哈尔滨工程大学应用数学系 编

微积分教程

WEIJIFEN JIAOCHENG

上册

哈尔滨工程大学出版社

微积分教程

（上册）

哈尔滨工程大学应用数学系　编

哈尔滨工程大学出版社

内 容 提 要

本书以全国高校工科数学课程教学委员会修订的“高等数学课程基本要求”为依据，在我校多年来高等数学课程的教学经验和教学改革的基础上，经过应用数学系多数教师的仔细推敲而写成的。

本书分上、下两册。上册内容为函数与极限，导数与微分，中值定理与导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何；下册内容包括多元函数微分法，重积分，曲线与曲面积分，无穷级数以及常微分方程。书后还附有几种常见的曲线，积分表，习题参考答案与提示。

本书具有结构合理，逻辑清晰，通俗简捷，例题适当，习题面广的特点。同时，还增加了有关数学建模的典型实例，以便于进一步加强对学生实际应用能力的提高和培养。

本书可供高等工科院校学生学习使用。

微积分教程

（上册）

哈尔滨工程大学应用数学系　编

责任编辑　张彦

*

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通大街145号　哈工程大学11号楼

发行部电话：(0451)2519328　邮编：150001

新华书店经销

哈尔滨工程大学印刷厂印刷

*

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 13.25 字数 315 千字

2000 年 8 月第 1 版　2001 年 8 月第 2 次印刷

印数：3 801～7 300 册

ISBN 7－81073－023－1

O·3　定价：16.50 元

前　　言

为了适应高等教育改革发展的需要，依据全国工科高等数学指导委员会制定的《高等数学课程教学基本要求》，结合我校多年来的教学实践和教学经验，在对许多教师、学生进行了大量的调查，特别是吸收了国内外同类教材的优点基础上，经充分讨论和研究，我们编写出版了《微积分教程》一书。全书共分上、下两册，另附有习题课指导教材两册。

本书以培养学生能力和提高学生素质为主线，注意对基本理论知识，基本技能和基本方法的分析和训练，又增加了数学建模方面的实例。

本书编写时考虑了与中学数学课程内容的衔接。在文字和内容的叙述上，力求通俗易懂、由浅入深、表达清晰、结构严谨，在直观引入的基础上，再给出严格的定义；在例题的选配上注意了代表性和典型性，以促进学生对概念及定理的理解和深化；在习题配置上，以基本训练为重点，同时也有少量技巧性较强、难度较大的题目，需在教师指导下练习。

本书上、下两册分别由林锰（第一章），范崇金（第二章、第六章），董衍习（第三章），沈艳（第四章、第五章），卜长江（第七章，第九章），马孝珣（第八章），祖国城（第十章），于涛（第十一章）和高玲（第十二章）等同志编写而成。沈继红同志提供了数学建模的素材实例。

全书由陈林珠（上册），高玲（下册）主审和统稿。

在本书的编写过程中，得到了哈尔滨工程大学应用数学系广大教师的帮助和支持，也得到了全校各级有关领导的鼓励和指导，在此一并表示衷心感谢。

由于水平有限，书中难免有不妥之处，恳切希望广大读者指评指正。

编者

2000.3

再版前言

《微积分教程》第一版出版后，在经过教学实践，听取专家、同行们以及广大学生的宝贵意见的基础上，编者对本书的部分内容进行了修改、补充。此外还对“超大纲”的内容进行了小字或加附录的处理。现再次出版。

参加本次修改工作的除原编写组成员外，还有张晓威、王锋、贾念念等同志。

在此，我们向关心本书以及提出宝贵意见和建议的同志们表示衷心的感谢。

编者

2001.7

目 录

第一章　函数与极限

函数是客观世界中量与量之间相互依赖关系的一种数学抽象，它是中学数学的重要内容之一，又是高等数学(或数学分析)的主要研究对象.初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学课程.虽然函数的思想对定义域和值域中的对象的性质没有加以限制，但在本课程中，我们主要感兴趣的还是它的定义域和值域都是实数集的那种函数，即是在实数集上讨论问题.本章将介绍函数极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、函数的概念

函数是描述客观事物在运动、变化、发展过程中量与量之间的对应规律.

在所考虑的问题中，可取不同数值的量称为变量，保持数值不变的量称为常量.为了方便起见，我们称在一非空数集内可以任意取值的量为变量.这样，常量就成为变量的特例.

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有多个变量在变化着.这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律.我们首先研究两个变量的情形(多于两个变量的情形在后续课程中介绍).下面举几个例子.

例 1　在自由落体运动中，路程 S 随时间 t 的变化而变化，它们之间的依赖关系由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

给出.其中 g 是重力加速度，为常量.时间 t 与路程 S 为变量.对于 $t\in(0,+\infty)$ 的任意一数值，按上公式，S 都有一确定值与其对应.

例 2　气象部门为掌握某地区某天 24 小时内气温 T 与时间 t 确定的对应关系，使用自动记录仪记录(图 1－1).此段曲线难以用解析式子表示.

上述两例.抽去其具体意义，都反映了变量与变量之间的某种特定的依赖关系，于是抽象出函数的概念.

1.函数的定义　**设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的数集.如果对于每一个数值 $x\in D$，按照对应规则，变量 y 有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记为**

$$y=f(x)$$

通常称 x 为自变量，y 为因变量，数集 D 为函数的定义域.

2.说明：

(1)函数 $y=f(x)$ 中表示对应规则的记号“f”也可用其它字母，如“F”，“φ”等等，这时函数就应记为 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等等.

(2)当自变量 x 取一定值时，因变量 y 相应的值叫函数值.所有函数值的集合称为函数

的值域，不妨用字母 W 表示. 函数 $y=f(x)$ 当 $x=x_0$ 时的函数值记为 $y_0=f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}=y_0$.

(3)同一函数的自变量和因变量不能用同一字母表示. 如 $y=x^2+1$ 不能写成 $x=x^2+1$.

(4)在数学中，若只是抽象地研究用算式表达的函数时，我们约定：函数的定义域是自变量所取的使算式有意义的一切实数值. 如函数 $y=\sqrt{x}$ 的定义域是区间 $[0,+\infty)$.

(5)特殊地，若自变量在定义域内任取一数值时，对应的函数值不是只有一个，这种函数称为**多值函数**. 我们定义的函数称为单值函数. 以后凡是没有特别说明时，函数都是单值的.

在中学，我们已知函数表示法有三种：公式表示法，图形表示法，表格表示法(如函数表). 这也是高等数学(或数学分析)中要用到的函数表示法.

当一个函数用公式表示时，也不一定只用到一个统一公式. 图形表示法就是将函数 $y=f(x)$ 用平面上的图像给予表示. 在平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图像是如下平面点集：

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

当 D 是一个区间时，函数 $y=f(x)$ 的图像通常是平面上的一条曲线. 下面举几个例子.

例 3 绝对值函数 $y=|x|$.

此函数也可写成

$$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$(图 1-2).

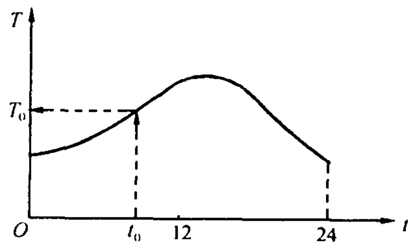

图 1-1

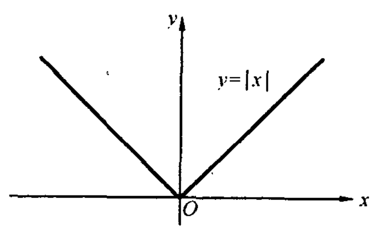

图 1-2

例 4 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数简称为 x 的最大整数，记为 $y=[x]$，这个函数称为取整函数(图 1-3). 如 $[\frac{5}{7}]=0$, $[\sqrt{3}]=1$, $[-3.4]=-4$. $y=[x]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数.

例 5 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$(图 1-4).

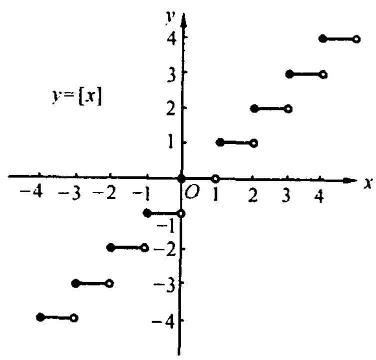

图 1-3

我们将以上几例中这种在自变量的不同变化范围

中,对应法则用不同式子表示的函数称为分段函数.

需要提请读者注意的是,当自变量的取值范围是某个区间时,如果不必要辨明是否包含区间的端点以及此区间为无穷区间还是有限区间,我们可以简称为"区间",且用字母 I 表示.另有一种特殊的区间:即设 $a,\delta(\delta>0)$ 为两实数,我们称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,也就是

$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 或

$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$

点 a 为此邻域的中心,δ 为此邻域的半径.有时用到的邻域要把邻域的中心去掉,称为点 a 的去心(或空心)的 δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$.也就是

$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$

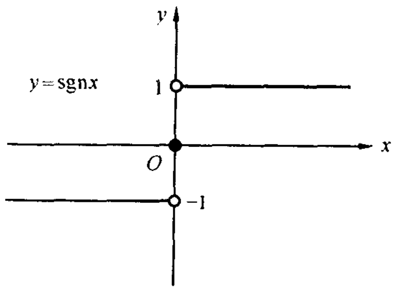

图 1-4

二、函数的几种特性

1.函数的单调性 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数.令区间 $I=D$,如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的.反之,如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$ 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

若在上述不等式中不出现等号,则称 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调增加(减少)**.在定义域上单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**。严格单调增加或严格单调减少的函数统称为**严格单调函数**(见图 1-5,1-6)。

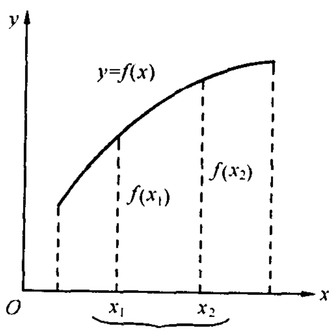

图 1-5

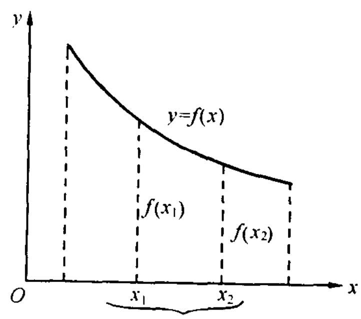

图 1-6

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的,而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调的(见图 1-7).

又例如函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(见图 1-8).

2.函数的有界性 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$.如果存在正数 M,使得与任一 $x\in X$ 所对应的函数值都满足不等式

$$|f(x)|<M$$

则称函数 $f(x)$在 X 上有界.如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 X 上无界,亦即,如果对任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使$|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$在 X 上无界.

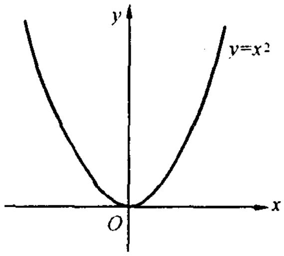

图 1－7

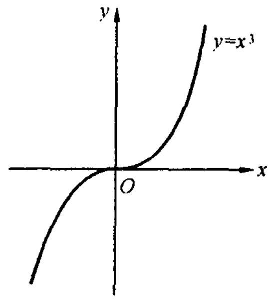

图 1－8

例如函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界,这是因为对 $x\in(-\infty,+\infty)$,总有$|\sin x|\leqslant 1$.又如 $y=\dfrac{1}{x}$,在 $x\in(0,1)$区间内无界.在$[1,2]$内有界,在$(-\infty,+\infty)$内无界.

3.函数的奇偶性 设函数 $f(x)$的定义域 D 是关于原点对称的(即若 $x\in D$,则必 $-x\in D$).如果对任一 $x\in D$ 满足

$f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$是**偶函数**;

$f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$是**奇函数**.

例如 $f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$;$f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=-x^3=-f(x)$.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,而奇函数的图形是关于原点对称的.但值得注意的是,有些函数即非奇函数,又非偶函数,如 $f(x)=\sin x+\cos x$.

4.周期函数 设函数 $f(x)$的定义域是 D,如果存在一个不为零的数 $l(l>0)$,使得对任一 $x\in D$ 有$(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,l 称为$f(x)$的周期.通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数.

三、反函数

一般地说,函数 $y=f(x)$中,若将 y 当作自变量,x 当作因变量,则由 $y=f(x)$确定的函数 $x=\varphi(y)$称为 $y=f(x)$的**反函数**.相对于反函数 $x=\varphi(y)$来说 $y=f(x)$称为**直接函数**.

在纯数学的研究中,由于所关心的问题只是变量间的相互依赖关系,且习惯上常用 x 来表示自变量,用 y 来表示因变量,因此把 $y=f(x)$的反函数 $x=\varphi(y)$改记为 $y=\varphi(x)$.事实上 $y=f(x)$与 $y=\varphi(x)$互为反函数.在中学时已证明过它们的图形关于直线 $y=x$ 对称.

对于严格单调的函数,有如下结论:

单值严格单调函数有反函数,其反函数也是单值严格单调函数.

例如，$y=\sqrt{x}$在其定义域$x>0$上是严格单调函数，其反函数 $y=x^2$ 在其定义域 $x>0$ 也是严格单调函数.

四、复合函数　初等函数

1. 基本初等函数

我们将幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 它们的函数表达式如下.

(1)幂函数　$y=x^{\alpha}$（α 为常数），它的定义域要根据 α 的取值而定.

(2)指数函数 $y=a^x$（a 为常数且$a>0, a\neq1$），它的定义域是$(-\infty,+\infty)$. 以常数 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots\cdots$为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是科技中常用的指数函数.

(3)对数函数　它是指数函数的反函数，记作 $y=\log_a x$（a 为常数，$a>0, a\neq1$）. 它的定义域是$(0,+\infty)$. 当 $a=\mathrm{e}$ 时记为 $y=\ln x$.

(4)三角函数　常用的三角函数有

正弦函数　$y=\sin x$；余弦函数　$y=\cos x$；

正切函数　$y=\tan x$；余切函数　$y=\cot x$；

正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

其中自变量 x 以弧度作单位来表示.

(5)反三角函数　它是三角函数的反函数，主要有以下几种

反正弦函数 $y=\arcsin x$；反余弦函数 $y=\arccos x$；

反正切函数 $y=\arctan x$；反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

以上基本初等函数的性质，图像等这里从略介绍.

2. 复合函数　初等函数

(1)复合函数　先举一个例子，设 $y=\sqrt{u}$而 $u=1-x^2$，以 $1-x^2$ 代替第一式的 u，得 $y=\sqrt{1-x^2}$. 我们说，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$及 $u=1-x^2$ 复合而成的**复合函数**.

一般地，如果 y 是u 的函数$y=f(u)$，$u\in D_1$，而 u 又是x 的函数$u=\varphi(x)$，$x\in D_2$，且 $D=\{x\mid x\in D_2, \varphi(x)\in D_1\}\neq\Phi$，则函数

$$y=f[\varphi(x)], x\in D$$

称为由函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，称 u 为中间变量.

例如，函数 $y=\arctan(x^2)$可看作由 $y=\arctan u$ 及$u=x^2$ 复合而成的，这个函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=x^2$ 的定义域. 又例如，$y=\sqrt{x^2}$可看作由 $y=\sqrt{u}$及$u=x^2$ 复合而成的，这个函数实际就是函数 $y=|x|$.

必须注意，不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$内任何 x 值所对应的u 值(都大于或等于 2)，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\cot\dfrac{x}{2}}$，这里 u 及v 都是中间变量.

(2)初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成的可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**,例如

$$y=\sqrt{1-x^2},\ y=\ln\sin^2 x+2x\tan\sqrt{x}$$

都是初等函数.本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

五、双曲函数与反双曲函数

应用上常遇到的双曲函数是

双曲正弦 $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, 双曲余弦 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,

双曲正切 $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

这三个双曲函数的简单性态如下:

双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$;它是奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称.在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的.当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$;在第三象限内接近于曲线 $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x}$(图 1-9).

双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$;它是偶函数,它的图形通过点$(0,1)$且关于 y 轴对称.在区间$(-\infty,0)$内它是单调减少的;在区间$(0,+\infty)$内它是单调增加的.$\mathrm{ch}0=1$ 是这函数的最小值.当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^x$,在第二象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$(图 1-9).

双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$;它是奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称,在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的,它的图形夹在水平直线 $y=1$ 及 $y=-1$ 之间;且当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近于直线 $y=1$,而在第三象限内接近于直线 $y=-1$(图 1-10).

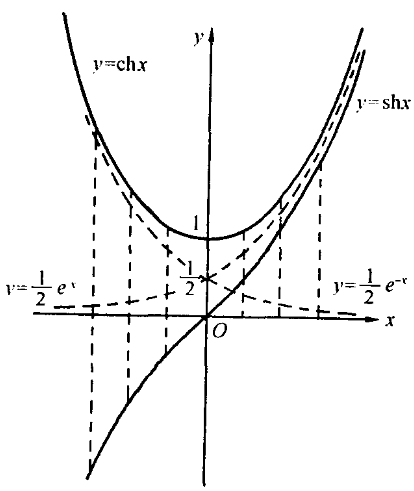

图 1-9

双曲函数 $y=\mathrm{sh}x$, $y=\mathrm{ch}x$, $y=\tan x$ 的反函数依次记为

反双曲正弦 $y=\mathrm{arsh}x$;

反双曲余弦 $y=\mathrm{arch}x$;

反双曲正切 $y=\mathrm{arth}x$.

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示,分别讨论如下:

$y=\mathrm{arsh}x$ 是 $x=\mathrm{sh}y$ 的反函数,因此,从

$$x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

中解出 y 来便是 $\mathrm{arsh}x$.令 $u=e^y$,则由上式有

$$u^2-2xu-1=0$$

这是关于 u 的一个二次方程，它的根为

$$u=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

因 $u=e^y>0$，故上式根号前应取正号，于是

$$u=x+\sqrt{x^2+1}$$

由于 $y=\ln u$，故得

$$y=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

函数 $y=\operatorname{arsh}x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调增加. 由 $y=\operatorname{sh}x$ 的图形，根据反函数的作图法，可得 $y=\operatorname{arsh}x$ 的图形如图 1-11 所示.

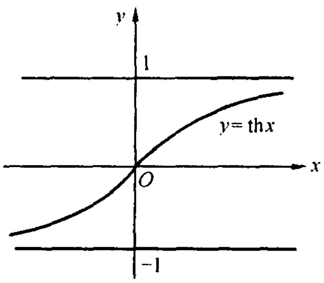

图 1-10

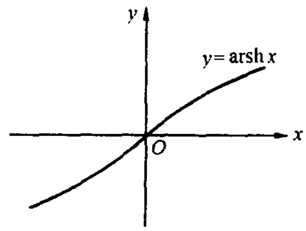

图 1-11

下面讨论双曲余弦的反函数. 由 $x=\operatorname{ch}y$，有

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

由此得 $e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$，故 $y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1})$.

上式中 x 的值必须满足条件 $x\geqslant1$，而其中平方根前的符号可正可负. 当 $x=1$ 时，$y=0$；对于大于 1 的每个 x 值，y 有 $\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 及 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ 两值与之对应. 由于

$$\ln(x-\sqrt{x^2-1})=\ln\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

故

$$y=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\text{（图 1-12）}.$$

由此可见，双曲余弦的反函数是双值的. 它的图形是关于 x 轴对称的两支. 我们取其正值的一支作为该函数的主值. 于是有

$$y=\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

这样就规定了函数 $y=\operatorname{arch}x$ 为单值的，它在区间 $[1,+\infty)$ 上是单调增加的.

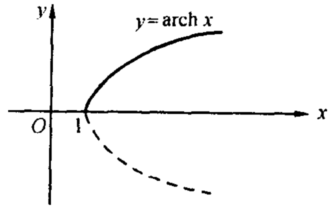

图 1-12

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sin\sqrt{x}$；　(2) $y=\tan(x+1)$；　(3) $y=\arcsin(x-3)$；

(4) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；　(5) $y=\ln(x+1)$；　(6) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $f(x)=\arcsin x$，求下列函数值：

$$f(0),f(-1),f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1).$$

3. 设 $G(x)=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{2}$. 求下列函数值：

$$G(0),G(1),G(\sqrt{2}),G(-\sqrt{3}),G(-2).$$

4. 设 $F(x)=e^x$. 证明：

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$；

(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$.

5. 设 $G(x)=\ln x$. 证明：当 $x>0,y>0$ 时，下列等式成立：

(1) $G(x)+G(y)=G(xy)$；

(2) $G(x)-G(y)=G(\dfrac{x}{y})$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=2\sin 3x$；　(2) $y=1+\ln(x+2)$；　(3) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

7. 在下列各题中，求由所给函数复合而成的函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\dfrac{\pi}{6},x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\dfrac{\pi}{8},x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$；

(4) $y=e^u,u=x^2,x_1=0,x_2=1$；

(5) $y=u^2,u=e^x,x_1=x_2=-1$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问 (1) $f(x^2)$，(2) $f(\sin x)$，(3) $f(x+a)$，$(a>0)$，(4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域各是什么？

9. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -1, & |x|>1\end{cases}$　$g(x)=e^x$，

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

10. 证明：

(1) $\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{ch}\dfrac{x-y}{2}$;　　(2) $\mathrm{ch}x-\mathrm{ch}y=2\mathrm{sh}\dfrac{x+y}{2}\mathrm{sh}\dfrac{x-y}{2}$;

(3) $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$;　　(4) $\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x=\mathrm{ch}2x$.

11. 已知一物体与地面的摩擦系数是 μ，重量是 P. 设有一与水平方向成 α 角的拉力 F，使物体从静止开始移动(图 1－13). 求物体开始移动时拉和 F 与角 α 之间的函数关系式.

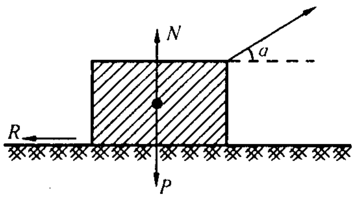

图 1－13

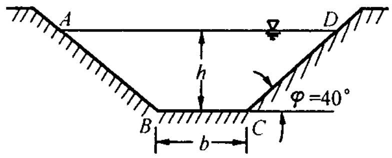

图 1－14

12. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$(图 1－14). 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L=AB+BC+CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域.

13. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥(图 1－15)，试将其体积表示为高的函数，并说明定义域.

14. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 千克时，按基本运费计算，如从上海到某地每千克收 0.15 元. 当超过 50 千克时，超重部分按每千克 0.25 元收费. 试求上海到该地的行李费 y(元)与重量 x(千克)之间的函数关系式，并画出这函数的图形.

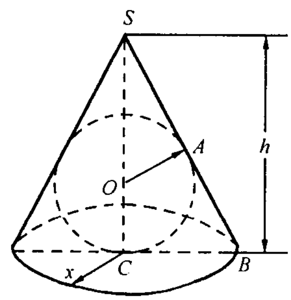

图 1－15

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

1. 数列

如果按照某一对应法则，有第一个数 x_1，第二个数 x_2，…这样依次序排列着，使得对应着任何一个正整数 n 有一个确定的数 x_n，则称这列有次序的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 为**数列**.

数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n 叫做数列的**一般项**. 下面给出几个数列的例子：

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$$

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^n,\ \cdots$$

$$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$$

有时，我们也常把数列 x_n 看成特殊的函数，即

$$y = x_n = f(n)$$

它的定义域是全体正整数,当自变量 n 依次取 1,2,3,…等一切正整数时,对应的函数值就排列成数列 x_n. 以后数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 也简记为 $\{x_n\}$.

2.数列极限的定义

给定了一个数列 $\{x_n\}$. 如果当 n 无限增大时, x_n 趋于某一常数 a, 我们就称数列 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时, 以 a 为极限, 记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \text{或} \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

所谓当 n 无限增大时, x_n 趋于常数 a, 意思是说, 当 n 充分大时, x_n 与 a 可以任意的靠近, 要多近就可以有多近. 换句话说, 当 n 充分大时, $|x_n - a|$ 可以任意小, 要多小就有多小.

例如,数列为: $\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$$

该数列当 $n \to \infty$ 时, 以 0 为极限. 也就是当 n 充分大时,

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

可以任意小, 要多小就有多小. 比如要

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < 0.1$$

可取 $n > 10$ 即当 $n > 10$ 时, 数列 $\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$ 的第 10 项以后的所有项均小于 0.1. 所以, 我们严格地给出数列极限的定义如下.

定义　设 $\{x_n\}$ 为一数列, a 是一个常数, 若对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

则称当 $n \to \infty$ 时, 数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限. 记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \quad \text{或} \quad x_n \to a \quad (n \to \infty)$$

但是, 并不是所有的数列都有极限. 比如数列

$$1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$$

正负交错. 当 n 增大时, 它不趋于某一常数.

又如数列 $\{\ln n\}$, 当 n 增大时, 该数列也无限地增大, 不趋于某一定数, 所以也无极限.

数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 我们称 $\{x_n\}$ 是**收敛的**, 且收敛于 a. 若 $\{x_n\}$ 无极限, 我们称 $\{x_n\}$ 为**发散的**.

数列 $\{x_n\}$ 若以 a 为极限, 则其趋于极限值 a 的方式是多种多样的. 例如, 当 $n \to \infty$ 时,

$$100, 8, 9, 3, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

其极限值为零, 该数列从大于零的部分趋于 0.

$$0.3, 0.33, \cdots, \underbrace{0.333\cdots3}_{n\text{个}}, \cdots$$