果．究竟应该

选择哪些范例呢？我们认为，范例应符合两条标准：

第一，范例要切合学生的知识基础，使学生能够接受．范例间的编排应符合由浅入深，由简入繁的认知规律．

第二，范例应该具有典型性和启发性．

典型问题具有明显的时代特征．远古时代丈量土地、计算面积、体积的几何可能是当时最重要的数学模型．为编制精确的历法和测定地球子午线长度，我国唐代数学家僧一行发明了“张遂内插公式”，这也可以看作是研究该问题的成功的数学模型．在资本主义发展时期，牛顿和莱布尼兹的微积分是当时研究变速运动和求曲边梯形面积最好的数学模型．在二次世界大战期间，最初用于战争的运筹学、博奕论、编码解密是重要的数学建模问题．当今时代，随着两极世界的解体，一个市场经济高度发展、高科技剧烈竞争的信息时代展现在我们面前．我们认为：当前我们应该认真研究下列四个方面提出来的数学模型：

(1) 环境系统和生态系统方面的问题．

随着现代工农业的高度发展，保护生态环境、减少环境污染、恢复已被破坏的生态平衡、保护和拯救濒临灭绝的动物种群已成为当今时代一个重大课题．数学模型分析方法应该有助于解决环境和生态这一课题．

(2) 工厂自动化和大工业生产中提出的新课题．

当代的新技术革命提出了无数的数学问题，例如“钢材的直接轧制”、“最优调度问题”等等．

(3) 高新科技中提出来的数学模型问题．

生物医学工程、通讯工程、多媒体技术中蕴藏着许多数学问题，许多表面上看是技术问题而最后可能归结为一些困难的数学问题．

(4) 市场经济中大量的数学问题．

如投入产出、经济均衡、价格政策、库存规划等等．

由于数学建模需要灵活使用解析几何、线性代数、高等数学、

离散数学、概率统计以及计算机应用等知识，因此我们建议数学建模课程应放在大学三年级或专科最后一年开设.

本教材包含20个已经解决的数学模型问题，其中的许多范例要通过计算机计算才能获得所需的结果. 为取得良好的教学效果，我们建议教师在教学过程中适当配以计算机的演示.

本教材从一九九三年五月起开始编写，边使用边修改，曾三易其稿. 初稿和二稿曾在大学本科生、助教进修班教学中使用. 本教材第一章"确定性模型(上)——离散模型"由洪渊教授编写，第二章"确定性模型(下)——连续模型"由林武忠副教授编写，第三章"不确定性模型"由袁震东教授编写，最后由蒋鲁敏副教授作了认真的修改，并在降低阅读起点、前后联系及文字方面作了大量工作. 为方便教学中结合使用计算机进行数值计算，赵书钦副教授编写了附录二，介绍常用的MATLAB软件的使用方法. 本教材虽在编写上化了很多精力，但由于笔者才疏学浅，错误与不当之处在所难免，欢迎读者不吝赐教.

编　者

1995年5月

目　录

第一章　确定性模型(上)——离散模型 1
§1　通讯网络的最小生成树 3
1.1　图的基本概念 3
1.2　最优树 6
1.3　最短有向路 12
1.4　斯坦纳最小树. 通讯网络的最小生成树 18
习题 1.1 26
§2　城市道路扫雪模型 27
2.1　中国邮递员问题 27
2.2　城镇道路扫雪模型 30
习题 1.2 34
§3　两辆铁路平板车的装货问题 35
3.1　整数规划 35
3.2　分枝定界法 37
3.3　两辆铁路平板车的装货问题 40
习题 1.3 45
§4　动态规划与层次分析 46
4.1　状态转移问题 46
4.2　动态规划 50
4.3　竞赛参加者名次的排列 63
4.4　层次分析法 72
习题 1.4 83
§5　求解离散模型的几种方法 85

第二章 确定性模型(下)——连续模型 89
§1 动态模型 89
1.1 湖泊污染的减退 91
1.2 植物的生长 93
1.3 生态系统 94
1.4 经济增长模型 98
1.5 短期嵌入模型 105
1.6 鲑鱼动态模型 108
1.7 化学动力学 110
1.8 划船模型 113
1.9 交通模型 115
1.10 量纲、尺度和单位 116
习题 2.1 121
§2 平衡和稳定 122
2.1 污染浓度的平衡 122
2.2 划船速度 123
2.3 车辆通过隧道模型 124
2.4 鲑鱼模型的平衡环和极限环 126
2.5 双重玻璃阻止热量散失模型 130
2.6 椭圆形管道水流模型 133
2.7 平衡状态的改变 138
2.8 驾驶员反应分析模型 141
2.9 阿米巴变形虫的趋药性及其稳定性 148
习题 2.2 153
§3 最优控制和最优效用 154
3.1 候鸟最优迁移模型 156
3.2 最优增资模型 158
3.3 企业最优招聘模型 162
3.4 森林最优采伐模型 163

3.5 隧道最优车辆密度模型 169
3.6 捕鱼船队的最优规模 170
习题 2.3 174
第三章 不确定性模型 176
§1 人口发展模型和动物总数模型 176
1.1 马尔萨斯模型 177
1.2 逻辑斯蒂克模型 178
1.3 偏微分方程模型 180
1.4 勒斯里方程和宋健-于景元方程 183
1.5 美国黄石公园中的灰熊总数 187
习题 3.1 191
§2 时间序列预报模型 192
习题 3.2 196
§3 统计聚类模型 198
3.1 距离和相似系数 198
3.2 系统聚类法 206
3.3 有序样本聚类法 215
3.4 小结 221
习题 3.3 222
§4 统计识别模型 223
4.1 距离判别法 224
4.2 费歇判别法 231
4.3 蚊子的费歇分类 236
习题 3.4 240
§5 人工神经网络及其在分类问题中的应用 241
5.1 B-P算法 244
5.2 神经网络用于蚊子分类问题 252
习题 3.5 258
§6 随机服务系统中的利润计算与决策 258

§7 库存模型 262
7.1 确定性库存模型 262
7.2 随机性库存模型 269
附录一 怎样撰写数学建模论文 273
附录二 MATLAB 使用简介 276
§1 数据输入和输出 277
§2 矩阵运算和数组运算 284
§3 内部函数 289
§4 绘图 289
§5 命令文件和函数文件 298
参考文献 306

第一章 确定性模型(上)
——离散模型

随着计算机的出现和广泛应用,计算科学技术的不断进步,数学的应用已从物理领域逐步深入到经济、生态、环境、医学、人口和社会等更为复杂的非物理领域. 今天,许多基础学科已从定性描绘走向定量分析,边缘学科不断涌现;数学在经济管理、工程技术以及自然科学中具有广泛的应用,它的重要性已逐渐成为人们的共识.

用数学方法解决实际问题,要求从实际错综复杂的关系中找出其内在规律,然后用数字、图表、符号和公式把它表示出来,再经过数学与计算机的处理,得出供人们进行分析、决策、预报或者控制的定量结果. 这种把实际问题进行简化归结为数学问题并求解的过程就是建立**数学模型**,简称为**建模**.

现实世界千变万化,我们不可能用一个统一的模式来说明如何建模. 在此仅简单地介绍建模的一般步骤.

1. **模型准备** 要求建模者深刻了解实际问题的背景,明确建模的目的;进行全面深入细致的调查研究,尽量掌握建模对象的各种信息;找出实际问题的内在规律. 这是向实际工作者和有关专家学习的过程.

2. **模型假设** 现实问题涉及面广,一般不可能面面俱到,必须根据调查得到的信息,将实际问题简化、理想化. 这就要求抓住主要因素,抛弃次要因素,提出恰当的假设. 在提出假设时,如考虑因素过多,模型过于复杂就无法求解;反之如考虑因素过少,模型十分粗糙,就会与实际情况不符. 一个较理想的数学模型往往要多次修改假设才能得到.

3. **模型建立** 根据假设, 利用恰当的数学工具建立各种量(常量和变量) 之间的数学关系. 建模时究竟采用何种数学工具要根据问题的特征、建模的目的以及建模者的数学特长而定. 可以这样说, 在建立模型时可能用到数学的任一分支; 同一实际问题可以用不同的数学方法建立不同的模型. 一般而言, 在达到预期目标的前提下, 应采用尽可能简单的数学工具以便为更多的人接受和使用.

4. **模型求解** 包括求解各种类型的方程、画图、列表、证明定理、逻辑运算、上机计算和制作软件包等.

5. **模型分析和检验** 根据模型的特点和模型求解的结果, 分析各种变量之间的依赖关系、稳定性质, 作出预测、最优决策与控制, 然后将分析的结果与客观的实际情况比较, 检验模型的合理性和适用范围. 如果不合理, 则修改原来的假设重新建模, 直到模型求解结果符合实际情况和建模的要求为止.

6. **模型应用** 把所得的数学模型应用到实际问题中去.

建模的一般过程可以概括为如图 1.1 所示过程.

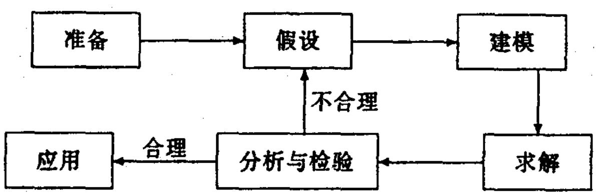

图 1.1

当然, 并不是所有建模问题都按此程序进行. 关键是根据对象的特点和建模的目的, 抓住事物的本质, 进行必要的简化. 这不仅要求建模者能灵活地应用数学知识, 还要求有敏锐的洞察力和丰富的想象力. 当然, 培养读者的洞察力和想象力靠这样一本教科书是远远不够的. 建议读者除学习本书正文的例题外, 还应注意研究书中的习题, 并尽可能动手解决几个实际课题.

按照实际问题本身和解决问题的方法, 数学模型有以下几

种分类方法:

1. 按变量性质分: 按变量取值方式可分为离散模型和连续模型, 按变量描述现象的性质可分为确定性模型和不确定性模型(随机性模型、模糊性模型等);

2. 按时间关系分: 有静态模型和动态模型;

3. 按精确程度分: 有集中参数模型和分布参数模型;

4. 按研究方法分: 有初等模型、微分方程模型、运筹模型、优化模型和线性代数模型等;

5. 按实际问题所属学科领域分: 有经济模型、生态模型、人口模型、交通模型等;

6. 按人们对研究对象的内部结构和性能了解程度分: 有白箱模型、灰箱模型和黑箱模型. 这时, 我们把研究对象当作一只箱子: 如果对研究对象的机理比较清楚, 称为**白箱**(如力学和电路中的一些问题, 不必再研究模型构造); 如果对研究对象的内部结构和性能完全不知或知之甚少, 称为**黑箱**(如生命学科和社会学科中许多现象机理至今不清); 介于这两者之间的, 称为**灰箱**(如经济、生态、气象、管理、社会、生命、能量等系统中的许多现象). 当然白、灰、黑之间并没有明显的界限, 随着科学技术的不断进步, 箱子的"颜色"会逐渐由黑变白的.

所谓离散数学模型就是把实际问题直接抽象成离散的数、符号或图象, 然后以离散数学为主要工具解决的数学模型.

本章将讨论若干与美国大学生数学建模竞赛有关的离散数学模型.

§1 通讯网络的最小生成树

1.1 图的基本概念

在生产活动和日常生活中, 类似下面例子的一些现象是我们经常遇到的. 例如, 在一群人中有些人互相认识, 有些人互相

不认识. 又如, 一次足球锦标赛有24个队参加, 先分成四组进行循环赛, 每一小组第一名出线, 再打淘汰赛决出冠亚军; 这样有一些队之间将进行比赛, 而有些球队之间将不进行比赛. 再如某航空公司在100个城市之间建立航线, 有些城市之间有直达航班, 而有些城市之间没有直达航班.

像上面这样的现象都包含下列共同的内容: 一是有研究的"对象", 如人群、球队、城市等; 二是要研究这些对象之间的某种"关系", 如互相认识、要进行比赛、有直达航班等. 为了表示对象以及对象之间的关系, 我们可在纸上画一些点和线. 每一点代表一个对象, 称这些点为**顶点**, 简称**点**; 如果两个对象之间有所讨论的关系, 我们就在相应的两点之间用线连结, 称这些线为**边**. 这样就构成一个几何图形, 这种由若干个不同的顶点与连结其中某些顶点的边所组成的图形, 称为**图**.

我们把顶点组成的集合称为**顶点集**, 记作V, 边组成的集合称为**边集**, 记作E. 这样一个图就由(V,E)组成, 记作$G=(V,E)$. 若给出一个图G, G的顶点集可用$V(G)$表示, G的边集可用$E(G)$表示, G的顶点数可用$|G|$表示.

进一步, 如果对图中的顶点和边赋以具体的含义和权, 这样的图称为**网络**.

一个图可以用一个几何图形表示, 在保持图内点和边关系不变的条件下, 图形的位置、大小、形状都是无关紧要的. 因此, 我们常常画出图的一个几何图形, 并且把它作为这个图的本身. 以后, 我们用黑点表示顶点, 用线表示边. 图论中大多数概念都是根据图的直观形式提出来的.

图1.2中的点用$v_i\ (1\leqslant i\leqslant 5)$表示, 边用$e_j\ (1\leqslant j\leqslant 7)$表示. 每条边也可用它所连接的点表示. 例如记$e_1=(v_1,v_1)$, $e_2=(v_1,v_2)$, $e_6=(v_3,v_4)$等. 若边e表示为$e=(v_i,v_j)$, 这时称v_i和v_j是边e的**端点**, 边e与点v_i或v_j**关联**. 如果两个点与同一边关联, 则称这两个点**相邻**. 如果两条边有一个公共端点, 则

称这两条边是**邻接**的. 两个端点重合的边称为**环**(例如图1.2中的边e_1). 具有两个公共端点的两条边称为**重边**(例如图1.2中的边e_6和e_7). 不与任何边关联的点称为**孤立点**(例如v_5). 一个既

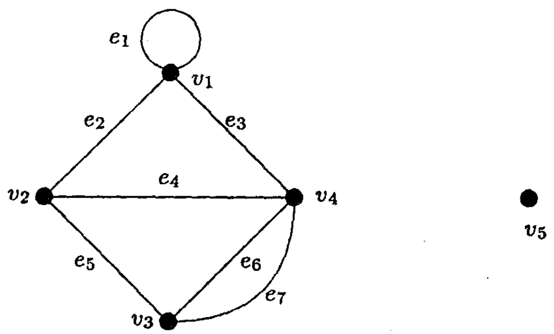

图 1.2

没有环也没有重边的图称为**简单图**, 没有任何边的图称为**空图**, 只有一个点的图称为**平凡图**. 与某一点v_i关联的边的数目称为点v_i的**次**, 记作$d_G(v_i)$或$d(v_i)$. 约定环作为两条边计算; 孤立点的次为零. 例如图1.2中各点的次分别为$d(v_1)=4$, $d(v_2)=3$, $d(v_3)=3$, $d(v_4)=4$, $d(v_5)=0$. 次为奇数的点称为**奇点**, 次为偶数的点称为**偶点**. 用$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示图G中顶点的**最小次**和**最大次**. 对图1.2, $\delta(G)=0$, $\Delta(G)=4$. 记G的n个顶点为$v_1, v_2, \cdots, v_n$, 边数为m, 则有$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2m$.

设图G中有一个点边交错的序列$v_0e_1v_1e_2\cdots v_{m-1}e_mv_m$, 如果$e_i=(v_{i-1},v_i)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, 且$e_i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$互不相同, 则称这个序列是从$v_0$到$v_m$的**链**, v_0与v_m称为这条链的两个端点. 如果v_0与v_m相同, 则称这条链为**闭链**. 进一步, 如果v_0, v_1, $\cdots$, v_m互不相同, 则称这条链为**路**. 一条闭链, 如果v_0, v_1, $\cdots$, v_{m-1}互不相同, 则称这条闭链为**圈**. G的两个顶点u和v称为**连通的**, 如果在G中存在u到v的路. 存在顶点集V的一个分

类, 把 V 分成非空子集 $V_1, V_2, \cdots, V_k$: 两个顶点 u 和 v 属于同一个子集 V_i 的充分而必要的条件为它们是连通的. 以 V_i 为顶点集, 以两端点均在 V_i 中的边的全体为边集所组成的图记为 $G[V_i]$, 称为 G 的**分图**. 若 G 只有一个分图, 则称 **G 为连通的**.

一个简单图中, 若任意两点之间均有边相连, 则称为**完全图**. 含有 n 个顶点的完全图, 其边数为 $C_n^2 = \frac{1}{2}n(n-1)$. 如果简单图 G 的顶点集是两个互不相交的非空集合 V_1 和 V_2 之并集, 并且同一个集合中任意两个顶点均不相邻, 则称这样的图为**偶图**(又称**二分图**). 如果偶图的顶点集 V_1、V_2 中每一对不同集合的顶点之间都有一条边相连, 这样的偶图称为**完全偶图**. 若完全偶图中 V_1 含 n_1 个顶点, V_2 含 n_2 个顶点, 则其边数为 $n_1 n_2$.

对图 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$, 若 $V_1 \subseteq V_2$ 且 $E_1 \subseteq E_2$, 则称 G_1 是 G_2 的子图; 若 $V_1 = V_2$ 且 $E_1 \subseteq E_2$, 则称 G_1 是 G_2 的 **生成子图**. 显然, 生成子图一定是子图, 但子图不一定是生成子图. 分图一定是子图, 但子图不一定是分图.

1.2 最优树

无圈图称为**森**, 连通的无圈图称为**树**. 若 G_1 是连通图 G_2 的生成子图, 且 G_1 本身是树, 我们就称 G_1 为 G_2 的**生成树**. 树是最简单但又是十分重要的一类图. 由于其结构简单, 它常用来验证图论的某些猜想. 它在许多学科领域中有广泛的应用, 例如分子结构, 电网络分析等. 最短连接问题与树有关, 学科分类和一些决策过程也往往可以用树的形式表示.

可以证明: “连通”、“无圈”和“边数等于点数减一”这三个性质中的任意两个都能保证一个图为树.

对图 $G = (V, E)$ 的每一边 $e \in E$ 赋以相应的实数权 $w(e)$, 得到一个网络, 记为 $N = (V, E, W)$. 设 $T = (V, E')$ 是 N 的一个生成树, 令

$$W(T) = \sum_{e \in E'} w(e),$$

则$W(T)$称为T的**权**, N中权最小的生成树称为N的**最优树**.

许多实际问题, 如在若干个城市之间建造铁路网、输电网或通信网等, 都可归纳为寻求连通赋权图(网络)的最优树问题. 例如已知城市v_i和v_j间的直通线路的造价为$W_{ij} = w(e_{ij})$ $(e_{ij} = (v_i, v_j))$, 要求一个总造价为最小的设计方案; 又如一个城市中, 对若干新建居民点供应自来水和煤气, 已测知连接各点间的直通管道的造价, 要求给出一个总造价最小的铺设方案等等. 下面介绍在给定网络$N = (V, E, W)$内求最优树的两种算法. 设网络点数为n, 此时最优树的边数为$n-1$.

算法I (克鲁斯凯尔, Kruskal)

算法I的中心思想是每次添加权尽可能小的边, 使新的图无圈, 直到生成最优树为止. 其步骤如下:

(1) 把N内的所有边按照权的非减次序排列.

(2) 按(1)排列的次序检查N中的每一条边, 如果这条边与已得到的边不产生圈, 则取这一条边为解的一部分.

(3) 若已取到$n-1$条边, 算法终止. 此时以V为顶点集, 以取到的$n-1$条边为边集的图即为最优树.

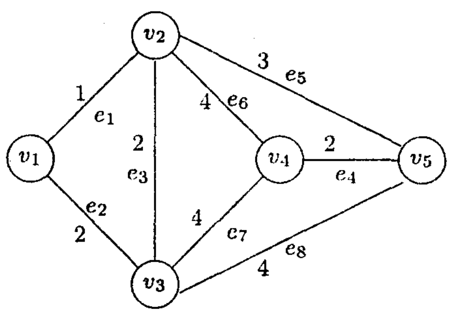

图 1.3

例 求图1.3所示网络的最优树.