21世纪 高等学校本科系列教材

高等数学(上)

(1)

陈克东 主编

重庆大学出版社

高 等 数 学(上)

陈克东 主编

重 庆 大 学 出 版 社

内容简介

本书根据原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》编写，是面向21世纪课程教材.

本书以“数学素质是数学教学的灵魂”为指导思想，努力突出微积分学的基本思想和基本方法，在知识、能力、素质的三维空间中构建其教学内容体系.同时，渗透现代数学的思想、概念、方法，为现代数学初步提供内容展示的“窗口”和延伸发展的“接口”.还选用了不少颇具吸引力的典型实例，以拓展数学应用的思维空间.从而使学生在总体上把握微积分学的知识框架和思想方法，以利于提高学生的数学素质与创新能力.

本书共10章，分上、下两册.第1章至第5章为上册，内容包括一元微积分学与常微分方程.第6章至第10章为下册，内容包括空间解析几何、多元微积分学与无穷级数.本书还引进了当今世界上最为流行的MATHEMATICA软件，提供了9个紧密结合相关内容的数学实验（上册5个，下册4个），使微积分学与计算机应用有机结合.

本书体系科学，结构严谨，深度适宜，逻辑性强，表述准确，文字清晰.可作为普通高等学校工科类本科各专业和其他非数学类本科专业的教材或教学参考书，也可供工程技术人员、报考研究生的读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/陈克东主编.—重庆：重庆大学出版社，2001.7

计算机科学与技术本科系列教材

ISBN 7-5624-2304-0

Ⅰ.高... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第25009号

高等数学(上)

陈克东 主编

责任编辑 谭 敏

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:19.25 字数:480千

2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷

印数:1—6 000

ISBN 7-5624-2304-0/O·190 定价:50.00元(上、下册)(每册定价:25.00元)

前　言

数学是科学之王.

——Gauss

数学分析与自然界本身同样广阔.

——Fourier

当今世界,知识经济已初露端倪;当今中国,科教兴国正方兴未艾.

数学是思维的体操,数学技术是高新技术的本质,数学语言是科学的基本语言,数学计算是科学研究的主要手段之一.马克思曾精辟地指出:"一门科学只有在成功地应用数学时,才算达到真正完善的地步".当人类进入21世纪的时候,数学水平已经成为衡量一个国家、一个民族科技文化素质、社会进步程度和发展潜力的重要标志.

众所周知,微积分学是工科类高等学校的一门极为重要的基础课,其教学过程连续时间之长,教学时数之多,是其他任何一门课程所无法比拟的;因而,微积分学在人才培养中的地位和作用,也是不言而喻的.

本书是面向21世纪微积分学课程教材,按照教育部《面向21世纪高等工程教育教学内容课程改革计划》的总体要求,根据原国家教委颁布的工科本科《高等数学课程教学基本要求》编写.在编写过程中,我们力求以"数学素质是数学教学的灵魂"作为本书的指导思想,努力突出微积分学的基本思想和基本方法,在知识、能力、素质的三维空间构建本课程的教学内容体系,使学生从总体上把握微积分学的知识框架和思想方法,从而培育学生的思维能力、应用能力、自学能力和创新能力,提高学生的数学素质.

本书在认真吸取国内多种版本同类教材优点的基础上,努力追求课程内容体系的整体优化:删除了一些与中学重复的内容,精简了某些陈旧的东西,压缩了不少"理科化"的定理证明,适当调整了对解题的某些特殊技巧训练的要求,简化了一些公式的推导,注重了对一些概念"离散化"的描述……;同时,十分注意渗透现代数学的思想、概念、语言、方法及符号,初步介绍了数学建模的内容与方法,引进了当今世界上极为流行的MATHEMATICA软件,提供了一些紧密结合相关内容的数学实验……,从而为现代数学初步提供内容展示的"窗口"和延伸发展的"接口",初步尝试将微积分学与计算机应用相结合.这一切探索,将有利于调动学生学习本课程的

主动性和积极性,进而推进教学思想、教学内容、教学方法以及教学手段的改革.

还要指出,掌握微积分学精髓的有效途径之一是学会运用其思想、理论、方法解决实际问题. 为此,本书对一些重要概念,试图按照数学发展史的本来面目,介绍其客观的实际背景;对一些重要结论,将提供应用实例,其范围也从传统的几何学与物理学的范畴,扩展到工程技术、生物学、经济学、人口学等学科领域,以拓宽数学应用的思维空间.

为了适应不同学校、不同专业学生的不同水平的要求,在例题和习题的遴选上也做了许多工作. 选用了不少颇具吸引力的典型问题作为例题;同时配置了足够数量的各种类型的习题. 除每章按节给出了满足教学基本要求的习题外,各章后面还配备了具有一定难度的或综合性的总习题. 安排两类习题的目的,一是为了便于各校教师从中选择合适的题目供教学使用,二是便于读者选用相关题目进行自我检查,从而对学习效果作出客观、真实的评价.

在国内工科数学界,习惯于将微积分学称为高等数学。因此,本书亦沿用常规称谓:高等数学。

本书共10章,分上、下两册. 第1章至第5章为上册,第6章至第10章为下册. 上册还包括MATHEMATICA软件简介及5个数学实验,下册还包括4个数学实验. 全书讲授时间为180学时左右.

本书由陈克东任主编,吴新生、鲁家琳任副主编. 预备知识、第5章、第10章由陈克东编写,第1章、第2章、微积分学实验由黄文韬编写,第3章、第4章由曾玲编写,第6章、第7章由鲁家琳编写,第8章、第9章由吴新生、白任伦编写. 全书由陈克东统编、修正、定稿.

本书在编写过程中,陈澍、陈怡茜、黄文武、黄柳诸位同志给予了热情帮助. 对此,表示真挚的感谢.

诚然,本书只是一家之言. 由于微积分学是一门经典基础理论课,该课程改革的难度很大,因而其教材的编写难度也很大,需要全国同仁们不断地探索,不断地实践,不断地完善,决不可能一蹴而就. 限于编者的水平,加以在较短时期内成章,不足之处在所难免. 我们殷切地欢迎专家、同行以及读者们批评、指正.

陈克东

2001年3月

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

目录

数学就是这样一种东西:她提醒你有无形的灵魂,她赋予她所发现的真理以生命;她唤起心神,澄净智慧;她给我们的内心思想添辉;她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

——Proclus

预备知识

0.1 集　　合

0.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个最基本的概念,是现代数学的理论基础.关于"集合",没有一个严谨的数学定义,只是有一个描述性的说明.在我国出版的第一本集合论著作——肖文灿的《集合论初步》中,描述了集合论创始人康托尔对集合的刻画:"吾人直观或思维之对象,如为相异而确定之物,其总括之全体即谓之集合,其组成此集合之物谓之集合之元素."这就是说,数学中把所考察的具有确定性质的对象所组成的总体称为集合,集合简称集.组成集合的每一个对象称为该集合的元素,简称元.

通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示集合的元素.如果 a 是集合 A 的元素,就称 a 属于 A,记为 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就称 a 不属于 A,记为 $a\notin A$.由有限个元素组成的集合称为有限集,由无限个元素组成的集合称为无限集.一个无限集,如果其元素可以用自然数编号进行排序,就称之为可数(可列)无限集;否则就是不可数无限集.

本书对常用的各种集合均采用习惯的记号,即全体实数的集合记为 R;全体正整数集即自然数的集合记为 N,即

$$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记为 Z,即

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记为 Q,即

$$Q=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in Z,q\in Z^{*},\text{且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$$

全体复数的集合记为 C,即

$$C=\{a+bi\mid a,b\in R,i^{2}=-1\}$$

同样,在某个集合的字母的右上方添加"*","+","-"等上标,表示该集合的特定子

集. 以实数集 R 为例, R^* 表示排除了数 0 的实数集; R^+ 表示全体正实数集; R^- 表示全体负实数集.

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,或称集合 A 包含于集合 B,或称集合 B 包含集合 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

不含有任何元素的集合称为空集,记为 ϕ. 空集在研究集合运算和集合之间的相互关系时,有其逻辑上的意义. 例如集合 $\{x|x\in R, x^2+1=0\}$,就是一个空集. 规定空集是任何集合的子集.

集合一般有两种表示法,其一是列举法,即把表示它的全体元素一一列举在一个大括号内,如自然数集 N 可表示为 $N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 这种表示法仅适用于有限集或可数无限集. 其二是描述法,即指出某集合中元素所具有的确定性质,一般形式为:

$$X=\{x|x\text{ 具有确定性质 }p\}$$

如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,就称集合 A 与集合 B 是相等的,记为 $A=B$.

0.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

记 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素所组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集,记为 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\notin B\}$$

本书把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集,记为 I. 特别地,把差 $I\backslash A$ 称为 A 的补集或余集,记为 A^C.

集合的运算,可用文氏图(图 0.1)形象地表示.

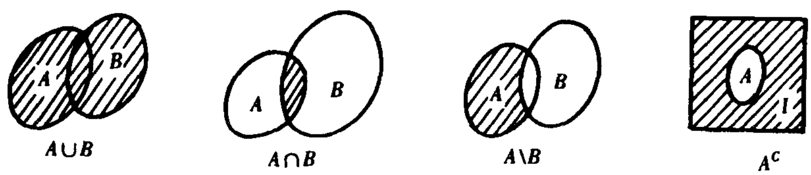

图 0.1

集合的并、交、余运算具有以下性质:

1) 交换律: $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$

2) 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

3) 分配律: $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

4) 等幂律: $A\cup A=A, A\cap A=A$

5) 互补律：$A\cup A^C=I,A\cap A^C=\phi$

6) 吸收律：$A\cup(A\cap B)=A,A\cap(A\cup B)=A$

7) 对偶律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

上述运算性质容易根据集合相等的定义予以验证.

0.1.3 集族、直积

以集合为元素的集合称为集族. 特别地，由非空集合 A 的所有子集为元素组成的集合是一个集族，称为 A 的幂集，记为 $P(A)$ 或 2^A. 易知非空集合 A，其幂集 $P(A)$ 有 2^n 个不同的元素. 例如：

若集 $A=\{a,b,c\}$，则其幂集为：

$P(A)=\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

显然，它的元素是 $2^3=8$ 个.

设有两个非空集合 A,B. 若 $a\in A,b\in B$，则由 a,b 组成的一个有序数对——简称为序偶，记为 (a,b)，称为 A、B 的笛卡尔乘积，或称为直积. 它是由序偶组成的集合，其定义为：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

特别地，$R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$，在几何上，它表示 xoy 平面上所有点的集合，$R\times R$ 可简记为 R^2.

类似地，有限个非空集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡尔积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

0.1.4 区间和邻域

区间和邻域是常用的两类实数集.

设 a,b 都是实数，且 $a<b$，实数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$. a,b 称为区间的端点，它们均不属于 (a,b). 类似地，可定义 a,b 为端点的闭区间，半开(闭)区间等. 它们的记号和定义是：

闭区间 $[a,b]$，$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$

半开区间 $(a,b]$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$

半开区间 $[a,b)$，$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$

上述这些区间都称为有限区间. 类似地，可定义无限区间. 它们的记号和定义是：

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid x\geqslant a\}$

$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}=\{x\mid x<b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\{x\mid x\in R\}$

邻域是微积分学中常用的一种集合. 设 a、δ 是实数，且 $\delta>0$. 点 a 的 δ 邻域记为 $U(a,\delta)$，它就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$. 这里，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径(图 0.2(a)). 记号 $\hat{U}(a,\delta)$ 称为点 a 的去心 δ 邻域，它就是开区间 $(a-\delta,a)$ 与 $(a,a+\delta)$ 的并集(图 0.2(b)). 本书分别把 $(a-\delta,a)$ 与 $(a,a+\delta)$ 分别称为 a 的去心左 δ 邻域与 a 的去心右 δ 邻域.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

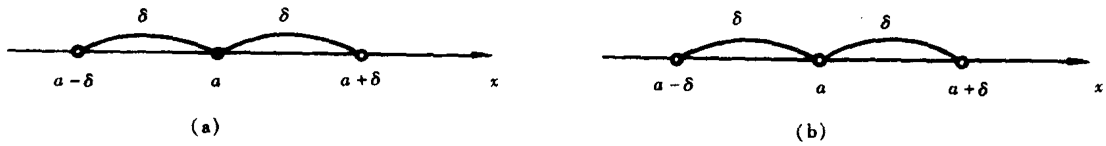

图0.2

0.2 实 数 系

微积分学是在实数系——即实数集 R 中研究问题的,因此,本书将对实数系作一些必要的介绍.

为了叙述与应用的方便,引入两个常用的逻辑运算符号:符号"$\exists$",称为存在量词,表示"存在"或"找到"或"至少存在一个";符号"$\forall$",称为全称量词,表示"对任意的"或"对所有的"或"对每一个".

诚然,还有其他一些逻辑运算符号,如"$\wedge$","$\vee$","$\rightarrow$"等等,这里就不一一介绍了.

0.2.1 实数系的完备性

微积分学中的许多基本概念和理论与实数系的完备性是密切联系的.回顾数学发展的历史,不难发现,推动数系扩展的一个原因是数系运算.自然数集 N 对加法和乘法两类运算是封闭的,就是说两个自然数相加或相乘仍然是自然数;但对减法—加法的逆运算却不是封闭的,如 $3+x=1$ 在自然数系中则是无解的.为此,就将自然数系 N 扩充为整数系 Z.完全类似,整数系 Z 对除法—乘法的逆运算又不是封闭的,如 $5x=3$ 在整数系中是无解的.为此,又将整数系 Z 扩充为有理数系 Q.同样,有理数系 Q 对开方—乘方的逆运算又是不封闭的,如 $x^2=2$ 在有理数系中是无解的.于是产生了无理数,这样就将有理数系 Q 扩充为实数系 R.

在实数轴上,自然数系和整数系中的相邻两个数都可以用间距为单位长的点加以表示,这种点称为整数点,它们是一系列的离散点,这种特性称为自然数系和整数系的离散性.一个有理数也可以用实数轴上的一个点来表示,这种点称为有理点.任意两个不同的有理点 r_1 和 r_2 之间,一定有另一个有理点 $r_3=\frac{r_1+r_2}{2}$.由此可知,任意两个不同的有理点之间必有无穷多个有理点,也就是说,任意两个不同的有理数之间一定有无穷多个有理数,这个特性称为有理数系的稠密性.应当看到,所有有理点并没有"填满"整个数轴,还存在空隙.比如,还有与原点 o 的间距为 $\sqrt{2}$、e、$\sqrt{3}$、π 等这样一类无理点存在.只有有理点和无理点的全体,也就是说只有全体实数才能连续地充满整个数轴,这个特性就称为实数系的完备性.

0.2.2 上界、下界

设 A 为非空数集,若 $\exists M\in R$, $\forall x\in A$,都有 $x\leqslant M$,就称集 A 是有上界的,其上界为 M;同样,若 $\exists m\in R$, $\forall x\in A$,都有 $x\geqslant m$,就称集 A 是有下界的,其下界为 m.一个既有下界 m 又有上界 M 的集 A,称为有界集;否则称为无界集.

易见,有界集 A 的下界或上界都不是惟一的. 例如,$A=\left\{x \mid x=\sin t,0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$,它是一个有界集,$m=0$ 是 A 的一个下界,$M=1$ 是它的一个上界. 不难发现,任何小于 0 的实数都是 A 的下界,而任何大于 1 的实数都是 A 的上界.

0.2.3 上确界、下确界

读者一定会提出这样的问题:有上界的数集是否必存在一个最小的上界;同样,有下界的数集是否必存在一个最大的下界. 下面,就介绍上、下确界的概念.

设 E 是一非空数集,s_1 是 E 的一个上界. 若 $\forall\varepsilon>0$,总有 $x_1\in E$,使得 $x_1>s_1-\varepsilon$,则称 s_1 是 E 的上确界,记为 $\sup E$,即 $\sup E=s_1$;同样地,s_2 是 E 的一个下界,若 $\forall\varepsilon>0$,总有 $x_2\in E$,使得 $x_2<s_2+\varepsilon$,则称 s_2 是 E 的下确界,记为 $\inf E$,即 $\inf E=s_2$.

必须强调指出,非空数集 E 的上确界 s_1 或下确界 s_2 不一定属于 E. 比如,数集 $A=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{2n+1},\cdots\right\}$,它是一个有界集,其上确界 $\sup A=1\in A$,但其下确界 $\inf A=0\notin A$.

可以证明,若数集有上(下)确界,则上(下)确界必惟一. 事实上,任意一个有上(下)界的实数集 R 的非空子集 E 必有上(下)确界,这就是所谓的确界公理.

这里有两点提法请读者注意:其一,实数系 R 的确界公理是实数系的本质属性,它是由实数系的完备性所规定的;其二,确界公理在有理数集 Q 中不成立. 例如,由$\sqrt{2}$的不足近似值构成的有理数集 $B=\{1,1.4,1.41,1.414,\cdots\}$,它的上确界为无理数$\sqrt{2}$,它在有理数集 Q 内没有上确界,所以有理数集是不完备的.

关于实数的基本理论,还有子列,区间套,致密性等概念,限于篇幅,这里就不一一介绍了. 有兴趣的读者,可参看数学分析中的相关内容.

0.3 映　　射

0.3.1 映射的概念

映射是现代数学中的一个基本概念.

映射是两个集合元素之间通过某种法则建立起来的对应关系. 设 X 和 Y 是两个非空集合,如果存在某种法则 F,使得对于 X 中的每个元素 x,按照法则 F,在 Y 中都有惟一元素 y 与之对应,则称 F 为从 X 到 Y 的一个映射,记为

$$F:X\rightarrow Y \quad 或\ X\xrightarrow{F}Y$$

元素 y 称为元素 x 在映射 F 下的像,记为 $y=F(x)$,而元素 x 称为元素 y 在映射 F 下的原像. X 称为映射 F 的定义域,记为 $D(F)$. 映射 F 的所有像组成的集合称为映射 F 的值域,记为 $R(F)$,即

$$R(F)=F(X)=\{F(x)\mid x\in X\}$$

关于映射的概念,应注意以下几点:

(1)构成映射的要素是非空集合 X 和 Y,以及对应的法则 F. 它们用什么字母来表示是无

妨的. 若有两个映射 F、T,它们有相同的定义域 X,且对每一个 $x\in X$,在映射 F、T 下的像 $F(x)$、$T(x)$ 都相同,则称这两个映射相等,记为 $F=T$.

(2)X 中的每个元素 x 在映射 F 下的像都是惟一的,但对每个 $y\in R(F)\subseteq Y$,在映射 F 下的原像不一定是惟一的.

(3)记号"F"与"$F(x)$"的含义是不同的. F 表示由 $x\in X$ 产生 $y\in Y$ 的对应法则,而 $F(x)$ 则表示 x 在映射 F 下的像 y,即 $F(x)=y$.

在数学的各个不同学科分支中,术语"映射"在不同情况下,常常赋予不同的惯用名称——"函数","变换","算子","泛函"等. 例如,若 X 是一个非空集合,Y 是一个数集,那么从 X 到 Y 的"映射"通常就称为定义在 X 上的"函数".

0.3.2 单射 满射 一一映射

这里,介绍几类常用的映射.

设 X,Y 是两个非空集合,映射为 $F: X\to Y$.

(1)单射. 若对 X 的任意不同的元素 $x_1\neq x_2$,在映射 F 下,Y 中必有不同的像 $F(x_1)\neq F(x_2)$,则称映射 F 是从 X 到 Y 的单射.

(2)满射. 若 Y 中的任意一个元素都是 X 中的某元素的像,即 $R(F)=Y$,则称映射 F 是从 X 到 Y 的满射.

(3)一一映射. 若 F 既是单射又是满射,则称映称 F 是从 X 到 Y 的一一映射,或称 F 是 X 与 Y 之间的一一对应.

例 1 设 $X_1=(-\infty,+\infty)$,$X_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$,$Y_1=(-\infty,+\infty)$,$Y_2=[-1,1]$. 考虑映射 $f_1:X_1\to Y_1$,$f_2:X_2\to Y_1$,$f_3:X_1\to Y_2$,$f_4:X_2\to Y_2$,其中 $f_i(i=1,2,3,4)$ 均为如下的对应法则:对定义域内的任一 x,$f_i(x)=\sin x$.

不难得出,f_1 是从 X_1 到 Y_1 的映射,但它既非单射,又非满射;f_2 是从 X_2 到 Y_1 的单射,但非满射;f_3 是从 X_1 到 Y_2 的满射,但非单射;f_4 既是从 X_2 到 Y_2 的单射,又是从 X_2 到 Y_2 的满射,即为 X_2 到 Y_2 的一一映射.

0.3.3 逆映射 复合映射

逆映射. 设映射 F 是从 X 到 Y 的一一映射. 于是对每一个 $y\in Y$,都有惟一的 $x\in X$ 满足 $F(x)=y$,这样就得到一个从 Y 到 X 的映射,称这个映射是 F 的逆映射,记为 F^{-1}. 也就是说,F^{-1} 是从 Y 到 X 的一个映射,即 $\forall y\in Y$,若有 $F(x)=y$,则有 $F^{-1}(y)=x$.

特别指出,只有一一映射才存在逆映射. 在微积分学中,通常把一一映射称为可逆映射. 在例 1 的四个映射中,只有一一映射 f_4 才存在逆映射 f_4^{-1}. 事实上,f_4^{-1} 就是大家熟悉的反正弦函数的主值,即 $f_4^{-1}(y)=\arcsin y$,其定义域为 $Y_2=[-1,1]$,值域为 $X_2=\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 习惯上,又把 $f_4^{-1}(y)=\arcsin y$ 改记为 $f_4^{-1}(x)=\arcsin x$,显然,其定义域仍为 $[-1,1]$,值域仍为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

复合映射. 设有两个映射:$F_1:X\to Y_1$,$F_2:Y_2\to Z$,其中 $Y_2\supset Y_1$. 由 F_1 和 F_2 可以确定从 X 到

Z 的一个对应法则,它将 X 中的每一个元素 x 映射为 Z 中的元素 $z=F_2[F_1(x)]$. 我们把这个从 X 到 Z 的映射,称为是由 F_1、F_2 构成的复合映射,记为 $F_2\circ F_1$,即

$$F_2\circ F_1:X\to Z,\forall x\in X,(F_2\circ F_1)(x)=F_2[F_1(x)]$$

上述复合映射的概念,可以推广到由有限多个映射构成的复合映射的情形. 复合映射满足结合律,即:$(F\circ T)\circ S=F\circ(T\circ S)$;但复合映射不满足交换律,即:$F\circ T\neq T\circ F$.

例 2 设 $X=(-\infty,+\infty)$,$U_1=(-\infty,+\infty)$,$U_2=(-\infty,+\infty)$,$Y=[-1,1]$. 考虑映射 $F_1:X\to U_1,u=F_1(x)=x^3$ 和映射 $F_2:U_2\to Y,y=F_2(u)=\sin u$. 则可构成复合映射 $F_2\circ F_1:X\to Y,\forall x\in X$,有

$$(F_2\circ F_1)(x)=F_2[F_1(x)]=F_2(x^3)=\sin x^3$$

这里 $U_1=U_2$.

0.4 一元函数

0.4.1 函数 分段函数

函数就是一类从非空集到实数集的映射. 设数集 $D\subset R$,则从 D 到 R 的任一映射 f,称为定义在数集 D 上的一元函数,简称为函数,记为 $y=f(x),x\in D$. 称变量 x 为函数的自变量,称变量 $y\in f(D)$ 为函数的因变量,称 $R\times R$ 中的集合 $\{(x,y)\mid x\in D,y=f(x)\}$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形.

对应法则和定义域是确定函数的两个基本要素. 当两个函数 f,φ 有相同的定义域 X,且对每一个 $x\in X$,对应的两个函数值 $f(x)$,$\varphi(x)$ 都相等时,这两个函数 $f(x)$,$\varphi(x)$ 是相同的,即 $f(x)=\varphi(x)$. 因此,在研究同一问题时,不同的函数,必须用不同的记号来表示,以示相互之间的区别. 例如

函数 $f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$,是两个相同的函数,因为函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 既有相同的定义域,又有相同的对应法则;

而函数 $\varphi(x)=\sec^2x-\tan^2x$ 与 $g(x)=1$,是两个不同的函数,这是因为函数 $\varphi(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同.

常用的函数表示法有图形表示法、列表表示法和解析表示法(即公式表示法)三种. 在微积分学中,如不作特别说明,一般只研究前述的单值函数;如果碰到多值函数时,我们将补充某个条件,研究其中的某个单值分支. 这些都是读者已熟悉的内容,本节就不再详细说明了.

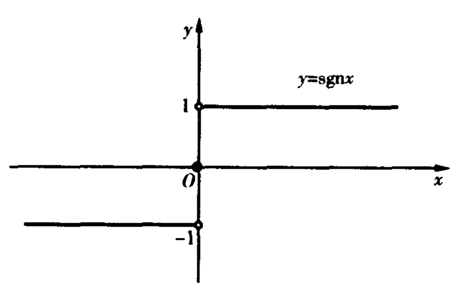

图 0.3

然而,在微积分学中,将经常碰到一类称之为"分段函数"的函数. 所谓分段函数是这样一类函数,它们在定义域的不同子集上可用不同的解析式进行表示,例如:

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{当 } x>0\\ 0, & \text{当 } x=0\\ -1, & \text{当 } x<0\end{cases}$$

定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\{-1,0,1\}$. 它的图形如图 0.3 所示. 图中的实点表示函数在该点有函数值,空心圆圈表示在该点无函数值.

例 4 取整函数

$$y=[x]$$

定义为"不超过 x 的最大整数". 例如:$[+3.2]=3$, $[-3.2]=-4$, $[\sqrt{2}]=1$, $[-\sqrt{2}]=-2$, $\left[\frac{3}{5}\right]=0$, $[-1]=-1$,等.

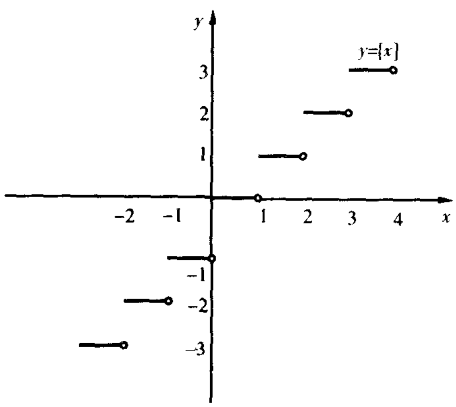

图 0.4

$y=[x]$的定义域是 R,值域是 Z,它的图形如图0.4所示.

在自然科学技术和日常生活中,经常会碰到分段函数. 下面就是一个实际例子.

例 5 旅客乘坐火车,随身携带的物品重量不得超过 20kg. 超过 20kg 部分每千克收费0.20 元,而超过 50kg 部分,每千克再加收 50%,试确定收费与物品重量之间的函数关系.

解 设物品重量为 $x$kg,收费为 y 元. 据题意,收费与物品重量之间的函数关系分段给出:

$$y=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ 0.2(x-20), & 20<x\leqslant 50\\ 0.2(50-20)+0.3(x-50), & x>50\end{cases}$$

注意,分段函数是一个分段表示的函数,不要误认为它是几个不同的函数.

0.4.2 函数的几个特性

在研究函数时,常常会发现所讨论的某个函数具有某个或某些特性. 这里,介绍函数的四个特性.

(1)有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\in D$. 如果有正数 M,使对于任一数 $x\in X$,都满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

就称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

反之,若对于任意给定的正数 M,总有某个 $x_1\in X$,使得 $|f(x_1)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

容易知道,若 $f(x)$ 在 X 上有界,则它在 X 上既有下界也有上界;反之,若 $f(x)$ 在 X 上既有下界 M_1,也有上界 M_2,则它在 X 上必有界,其界为数 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$. 同时,也容易知道,若 $f(x)$ 在 X 上有界,则其界不惟一. 比如,若 $x\in X$, $|f(x)|<M$,则 $M+1, M+2,\cdots$,都是函数 $f(x)$ 在 X 上的界.

注意,所谓函数 $f(x)$ 有界,一定要指出 x 的某个变化范围及一个正数 M. 例如,当

$x \in [1, +\infty)$时，函数$y=\frac{1}{x}$有界，因为$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$；当$x \in (0,1)$时，函数$y=\frac{1}{x}$无界，因为此时正数$M$不存在.

(2)单调性

设函数$f(x)$的定义域是D,区间$(a,b) \subset D$,对任意两点$x_1, x_2 \in (a,b)$,如果当$x_1 < x_2$时，总有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

就称函数$f(x)$在区间(a,b)内是单调增加的；如果当$x_1 < x_2$时，总有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

就称函数$f(x)$在区间(a,b)内是单调减少的.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称.如果对于任意的$x \in D$(从而必有$-x \in D$),总有

$$f(-x) = f(x)$$

就称函数$f(x)$是偶函数；如果对任意的$x \in D$,总有

$$f(-x) = -f(x)$$

就称函数$f(x)$是奇函数.

容易知道，偶函数的图形关于y轴对称；奇函数的图形关于原点对称.

(4)周期性

设函数$f(x)$的定义域是D,如果存在正数T,使得对一切$x \in D$,有$x+T \in D$,且总有

$$f(x+T) = f(x)$$

就称函数$f(x)$是周期函数.T称为$f(x)$的周期，通常说的周期是指最小的正周期.

例如，$y=\sin x$, $y=\cos x$是以2π为周期的周期函数；$y=\tan x$, $y=\cot x$是以π为周期的周期函数.周期函数在其定义域的每个长度为T的区间内具有相同的图形.因此，只要作出一个周期内的图形，将其沿x轴的正负两个方向平移，就可得到函数在整个定义域内的图形.

例6 狄里赫勒函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, 当 x 为有理数 \\ 0, 当 x 为无理数 \end{cases}$$

是周期函数，任何有理数都是它的周期；然而它没有最小的正周期.同时，$D(x)$的图形是无法绘出的.这就是一个非常特殊的函数.

0.4.3 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域是D_1,函数$u=g(x)$的定义域是D,值域是W.如果$D_1 \cap W \neq \phi$,则称函数

$$y = f[g(x)]$$

是由函数$u=g(x)$与$y=f(u)$构成的复合函数.x称为自变量，y称为函数，u称为中间变量.事实上，复合函数是一类特殊的复合映射.因为如果把复合映射定义中的集合X、Y、Z设定为实数集，就可得到上述定义.

注意，并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数.例如，$y=\arcsin u$与$u=2+x^2$就

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com