# 概率论与数理统计

主编　施久玉
主审　王其元

哈尔滨工程大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/施久玉主编. 一哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2000.7

ISBN 7-81073-013-4

Ⅰ.概… Ⅱ.施… Ⅲ.①概率论②数理统计

Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 65011 号

---

## 内容简介

本书是按照国家教委审定的高等工业学校《概率论与数理统计课程基本要求》编写的。包括概率论与数理统计二部分。各章均附有习题,可作为高等学校教材。也可供科技工作者、工程技术人员参考。

---

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行

哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)2519328　邮编:150001

新　华　书　店　经　销

肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本　850mm×1 168mm　1/32　印张 8.625 字数 210 千字

2000 年 7 月第 1 版　2001 年 7 月第 2 次印刷

印数:7 001～12 000 册　定价:14.00 元

# 前　言

本书是按照国家教委审定的高等工业学校《概率论与数理统计课程基本要求》编写的，可作为高等学校工程数学《概率论与数理统计》课程教材。

本书分二部分，概率论部分（第一章至第五章）作为基础理论知识，是全书的重点。数理统计部分（第六章至第八章）介绍了常用的统计推断的基本方法：参数估计，假设检验。

由于概率论与数理统计的概念和方法有其独特之处，读者在学习时往往感到一定的困难。我们总结教学经验，吸取同类教材的优点，在正文上力求通俗易懂，易教易学。本书配备例题全面，习题丰富，习题分 A、B 两类。书中有一节内容带“*”号，供读者泛读。

我们希望本书能为读者在今后进一步学习有关课程或在实际应用方面提供一定的基础。

本书授课学时约 48 学时。

本书由哈尔滨工程大学应用数学系陈林珠、王锋、沈艳、张晓威、于涛、郑晓阳集体编写，由施久玉任主编，王其元教授主审。

由于我们的水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编　者

2000 年 5 月

# 目　　录

# 第一章 随机事件与概率

我们所掌握的科学规律，通常可表现为如下形式：一类是在一定条件下必然出现(或恒不出现)的现象，例如在标准大气压下，水加热到100℃时必定沸腾，三角形内角和为180°等等。我们称这种现象为**确定性现象**(确定性模型)。读者可以从物理学、化学等其它学科中举出许多这样的实例。但在许多问题中往往还有另外一类情况，要得到预定结果的条件比较复杂，不可能完全确切地测定这些条件，当条件具有微小变化时，就影响到结果的发生与否。例如掷一枚硬币，其结果可能出现正面，也可能出现反面，其结果呈现不确定性。如果硬币是匀称的，那么，当我们重复多次掷硬币后就会发现，出现正面的次数一般来说占总数的50%左右。也就是说存在着集体(统计)规律性。我们称这种现象为**随机现象**(概率统计模型)。

概率论是一门从数量方面研究随机现象的客观规律性的学科，经逐步发展与严格化便形成了数学的一个分支。

概率统计方法可以提供更好的数学模型。譬如研究原子物理过程，纯粹确定性模型是不够的，要知道物理系统的确切状态，即使在理论上也是不可能的。我们能从模型中得出的只是一群原子的平均性态，但是我们不能肯定地断言单个原子未来进程中的任何事情。这种情况从根本上影响了物理学的发展并导致了概率统计模型的引入。又如社会系统的确定性模型必定要假设人类没有自由意志。但是，几乎没有人愿意接受这种观点，社会问题探讨的是个人或由个人组成的群体有关的问题。无论对一个人以及社会环境的了解有多么透彻，我们也永远不可能完全预测在特定场合下这个人确切的未来行为。

概率论与数理论计的理论与方法的应用是很广泛的，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门。例如产品抽样、可靠性工程、气象、水文、地震预报、自动控制、通讯工程、管理工程等等。正如一位著名作家所表述的：概率论和统计学转变了我们关心自然、心智和社会的看法，这些转变是意义深远而且范围广阔的，既改变着权力的结构，也改变着知识的结构，这些转变使现代科学成形。

## §1 样本空间 随机事件

### 一、随机试验

为了方便和确切地研究随机现象，我们把对随机现象的某些特征的观察都称为试验，并用字母 $E$ 表示之。以下是几个试验的例子。

**例 1**

$E_1$：掷一颗骰子，记录其出现的点数。

$E_2$：掷一颗骰子，记录其出现的点数为偶数。

$E_3$：在某批产品中任选一件，检验其是否合格。

$E_4$：记录某客车站一天的售票营业额。

以上试验所具有的共同特点：

1° 事先无法确定试验的哪个结果会出现；

2° 全部可能的结果是明确的；

3° 在相同条件下可以重复进行。

我们称具有上述三个特点的试验为**随机试验**，简称为试验。

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的。

### 二、样本空间

某种试验 $E$ 的所有可能结果组成的集合称为 $E$ 的**样本空间**。样本空间的元素，即 $E$ 的每个结果称为**样本点**，记为 $e$。样本空间简记为 $S=S(e)$。

下面给出例 1 中每个试验的样本空间：

$S_1$：{1,2,3,4,5,6}；

$S_2$：{2,4,6}；

$S_3$：{合格，不合格}；

$S_4$：$\{e \mid e \geqslant 0\}$。

我们可以看出：样本空间的元素可以是有限多个，也可以是无穷多个；样本空间中的元素可以是数也可以不是数。样本空间的元素取决于试验的目的，也就是说由于试验目的的不同，样本空间的元素也就不同。如试验 $E_1$ 和 $E_2$，同是掷骰子，由于观察的目的不同，所以样本空间 $S_1$ 和 $S_2$ 也不同。但是，无论怎样构造样本空间，作为样本空间中的元素——样本点，必须具备两条基本属性：1°**互斥性**，即无论哪两个样本点不会在同一次试验中出现；2°**完备性**，即每次试验一定会出现某一个样本点。

**三、随机事件**

在进行随机试验时，人们常关心的是满足某种条件的样本点的集合。例如，若规定某一客运站的售票营业额少于 300 元为亏损，则人们关心的为不小于 300 元的样本点的集合 $A$。显然 $A$ 是随机试验 $E_4$ 的样本空间 $S_4$ 的一个子集，即

$$A = \{e \mid e \geqslant 300\}$$

我们称试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集为 $E$ 的**随机事件**，简称为**事件**。事件是概率论中最基本的概念。今后用大写字母 $A, B, \cdots$ 表示事件。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。在上例中，如某天的营业额为 500 元，则事件 $A$ 发生。

特别地由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**。例如试验 $E_1$ 中有 6 个基本事件{1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}。

样本空间 $S$ 包含所有的样本点，在每次试验中它总是发生，称为**必然事件**。空集中不包含任何样本点，空集也是样本空间的一个

子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**，用 $\varnothing$ 表示。

## 四　事件间的关系与事件的运算

由于随机事件是样本空间的一个子集，而且样本空间中可以定义不止一个事件，那末分析它们之间的关系不但有助于我们深刻地认识事件的本质，而且还可以简化一些复杂事件的概率的计算。既然事件是一个集合，因此我们可以借助集合论中集合之间的关系以及集合的运算来研究事件间的关系与事件间的运算。

设试验 $E$ 的样本空间为 $S$，$A$、$B$、$C$、$A_i$，$(i=1,2,\cdots,n)$是 $E$ 的事件。

1. 若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $B$ 包含事件 $A$。记作 $A\subset B$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 $A$ 与 $B$ **相等**。记作 $A=B$。易知：若 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$。

2. 事件 $A\cup B=\{e|e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为事件 $A$ 与 $B$ 的**和事件**。当事件 $A$、$B$ 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生。

类似地，当 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生时，称和事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生。

3. 事件 $A\cap B=\{e|e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为事件 $A$ 与 $B$ 的**积事件**。当事件 $A$ 与 $B$ 都发生时积事件 $A\cap B$ 发生。$A\cap B$ 也记作 $AB$。

类似地，当 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生时，称积事件 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生。

4. 事件 $A-B=\{e|e\in A$ 且 $e\overline{\in}B\}$ 称为事件 $A$ 与 $B$ 的**差事件**。当事件 $A$ 发生而事件 $B$ 不发生时，事件 $A-B$ 发生。

5. 事件 $A$、$B$，若 $AB=\varnothing$，则称事件 $A$ 与 $B$ 是**互不相容事件或互斥事件**。$n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 被称为互不相容的，是指其中任意两个事件都是互不相容的，即 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$。

6. 事件 $A$、$B$，若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，就是说，不论试验结果如

何,事件 $A$ 与 $B$ 中必有且仅有一个发生,则称事件 $A$ 与 $B$ 为**互逆事件**,也称互为**对立事件**。$A$ 的对立事件记为 $\overline{A}$。即 $\overline{A}=B$ 或 $\overline{A}=S-A$。

**注意**:对立事件 $A$ 与 $\overline{A}$ 必为互不相容(互斥)事件,但互不相容事件不一定是对立事件。

用文氏图 1－1～1－6 可直观地表示以上诸事件的关系。其中矩形面积为样本空间 $S$,圆形面积 $A$、$B$ 分别表示事件 $A$、$B$。阴影部分则分别表示和、积、差等事件。

容易验证以下事件的运算律。

**交换律** $A\cup B=B\cup A$;$A\cap B=B\cap A$

**结合律** $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

**分配律** $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

**德·摩根律** $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

**对差事件运算** $A-B=A\overline{B}=A-AB$

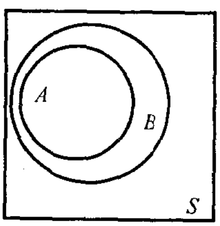

图 1－1 $A\subset B$

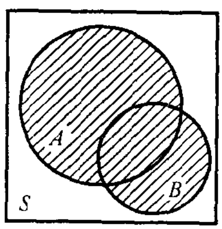

图 1－2 $A\cup B$

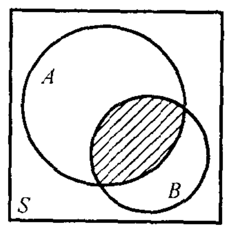

图 1－3 $A\cap B$

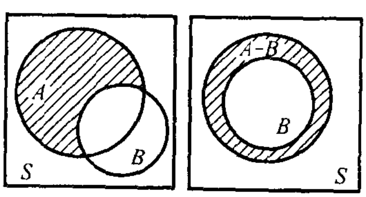

图 1－4 $A-B$

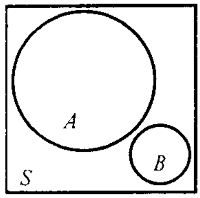


图 1-5　$A \cap B = \varnothing$

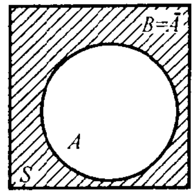


图1-6　$\overline{A} = S - A$

**例 2**　掷一颗骰子。设事件 $A_1$ 为掷出奇数点，$A_2$ 为掷出是偶数点，$A_3$ 为掷出是小于 4 的偶数点。则有

$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$；

$A_1 A_2 = \varnothing$；

$A_2 A_3 = \{2\}$；

$A_2 - A_3 = A_2 \overline{A_3} = \{4,6\}$；

$\overline{A_1 \cup A_3} = \overline{A_1}\,\overline{A_3} = \{4,6\}$.

**例 3**　如图 1－7 所示的电路中，以 $A$ 表示“信号灯亮”这一事件。以 $B$、$C$、$D$ 分别表示电路接点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ闭合事件。易知

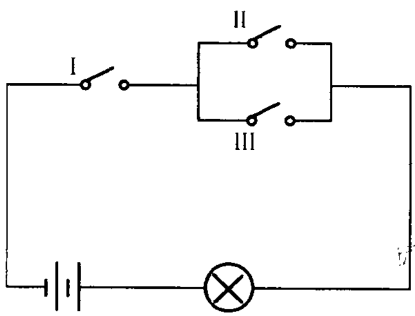


图 1－7

$BC \subset A$，$BD \subset A$

$BC \cup BD = A$

而 $\overline{B}A=\varnothing$，即事件 $\overline{B}$ 与事件 $A$ 互不相容。

**例 4** 化简下列事件

(1) $AB\cup A\overline{B}$

(2) $A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}$

**解** (1) $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=AS=A$

(2) $$\begin{aligned}A\overline{B}\cup\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B}&=(A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B})\cup(\overline{A}B\cup\overline{A}\overline{B})\\&=\overline{B}(A\cup\overline{A})\cup\overline{A}(B\cup\overline{B})\\&=\overline{B}S\cup\overline{A}S=\overline{B}\cup\overline{A}=\overline{AB}\end{aligned}$$

## §2 频率与概率

### 一、频率

由随机事件的特性可知，在一次试验中，它可能发生也可能不发生（除必然事件和不可能事件外）。我们希望对某一事件出现的可能性的大小给出一个度量。这里首先引入频率的概念。

**定义 1** 在相同条件下，随机事件 $A$ 在进行 $n$ 次重复试验中出现的次数，称为事件 $A$ 发生的**频数**，记为 $n_A$。比值 $n_A/n=f_n(A)$ 称为事件 $A$ 发生的**频率**。

频率有以下性质：

1° $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

2° $f_n(S)=1$；

3° 若 $A,B$ 是互不相容的事件，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$。

由于事件 $A$ 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 $A$ 发生的频繁程度。频率愈大，事件 $A$ 发生愈频繁，这意味着 $A$ 在一次试验中发生的可能性愈大。因而，直观的想法是用频率来表示 $A$ 在一次试验中发生的可能性的大小。是否合适？先看下面的例子。

**例 1** 考虑“抛硬币”这个试验，我们将一枚硬币抛掷 5 次、50

次、500 次，各做 10 遍，得到数据如表 1 所示(其中正面 $H$，$n_H$ 表示 $H$ 发生的频数，$f_n(H)$表示 $H$ 发生的频率)。

**表 1**

| 实验序号 | $n=5$ | | $n=50$ | | $n=500$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $n_H$ | $f_n(H)$ | $n_H$ | $f_n(H)$ | $n_H$ | $f_n(H)$ |
| 1 | 2 | 0.4 | 22 | 0.44 | 251 | 0.502 |
| 2 | 3 | 0.6 | 25 | 0.50 | 249 | 0.498 |
| 3 | 1 | 0.2 | 21 | 0.42 | 256 | 0.512 |
| 4 | 5 | 1.0 | 25 | 0.50 | 253 | 0.506 |
| 5 | 1 | 0.2 | 24 | 0.48 | 251 | 0.502 |
| 6 | 2 | 0.4 | 21 | 0.42 | 246 | 0.492 |
| 7 | 4 | 0.8 | 18 | 0.36 | 244 | 0.488 |
| 8 | 2 | 0.4 | 24 | 0.48 | 258 | 0.516 |
| 9 | 3 | 0.6 | 27 | 0.54 | 262 | 0.524 |
| 10 | 3 | 0.6 | 31 | 0.62 | 247 | 0.494 |

这种试验历史上曾有人做过，得到如表 2 所示的数据。

**表 2**

| 实 验 者 | $n$ | $n_H$ | $f_n(H)$ |
|---|---|---|---|
| 德·摩根 | 2 048 | 1 061 | 0.518 1 |
| 蒲 丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| K·皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| K·皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

从上述数据可以看出：1° 频率有随机波动性，即对于同样的 $n$，所得的 $f_n(H)$不尽相同；2° 抛硬币次数 $n$ 较小时，频率 $f_n(H)$

随机波动的幅度较大，但随着 $n$ 增大，频率 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5。

**例 2** 考察英语中特定字母出现的频率。当观察字母的个数 $n$（试验的次数）较小时，频率有较大幅度的随机波动。但当 $n$ 增大时，频率呈现出稳定性。下面就是一份英文字母频率的统计表①：

| 字母 | 频率 | 字母 | 频率 | 字母 | 频率 |
|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | 0.126 8 | $L$ | 0.039 4 | $P$ | 0.018 6 |
| $T$ | 0.097 8 | $D$ | 0.038 9 | $B$ | 0.015 6 |
| $A$ | 0.078 8 | $U$ | 0.028 0 | $V$ | 0.010 2 |
| $O$ | 0.077 6 | $C$ | 0.026 8 | $K$ | 0.006 0 |
| $I$ | 0.070 7 | $F$ | 0.025 6 | $X$ | 0.001 6 |
| $N$ | 0.070 6 | $M$ | 0.024 4 | $J$ | 0.001 0 |
| $S$ | 0.063 4 | $W$ | 0.021 4 | $Q$ | 0.000 9 |
| $R$ | 0.059 4 | $Y$ | 0.020 2 | $Z$ | 0.000 6 |
| $H$ | 0.057 3 | $G$ | 0.018 7 | | |

从上面两个例子中可以看出，当 $n$ 较小时，频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大，因而，当 $n$ 较小时用频率来表达事件发生的可能性的大小是不太合适的。而当 $n$ 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数。对于每一个事件 $A$ 都有这样一个客观存在的常数与之对应。这种"频率稳定性"，即通常所说的统计规律性，不断地为人类的实践所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性，我们用这个频率稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的。我们称这个"稳定值"为事件发生的**概率**。

尽管概率的频率解释常常是相当有用的，也是合适的。但是，如果我们要发展一种有用的理论，就要求我们有一个关于概率的严格和精确的定义。

① 这是由 G, Dewey，统计了约 438 023 个字母得到的，引自 Relative Frequency of English Spellings (Teachers College Press, Columbia University, New York, 1970)

## 二、概率及其性质

**定义 2** 设 $E$ 是随机试验,$S$ 是其样本空间。对于 $E$ 的每一个事件 $A$ 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 $A$ 的**概率**,若 $P(A)$满足下列条件:

(i) 对每个事件 $A$ 有 $P(A)\geqslant 0$ (**非负性**);

(ii) $P(S)=1$ (**规范性**);

(iii) 设 $A_1,A_2,\cdots$,是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,$i,j=1,2,\cdots,A_iA_j=\varnothing$,则有

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$ (**可列可加性**)。

**说明**:①这个定义是基于集合这一概念。

②$P(A)$是集合 $A$ 的函数。

③定义中的前两个条件和我们对频率的观察结果是一致的,第(iii)个条件也是非常自然的,对频率而言

$$n_{(A_1\cup A_2)}/n=n_{A_1}/n+n_{A_2}/n$$

由概率的定义,可以推得概率的一些重要性质:

1° $P(\varnothing)=0$;

2° 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$
(**有限可加性**);

3° 若事件 $A$、$B$ 满足 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A)$$

4° 对任意事件 $A$,$P(\overline{A})=1-P(A)$,其中 $\overline{A}$ 为 $A$ 的对立事件;

5° 对任意事件 $A$、$B$ 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

上式称为加法公式。特别当事件 $A$ 与 $B$ 互不相容时有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

这里仅证 3°和 5°,其余性质留给读者自证。

证　3°　由 $A\subset B$ 知 $B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\varnothing$，由概率的可加性知

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

因为　$P(B-A)\geqslant 0$，所以　$P(B)\geqslant P(A)$

5°　由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$，

又　$A(B-AB)=\varnothing$，而且 $AB\subset B$，于是有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$

性质 5°还可推广到多个事件的情形，设 $A_1,A_2,A_3$ 为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

一般地，对任意 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 可由归纳法推得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

**例 3**　设 $A$、$B$ 为两事件，且设 $P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$。求 $P(A\overline{B})$。

**解**　$P(A\overline{B})=P\{A(S-B)\}=P(A-AB)$
$$=P(A)-P(AB)$$

而　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

所以　$P(A\cup B)-P(B)=P(A)-P(AB)$

得到　$P(A\overline{B})=0.6-0.3=0.3$

**例 4**　(1)设 $A$、$B$ 为两个任意事件且 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，求证 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$；

(2)证明对任意两个事件 $A$、$B$ 有