高级中学

平面解析几何全一册（必修）

教学参考书

人民教育出版社

（京）新登字 113 号

高 级 中 学

平面解析几何全一册（必修）

教学参考书

人民教育出版社中学数学室　编

*

人民教育出版社出版

（100009 北京沙滩后街 55 号）

内蒙古教育出版社重印

内蒙古新华书店发行

内蒙古人民印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/32　印张 5　字数 98 800

1990 年 11 月第 1 版　　1999 年 4 月第 2 次印刷

印数 1－14 360

ISBN7－107－00969－9

G·2122（课）定价 2.70 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与内蒙古教育出版社联系调换。

地址：呼和浩特市新城区西护城河巷 30 号

邮编：010010　电话：（0471）6961597

ISBN 7-107-00969-9

9 787107 009693 >

本书是根据高级中学课本《平面解析几何》的内容，在江苏省无锡市教研室编写的平面解析几何（甲种本）教学参考书的基础上删节而成的.

目　录

说　明

高级中学数学课本《平面解析几何》，主要讲授平面解析几何的基础知识.

解析几何是数学的一个分支，产生于十七世纪初期.当时由于资本主义生产的发展，在促进自然科学和生产技术改进的过程中，相应地提出了许多数学问题. 例如，在天文学上，开普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运行；在力学上，伽利略发现抛射体沿抛物线轨道运动；帕斯卡发现大气压力随高度的增加而递减的规律. 科学和技术的发展所产生的许多问题，都需要人们对曲线进行研究和计算，从而导致了解析几何的产生和发展.

笛卡儿（René Descartes，1596—1650）是解析几何的奠基人，他开始把代数用到几何上去. 在他所著的《几何》一书中，开始曾应用代数来解决几何作图问题；后来逐渐出现用方程来表示曲线的思想. 笛卡儿说："我决心放弃那个仅仅是抽象的几何. 这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题. 我这样做是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何."他断言曲线的次数与坐标轴的选择无关，并指出坐标轴要选得使最后得到的方程越简单越好. 笛卡儿称那些可用唯一的含 x 和 y 的有

限次代数方程来表示出的曲线为几何曲线，其他如旋轮线、对数曲线、对数螺线等为机械曲线．后来莱布尼茨（Leibniz，1646—1716）进一步用“代数曲线”和“超越曲线”来代替“几何曲线”和“机械曲线”．笛卡儿的思想和工作大大推动了对曲线的深入研究，因为给定任何一个含 x 和 y 的代数方程，人们可以求出它的曲线；而且能进一步用代数方法研究这些曲线的性质；还能把这种形和数结合的方法推广到研究“超越曲线”上来．解析几何的产生对数学发展，特别是对微积分的出现起了很大作用．恩格斯对笛卡儿的这一发现给予高度评价，说：“数学中的转折点是笛卡儿的**变数**．有了变数，**运动**进入了数学，**有了变数，辩证法**进入了数学，**有了变数，微分和积分也就成为必要的了**，…”（引自恩格斯的《自然辩证法》）

“解析几何”是在坐标系的基础上，用代数方法研究几何问题的一门数学学科．“平面解析几何”研究的主要问题是：（1）根据已知条件求出表示平面曲线的方程；（2）通过方程，研究平面曲线的性质，并作出曲线的图形．曲线和方程的概念是解析几何中最基本的内容，掌握了这个概念，才能用解析法研究几何图形的性质．由于解析几何开创了形、数结合的研究方法，使数学的发展进入了一个新阶段，解析几何就成为进一步学习数学、物理和其他一些科学的基础．

高级中学数学课本《平面解析几何》内容包括：直线、圆锥曲线、参数方程和极坐标三章．

直线是最简单的几何图形．“直线”这一章教材是研究

各种运动方向和位置关系的基本工具，也是学习圆锥曲线和其他曲线的基础，是解析几何的入门课．本章是学生在初中学习了“直角坐标系”的基础上，先引入直线的倾斜角和斜率的概念，给出直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式和一般形式．指出了直线的方程都可以写成二元一次方程，而二元一次方程的图象是直线．

圆锥曲线是中学平面解析几何中的重要曲线，也是进一步研究其他曲线的基础，在日常生活和科学技术中有着广泛的应用．用解析法研究圆锥曲线是从初等数学过渡到高等数学的阶梯，需要综合运用过去学过的数学知识．因此，这章教材很重要，它是《平面解析几何》这本书的主体，起着承前启后的作用．圆锥曲线这一章教材分别介绍了圆、椭圆、双曲线、抛物线的标准方程、图形和性质．从方程的形式看，在直角坐标系中，圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程都是二元二次方程，所以，它们又称为二次曲线．从点的集合（或轨迹）的观点看，椭圆、双曲线、抛物线都是到一个定点与一条定直线距离的比是常数 e 的点的集合或轨迹，由于离心率 e 的不同，而分为这几种曲线．坐标变换是化简曲线方程，以便于讨论曲线的性质和画出图形的一种重要手段．本章只讲坐标轴平移．利用坐标轴的平移，可将缺 xy 项的二元二次方程化为圆、椭圆、双曲线、抛物线等标准方程．

参数方程和极坐标是平面解析几何的主要内容之一．利用参数方程来解决某些实际问题，有时有着明显的优越性；利用极坐标来研究某些曲线，有时比用直角坐标方便．

参数方程和极坐标是进一步学习数学的工具.

用解析法解决关于曲线的问题，思路比较简单，规律性较强. 让学生掌握这种方法是解析几何教学的一项重要任务. 但是，这种方法运算过程往往比较繁复. 为了解决这个问题，一方面要不断提高学生恒等变形的能力，另一方面在运用解析法的同时，还要注意与各种数学方法结合起来，这样，有时会使运算过程大大简化.

数学是一门非常严谨的科学. 课本一方面注意了理论上的严谨性，另一方面又照顾到教学上的可接受性. 例如，求轨迹方程最后一步，证明所得方程就是所求轨迹的方程，这一步不是可有可无的，但对于中学生来说是很困难的. 因此课本指出这一步可以省略，但提出了一点要求，就是要指出方程的图象中明显的多余部分或缺少部分. 总之，在教学上必须强调概念要准确，理论要清晰，方法要明确；在解决具体问题时，为了有利于学生理解，不过分追求严谨性.

这本书每章内容由四个部分组成：Ⅰ. 教学要求；Ⅱ. 教材分析和教学建议；Ⅲ. 练习、习题、复习参考题的答案、提示和解答；Ⅳ. 附录(参考资料).

各章的教学要求是根据现行大纲的精神，结合教材内容，对基础知识、基本技能及思想教育等方面提出具体的要求，务求在教学实践中努力达到.

教材分析和教学建议是分析各章（或单元）的教学内容、地位和作用，简明地阐述教材的编写意图，分析各章教材的重点和难点，指出解决问题的关键，对课时安排，例、

习题的选择和搭配也提出了一些参考性意见.

本册教学参考书对练习题及一般习题给出了答案，对稍难的习题给出了提示，对难题给出了解答，以供教师教学和批改作业时参考.

为了帮助理解教材和便于教学，书本选择了一些课本以外的知识，附在各章后面，作为教学参考资料，只供教师参考.

教师在使用本册教学参考书时，要认真领会大纲的精神和深入钻研教材，结合学生实际进行教学. 着重讲清概念、原理、公式，使学生掌握基础知识和基本技能，注意培养学生灵活运用知识的能力.

根据教材的编写意图，我们对具体内容的要求和处理，虽有上述一些设想和做法，但这些设想和做法不一定都正确，有些设想和做法还需要在教学中进一步加以验证和完善，恳切地希望教师们在使用中，根据自己的实践经验，提出宝贵意见，以利于本书的改进和完善.

第一章 直 线

I 教学要求

1. 使学生理解有向线段的概念，掌握两点的距离公式、有向线段的定比分点和线段的中点坐标公式，并能熟练应用.

2. 使学生正确理解直线的倾斜角和斜率的概念，掌握过两点的直线的斜率公式，掌握由点斜式导出各种直线方程的方法，并能根据条件选择适当的形式熟练地求出直线方程.

3. 使学生掌握两条直线平行和垂直的条件，两条直线所成的角和点到直线的距离公式，能够利用直线方程讨论两条直线的位置关系.

4. 通过本章学习，使学生了解解析几何的基本思想，初步了解如何用解析法研究几何问题.

Ⅱ 教材分析和教学建议

本章教材是学生在初中掌握了平面直角坐标系、一次函数的图象及高一掌握了三角函数的基础上学习的. 直线是简单的几何图形，是研究各种运动方向和位置关系的基

本工具．在初中已经知道，一次函数的图象是直线，但怎样根据具体的条件建立直线的方程、怎样利用直线知识解决有关的问题等，则有必要进一步加以研究．直线方程是学习圆锥曲线方程和其他知识的基础，在解决许多实际问题中有广泛的应用．因此，务必使学生切实学好本章内容，为以后的学习打下良好的基础．

本章教材的主要内容有：有向线段、线段的定比分点、直线方程的几种形式、两条直线的位置关系．这些内容共分为三大节，第一大节介绍有向线段的概念，以及有向线段的数量公式和长度公式，并运用这两个公式推导两点的距离公式、定比分点坐标公式，这些知识是本章中研究直线方程以及今后研究曲线与方程的基础和工具．第二大节先介绍了经过两点的直线的斜率公式，由斜率公式推导出直线方程的点斜式、斜截式、两点式、截距式．又通过二元一次方程与直线的对应关系，总结出直线方程的一般式．使学生对直线方程的各种形式有一个较全面的认识和掌握．第三大节通过对斜率的讨论，得出了两条直线平行、垂直的条件及两条直线交角的公式；从两条直线的交点出发，得出了由两个直线方程的系数的关系，判断两条直线相交、平行、重合的三种情况，并导出点到直线的距离公式．这一大节中的两条直线的位置关系是通过两直线的方程来讨论的，重点是研究两条直线的平行关系和垂直关系，通过这一大节的学习，要使学生初步掌握利用方程讨论图形性质的方法．

本章教材中，有向线段是一个重要的概念，线段的定

比分点（包括中点）坐标的公式是一个重要的基本公式．另外，直线的斜率也是一个重要的基本概念，斜率公式也是一个重要的基本公式．正确理解斜率的概念，掌握求斜率的公式，是顺利学习直线方程的关键．在直线方程的几种形式中，点斜式是建立直线方程的其他形式的基础，斜截式是点斜式的特例，两点式可由点斜式导出，截距式又是两点式的特例．因此，教学中应使学生首先学好直线的点斜式．

有向线段、线段的定比分点是本章的难点．这是由于学生第一次接触这两个新的概念，对它们的含义理解不清楚，因而不会正确运用．

本章教材中说明了在平面直角坐标系中任何一条直线的方程都可以写成二元一次方程；任何一个二元一次方程的图象都是一条直线，使学生从直观到理论来认识平面上直线与二元一次方程的对应关系．在点斜式方程的推导中，我们以直线上任一点 P（x，y）与已知点 P_1（x_1，y_1）的连线的斜率 k 为基础，推导出直线的点斜式方程，其实，这里已运用了由曲线求方程的方法，但主要是为今后进一步学习曲线与方程的对应关系作些准备．关于直线上的点和 x、y 的一次方程的解的对应关系，待第二章曲线与方程的对应关系建立起来以后，学生就比较明确了，这个对应关系的建立是逐步解决的，教学中的要求，也应逐步提高．教材中还安排了少量的解析法证几何题的例题和习题，这里只是为了使学生了解和熟悉解析法．但用解析法证明平面几何问题并不是解析几何的目的，在教学中不必提高这方

面的要求，以免增加学生负担而影响学习基本内容.

本章内容对高二学生来说是容易掌握的. 在教学中要十分重视培养学生的自学能力，许多公式可以在教师的启发下由学生推导. 由于学生在高一已经学习了三角函数知识，在教学中可适当注意这些知识在直线方程中的应用. 但不要过多地进行综合运用的训练，以免影响学生对基本内容的掌握.

本章教学时间约需 22 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1	有向线段、两点的距离	2 课时
1.2	线段的定比分点	2 课时
1.3	一次函数的图象与直线的方程	1 课时
1.4	直线的倾斜角和斜率	2 课时
1.5	直线方程的几种形式	3 课时
1.6	直线方程的一般形式	2 课时
1.7	两条直线的平行与垂直	2 课时
1.8	两条直线所成的角	2 课时
1.9	两条直线的交点	2 课时
1.10	点到直线的距离	2 课时
小结和复习		2 课时

一　有向线段、定比分点

1.1　有向线段、两点的距离

1. 在平面几何里，对于一条直线，我们只考虑它的位置而不考虑它的方向，但在解析几何中，常常需要考虑直

线与线段的方向．因而我们规定直线都有正方向和负方向．在实际生活和生产中，考虑直线和线段的方向是有它的实际意义的．本章研究的几个重要公式，它们都是在有向线段的基础上推证而得的．有向线段是很重要的基本概念．

2．本节一开始就引进了有向直线、有向线段、有向线段的长度、有向线段的数量等许多概念和符号，应让学生理解它们的含义；弄清它们之间的联系和区别．

有向线段$\overline{AB}$是一个几何图形，记为$\overline{AB}$，读作有向线段AB．$\overline{AB}$和$\overline{BA}$是长度相等，方向相反的两个不同的有向线段．

有向线段$\overline{AB}$的长度是一个正的实数（长度为零的有向线段，以后再研究），即线段AB的长度，记成$|AB|$．有向线段的长度与它的方向无关，即$|AB|=|BA|$．

有向线段$\overline{AB}$的数量是一个正的或负的实数，即有向线段的长度加上一个表示方向的符号，记成AB，读作有向线段$\overline{AB}$的数量．AB和BA互为相反数．即$AB=-BA$．

3．有向线段的数量公式，是分六种不同情况证明的．这里是运用完全归纳法．在教学中应向学生讲清运用这种方法的必要性，要教育学生学会全面考察和分析问题，切忌从一两个片面情况就得出全面的结论．有向线段的数量公式是由法国数学家沙尔（Chasles 1793—1880）首先提出的，所以有的书中称为**沙尔定理**．

4．平面上任意两点的距离公式在初中已经学过，它是解析几何中重要的基本公式．这里作为复习同时又给出证

明，证明部分在理论上比初中有所提高. 两点的距离公式的推导要依靠数轴上两点的距离的求法，因而在推导任意两点间距离公式之前，可以先让学生熟悉下面两种特殊情况：

（1）直线 P_1P_2 平行于 x 轴时，$|P_1P_2|=|x_2-x_1|$；

（2）直线 P_1P_2 平行于 y 轴时，$|P_1P_2|=|y_2-y_1|$.

在此基础上，运用勾股定理就很容易得出平面上任意两点间的距离公式.

5. 对本节所介绍的三个公式，$AB=x_2-x_1$；$|AB|=|x_2-x_1|$；$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，课本中配备了例题和一定数量的练习和习题，教学时，应使学生达到正确理解、熟练掌握的目的.

6. 例 2 是用解析法证明几何问题（三角形中线公式），应向学生讲清以下两点：

（1）用解析法证明几何题时，首先要根据题设条件建立适当的（直角）坐标系.

（2）选定坐标系以后，根据题中所给的条件，设出已知点的坐标，然后根据题设条件及几何性质推出未知点的坐标. 另外，还要注意不能把一般情况定为特殊情况. 如例 2 中点 A 的坐标若定为$(0,a)$，三角形就成为等腰三角形，而失去了一般性.

1.2 线段的定比分点

1. 讲清定比分点的意义，中心是讲清$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$的含义. 这里须注意以下几点：

(1) $\overline{P_1P_2}$是在过两点P_1、P_2的一条有向直线上的有向线段，P_1是起点，P_2是终点.

(2) $\overline{P_1P}$是以P_1为起点，P为终点；$\overline{PP_2}$是以P为起点，P_2为终点. 顺序不能颠倒，否则，λ的值就会随之改变.

(3) $\dfrac{P_1P}{PP_2}$不是线段的长度之比，而是有向线段的数量之比，这个比与过P_1、P_2的有向直线的方向无关.

(4) 在$\dfrac{P_1P}{PP_2}$中，分子是由线段的起点P_1到分点P的有向线段$\overline{P_1P}$的数量，分母是由分点P到终点P_2的有向线段$\overline{PP_2}$的数量. 这一点要特别引起学生注意. 特别是，点P分$\overline{P_1P_2}$所成的比和点P分$\overline{P_2P_1}$所成的比是不同的. 前者是$\dfrac{P_1P}{PP_2}$，后者是$\dfrac{P_2P}{PP_1}$，两者互为倒数.

2. 在求定比分点坐标公式的过程中，关键是要讲清$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{M_1M}{MM_2}$.

(1) 把P_1P、PP_2，M_1M、MM_2看成一般的线段，根据初中几何平行截割定理，得$\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$.

(2) 从有向线段的数量的符号来验证这个比例.

当点P在两点P_1、P_2之间，这时点M也在两点M_1、M_2之间，有向线段P_1P和PP_2都具有相同的方向，它们的数量的符号相同，所以，$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$是正的. 同样，有向线段$M_1M$、$MM_2$也具有相同的方向，它们的数量的符号也相