

刘绪占/著

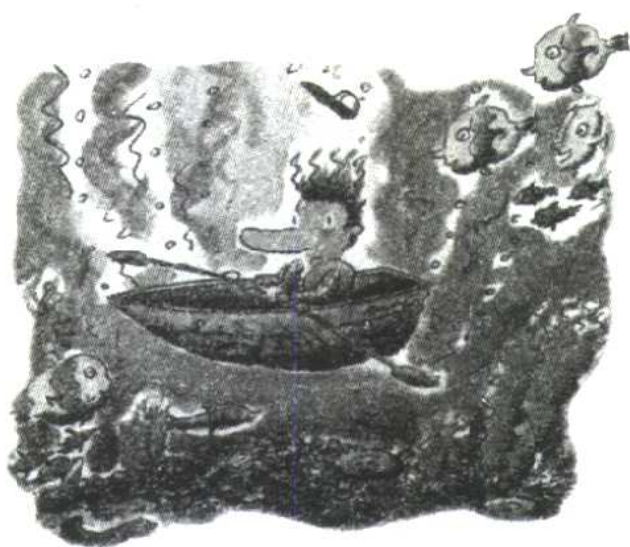


How to Learn Math

怎样学数学

湖北教育出版社

科学的方法=事半功倍



How to Learn Math
怎样学数学

刘绪占/著
湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

怎样学数学/刘绪占编著. —武汉:湖北教育出版社, 2002

ISBN 7 - 5351 - 3240 - 5

I . 怎… II . 刘… III . 数学—学习方法
IV . 01 - 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 017007 号

出 版 : 湖北教育出版社
发 行 :

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 电话:83625580

经 销:新 华 书 店

印 刷:华中理工大学印刷厂

(430074·武汉市洪山区珞瑜路 1037 号)

开 本:787mm × 1092mm 1/48

5.167 印张

版 次:2002 年 6 月第 1 版

2002 年 8 月第 2 次印刷

字 数:132 千字

印数:5 001—10 000

ISBN 7 - 5351 - 3240 - 5/G·2618

定价:7.00 元

如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

编者絮语

最近，湖北教育出版社的同志邀约我写一本《怎样学数学》的课外读物，给中学生及数学学习者谈一谈怎样学数学的问题，我欣然接受了这一邀请。因为我无数次地听到学生和家长向我提出过同一个问题：怎样学数学。

撰写《怎样学数学》，对我是一个督促，促使我坐下来认真地思索这一个无数次要求我回答而又未能给出令人满意的答案的问题，对我也是一个鞭策，促使我总结自己近四十年从事数学教学的经验 and 体会，在我即将退休之际，交上一份较系统、完整的答卷。

要学好数学，与要做好其他任何一件事情一样，要热爱它，要对你做的事情产生兴趣，要有勤奋钻研的精神，这是第一点，本书开篇表述了我的这一观点。

第二，要学好数学，与学习其他任何一门科学知识一样，要打好基础，如同建造房屋要夯实地基一样，基础越深越牢，房屋才能建造得越高。

数学的基础包括：基本概念、数学语言、数学

命题（数学公式、定理、法则等）、基本数学方法、基本数学思想，它们都是继续学习其他课程以及参加生产劳动和实际工作所必备的数学知识与技能，本书在第二、三、四、五、六章分别对上述基本知识、基本方法和基本技能作了阐述，从“是什么，为什么，怎么办”等方面作了详尽的剖析，以利于读者领悟基础，加速掌握。

第三，本书第七章，以较大的篇幅阐述了数学能力。培养数学能力，是中学数学教学大纲中规定的重要教学目的之一。什么是数学能力？有哪些数学能力？如何培养和提高数学能力？本书进行了深入浅出的探讨，对数学的四大能力：运算能力、空间想象能力、思维能力和应用能力的含意、要求、培养方法与途径作了精辟的阐述。

第四，学数学的绝大多数时间花费在解题上，可以说，解题是数学学习的核心。本书第八章是关于数学解题，书中揭示数学解题的思维过程，例说解题的四个环节：审题、探索、表述和回顾，采用“分镜头”、“慢镜头”、“特写”等手段，把思维“暗箱”打开，让一个个成功的解答是如何蕴酿、萌芽、形成、开花和结果的过程暴露在读者面前，并以一道常见题作示范，展现如何审题、如何思索、如何表述、怎样反思，显示了解题的全过程。或许，你在阅读本章以后，能够领略解题的乐趣，品味解题的甘甜。

常常听到学生本人说或者家长讲自己的孩子，

上课都听懂了，为什么考试又总考不好呢？要回答这个问题不难，是因为学生或他们的家长还不了解数学学习的全过程。

我经常在不同的场合讲述一个观点，学习数学有四个阶段：懂——会——熟——活。你上课听懂了，自己动手并不一定会做，俗话说：“看事容易做事难。”由“懂”到“会”，有一个过程，要动手，要实践，才能学会，才能掌握。又有同学说：“平常的作业会做，怎么考试时又不会做了呢？”或者说：“这道题我一出考场就会做了。”这是真实情况。因为平常说的“会做”，往往是模仿性地做，一法一题地学着做，老师课堂上讲什么，课下你就做什么，有法可依，有章可循。而考试则不然，考题一般不指明该题属于什么类型，要用什么方法。考题涉及的知识面广，常常有一定的综合性，需要你对知识和方法的掌握要比较牢固，能举一反三，融会贯通，这是其一；再则，平时作业量少，一个小时做三五道题，而考试则常常要求一个小时做十几道题，平时不熟练，考试就会感觉时间不够。所以，平时训练，不能仅仅满足于“会”，而且要“熟”。尤其是基础的东西，不能只是“懂”和“会”，要立足于“熟”，这是学好的诀窍，熟了，自然就活了，熟能生巧嘛。熟了，才能运用自如，得心应手，左右逢源。其实，这不仅仅是我这么讲，数学名家们也都是这么讲的。请你认真读一读这本书的结束语——名家论谈，你将从中受到极大

的启发。

在撰稿的过程中，参阅了一些资料与专著，在此向有关作者一并致谢。由于本人水平有限，缺点和错误在所难免，不当之处，敬请读者不吝赐教，本人不胜感激。

刘绪占

2002年5月于武汉

目 录

第一章	热爱·兴趣·勤奋	1
第二章	数学概念——数学的源头	16
第三章	符号语言——最简炼的数学语言	28
第四章	公式、定理、法则——解决数学问题的工具	38
第五章	数学方法——数学解题的杠杆	55
第一节	配方法	56
第二节	换元法	60
第三节	待定系数法	66
第四节	数学归纳法	71
第六章	数学思想——数学解题的灵魂	85
第一节	什么是数学思想	85
第二节	几种深层次的数学思想	89
第七章	数学能力——解决问题的才智	131
第一节	运算能力	131
第二节	空间想象能力	150
第三节	思维能力	161
第四节	应用能力	179

第八章 解题——数学的心脏	197
第一节 解题的思维过程	197
第二节 怎样解题	206
结束语——名家论谈	233

第一章 热爱·兴趣·勤奋

数学,是一门古老而年轻的科学.

两千多年前的古希腊人,就创立了以公理化体系为基础的逻辑数学,更早几百年,我国商代商高就发现了勾股数:“勾三、股四、弦五”.

从17世纪开始兴起的变量数学,尤其是19世纪中叶至今的一个半世纪,数学经历了深刻的形象化与抽象化的改造与提炼,业已发展成今天拥有上百个分支的庞大知识体系,它的内容、思想、方法乃至语言都广泛地渗入到社会科学和自然科学的各个领域.

数学原本是有着它的现实原型和广泛应用的科学,但是,在我国传统的教材中,内容的公式化,解题方法的模式化,加上数学方法的机械化忽视了它的现实原型和应用.更由于高考中偏题、难题的负面影响,使学生面对题海难于突围,一些学生对数学学习不感兴趣,甚至厌烦.

一、热爱——学习数学的动力

1990年底,美国及其盟国在实施“沙漠风暴”行动打击伊拉克之前,伊拉克人曾扬言,如遇进攻就要烧掉科威特的油井.为此,美国国防部要求太平洋

——赛拉研究公司研究伊拉克点燃油井后对世界环境的影响. 该公司利用纳维尔——斯托克斯方程和有热损失的能量方程作为计算模型进行计算, 得出结论: 大火的烟雾可能招致一起重大的污染事件, 它将影响到波斯湾, 以至伊朗南部、巴基斯坦和印度北部. 但是, 不会造成全球性气温变化, 也不会对地球生态和经济系统造成无法挽回的损失. 这一判断, 使美国决策人下决心实施“沙漠风暴”行动.

这一实例说明, 数学在现代战争中有着举足轻重的作用. 有人说, 第一次世界大战是“化学战”(火药), 第二次世界大战是“物理战”(机械), 现代战争是“数学战”(信息、计算机).

数学, 以应用的广泛性为其特点之一.

小至日常生活中柴米油盐酱醋茶的买卖、利率、保险、医疗费用的计算, 大至天文地理、环保生态、信息网络、质量控制、管理与预测、大型工程、农业经济均大量存在着运用数学的踪影.

举例来说, 长江三峡枢纽工程是举世瞩目的. 按照设计, 三峡工程水电装机总容量为 1768 万千瓦, 年发电量为 840 亿度, 建成后的三峡大坝, 将是一座高达 200 米、长近 2000 米的混凝土拦江大坝, 简直是一座混凝土的小山. 建造如此宏伟的工程, 要解决无数难题, 其中最重要的问题之一是大体积的混凝土在凝结过程中化学反应产生的热量. 这种巨大的热量将危及大坝的安全. 我国科学家自行研制的可以动态模拟大体积混凝土的施工的溫度、应力和徐变的计算机软件, 可以用来分析、比较各种施工方案, 设计最佳的施工过程控制, 还可以用来对大坝建

成后的运行期进行监控和测算,以保障大坝的安全.在长江三峡大坝的建设中,可以说数学功不可没.

再举一个例子:我国研制原子弹,试验次数仅为西方国家的十分之一,从原子弹爆炸到氢弹研制成功,只花了 2 年零 3 个月,大大低于美国所花的时间,其原因之一是选派了许多优秀数学家参加了研制工作.

1959 年,华罗庚教授精彩地指出:“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,地球之变,生物之谜,日用之繁”无一能离开数学.

还应指出的是,数学的作用,并不仅仅是解决当务之急,常常有这样的情况,数学中一个性质的发现,一个理论的产生带来的效应并不一定立竿见影,有的是几十年、几百年甚至更久远的时候才能找到它的应用.

古希腊人创立的几何体系,是人类理性文明的结晶,在当年谈不上什么用场,可它偏偏成为 2000 多年以后的现代人必备的知识.

16 世纪,意大利数学家卡丹尔把 10 分解为 $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15})$,尽管他自己也认为这样的数“不精致又不中用”,但这是虚数的萌芽.数学家吉拉德支持了卡丹尔的见解,提出“虚数可以作为方程的形式解”.虚数的出世,开始就受到嘲弄和打击,包括一些有名望的数学家的干预:“不可思议”“纯属虚构”.经过 200 多年几代数学家们的艰苦努力,人们才揭开了蒙在虚数头上神秘的面纱,当年被认为是“虚无缥缈”的数,早已成为科学技术中的基本量.

人们在发现了太阳系的第七颗行星——天王星

以后,观察它的运行情况,感觉与理想的不一致,违背了“规律”.天文学家勒维列猜想:这是由于天王星外行星的引力所引起的.他根据引力法则,通过复杂的数学计算,终于推算出在天王星轨道外存在新的行星,根据勒维尔预示的位置,天文工作者终于找到了太阳系第八颗行星——海王星,人们称它为“铅笔尖上的行星”.

20 世纪最伟大的科学家爱因斯坦创立广义相对论的时候,遭遇了一个难题,他无法从理论上解释自己的发现,让他一筹莫展.在友人的提示下,他找到了黎曼几何,解决了这一难题.原来,早在半个世纪以前,德国数学家黎曼凭自己的兴趣,追踪几何内部的矛盾,把对三维空间的研究推广到 n 维空间,革新了几何观念,创立了新的几何——黎曼几何,就像是为爱因斯坦的相对论准备的理论基础.

诺贝尔物理奖获得者温伯格曾感叹:“当一个物理学家得到一个思想时,然后却发现现在他之前数学家已经发现了.”

数学的应用如此广泛、深远!

改革开放以来,我们的祖国发生了翻天覆地的变化,各项事业突飞猛进,人民生活水平大大提高.但是,我们还应看到,与世界经济强国比,我们还差得很远.拿国民生产总值来说,美国一年是 12 万亿美元,而我国只有 1 万亿美元.我们与美国的差距主要还在科学技术.而今,国际上有一种说法:高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础是数学.为了强国,我们绝没有理由不学好数学.

热爱数学吧,它会给你以动力.

二、兴趣——最好的老师

中国古代教育家孔子说过：“知之者不如好之者，好之者不如乐之者。”这表明兴趣是最好的老师。

1617年，一位21岁的法国士兵在荷兰布莱达地区的一块招牌上，看到了一道有趣的带有挑战性的数学问题，他便怀着极大的好奇心钻研起来，并终于解决了这道数学趣题。他因此受到了莫大的鼓舞，坚信自己的数学才华，从此，他与数学结下了不解之缘。这位年轻人就是法国的大数学家笛卡尔。笛卡尔建立了直角坐标系，创立了解析几何，为数学的发展作出了不可磨灭的贡献。

翻开众多科学家的传记，可以发现，不少人的发明与创造，往往与其兴趣和好奇分不开。

“哥尼斯堡七桥问题”，引起了18世纪享有盛名的伟大数学家欧拉的兴趣，他绝妙地解决了千万人解决不了的难题，并在此基础上，开创了一门新的数学分支——拓扑学。

我国著名数学家陈景润，由于受他的中学数学老师所讲述的“哥德巴赫猜想”这一难题的诱惑，以惊人的毅力，花费了20多年的时间钻研数论，到达了当今摘取数学皇冠上这颗美丽灿烂明珠的最前沿。

说起美，人们马上会想到描绘人和自然的图画美，令人陶醉的音乐美，雄伟壮丽的建筑美，但对数学的美，并不为大多数人所了解。

美国数学家克莱因说：“哪里有数学，哪里就有

美”，这话一点也不过分。

人们用最美的词句赞美数学：“自然科学的皇后”“皇冠”“明珠”“稀世珍宝”“巍峨的阶梯”“金碧辉煌的宫殿”“人造宇宙”“无限真与美的王国”等，这些一点也不夸张。

概括地说，数学的美表现在它的简捷和明快，统一又和谐，对称且严谨，奇异而抽象。

1. 简捷美

音乐家用 1、2、3、4、5、6、7 这七个音符谱写旋律优美的乐章，数学家用 0, 1, 2, …, 9 这十个阿拉伯数字编织了无限数的空间，用点、线、面这三种基本元素构筑了美丽的形的大厦，规定用最简单的工具——圆规和无刻度的直尺作出了无数复杂的图形，对人类的智慧提出挑战。

古希腊毕达哥拉斯学派认为“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形”。这个观点有一定的道理：

除了直线，圆是最简单的图形；

圆有着全方位的对称性；

圆的近亲是直线，因为它们有着相同的性格，直线是构成直线形的基本材料，而圆是产生椭圆、双曲线、抛物线和其他一些曲线之母，直线有着“最近”的属性，而圆具备相同面积的区域的最短边界。

圆的周长 C 与直径 D 之比是常数 π ，这种关系可简明地表示为 $C = \pi D$ ，其面积 S 与半径 r 的关系为 $S = \pi r^2$ ，如此简朴。

但圆有着它倔强的个性：无论怎样割补，总也不

能拼成正方形.

球具有和圆类似的特征.

形式十分简单的二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$, 体现着世间许多事物的共同关系: 圆的面积公式 $S = \pi r^2$; 自由落体运动 $s = \frac{1}{2}gt^2$; 爱因斯坦的质能公式 $E = mc^2$, 它的曲线既可描绘投掷物体的路径, 又可刻划天体运动的轨道……诸多事物的共性汇聚于这么一个简单的函数关系式之中, 难道有什么比数学更简捷, 更完美的吗?

2. 统一美

人类社会错综复杂, 自然界千奇百怪, 但数学能从深层次去揭示其内在联系与本质特征.

三角形内角和为 180° , 多边形外角和为 360° , 直角三角形三边长满足勾股定理, n 次方程都有 n 个根.

“勾三股四弦五”是“勾股数组”的一颗晶莹透亮的明珠, “勾股数组”又是勾股定理的特例, 而勾股定理又被余弦定理所包含.

自然数——整数——有理数——实数——复数, 在数的家族不断扩大的进程中, 既统一又和谐, 层次清楚, 关系严谨.

初中数学中的正比例函数 $y = x$, 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$, 二次函数 $y = x^2$ 等, 原来都是幂函数 $y = x^a$ 的子民.

圆锥曲线是继圆以后人们最早认识的一类曲线, 对它的研究已有 2000 多年的历史了, 它的内容

虽然古老,但对近代和现代数学有着深刻的影响.

椭圆(含圆)、抛物线、双曲线都是平面与圆锥曲面的交线,其名称因此而获得;

在直角坐标系中,圆锥曲线的方程都是二次的;

它们的形态各异,但有着统一的定义:到一定点与一定直线距离之比 e 等于正常数的点的轨迹,并有着严格的界限,不可逾越:

$0 < e < 1$ 时,曲线是椭圆,

$e = 1$ 时,曲线是抛物线,

$e > 1$ 时,曲线是双曲线;

在极坐标系中,圆锥曲线有着统一而简捷的方

程 $\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$;

更奇妙的是,宇宙的天体运动、人造卫星以及宇宙飞船的运行轨道,都是这四种曲线之一.

虽然,它们有着不同之处:椭圆和双曲线有两个焦点(圆的两个焦点视为重合),抛物线只有一个焦点,但是如果固定椭圆和双曲线的一个焦点和相应的顶点,让另一焦点无限远离,那么,它们会各自逼近抛物线.于是,我们有理由认为:抛物线也有两个焦点,第二个焦点在无穷远处.

3. 对称美

圆、等腰三角形、正方形、五角星都是对称图形,它们都有对称轴,有的还成中心对称.

正多面体、正棱锥、圆柱、圆锥、圆台、球都具有对称性.

对称图形给人以庄重美,我国的古代建筑大多有对称的风格:宏伟的天安门,庄严的人民大会堂,