高等学校教学用书

高等数学

·下册·

（化、生、地专业用）

王存喜　宣体佐　编

北京师范大学出版社

高等学校教学用书

高　等　数　学

下　册

（化、生、地专业用书）

王存喜　宣体佐　编

北京师范大学出版社

高 等 数 学

下 册

（化、生、地专业用书）

王存喜 宣体佐 编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

中国科学院印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32 印张：14.75 字数：365千

1990年7月第1版 1990年8月第1次印刷

印数：1—5 000

ISBN 7-303-00872-1/O·130

定价：3.55元

目　　录

第七章 级　　数

级数是高等数学课程的一个重要组成部分，它是表示函数、研究函数的性质以及进行数值近似计算的一种有力工具.

本章首先介绍常数项级数，然后介绍一类最重要的函数项级数——幂级数.

§7.1 级数的概念及性质

一、级数的概念

人们在认识客观事物的数量特征时，常常会遇到由有限到无限多个数量相加的问题.例如，人们最初在计算圆的面积时并不知道圆的面积公式 πR^2，而只是用圆内接正多边形的面积去近似它.

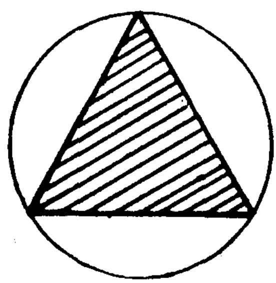

图 7.1

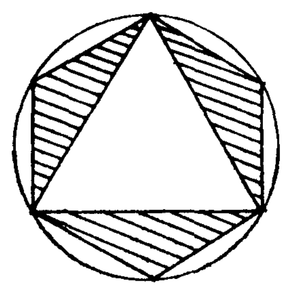

图 7.2

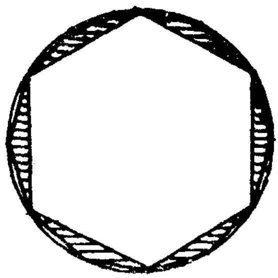

图 7.3

在半径为R的圆内作一个正三角形，其面积为 u_1（图 7.1 中的阴影部分），我们可用 u_1 作为圆面积的第一个近似值. 又以所得正三角形各边为底，作顶点在圆周上的等腰三角形，其面积为 u_2（图 7.2 中的阴影部分），我们可用 u_1+u_2 作为圆面积的第二个近似值. 再以所得正六边形各边为底，作顶点在圆周上的等腰三角形，其面积为 u_3（图 7.3 中的阴影部分），我们可用 $u_1+u_2+u_3$ 作为圆面积的第三个近似值. 这样继续下去，我们可以得到圆面积的第 n 个近似值 $u_1+u_2+\cdots+u_n$.

用 S_n 表示圆面积的第 n 个近似值，于是圆面积的近似值就表示为有限个数相加的和式：$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$. 不难看出，当 n 无限增大（$n\to+\infty$）时，S_n 就无限逼近于圆的面积，故圆的面积 πR^2 就是当 $n\to\infty$时，数列 $S_1, S_2, S_3,\cdots, S_n,\cdots$ 的极限.

有了上述直观认识，我们就可以得到级数的概念及其敛散性的定义.

定义 设已知数列为 $u_1, u_2, u_3,\cdots, u_n,\cdots$,则数列各项依次相加的和式 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 称为(常数项)**级数**，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,即

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的一般项.

从这个定义可以看出级数与数列的区别与联系：级数不是数列，而是数列各项依次相加的和式，这个和式不是有限项相加，而是无限项相加，故而级数又称无穷级数.

怎样理解级数中无穷多项的相加呢？它们相加的和是什么呢？如果一项一项加下去是加不完的，而我们只知道有限个数的相加方法. 如何解决这个问题呢？我们想到了微积分的基本概念——极限，通过极限过程就可以实现从有限项相加到无限项相加的转化.

作级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项和 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，称 S_n 为级数的部分和. 当 n 依次取 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 时，就构成一个部分和的数列：

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots\cdots,$$
$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\cdots$$

根据这个数列有无极限，就可引进级数的收敛与发散概念.

定义 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列为 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$，若当 n 无限增大 $(n\to+\infty)$ 时，数列 $\{S_n\}$ 趋于一个有限极限值 S，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$，则称**级数收敛**. 极限值 S 称为级数的和，即 $S=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$. 这时 S 与 S_n 的差 $S-S_n=r_n$ 称为级数的余项. 若当 n 无限增大 $(n\to+\infty)$ 时，数列 $\{S_n\}$ 不存在有限极限，则称**级数发散**.

这个定义说明，级数存在着收敛与发散两种可能. 只有在收敛前提下，级数才有和的概念，即收敛级数中无穷多个项才能相加. 这时，级数的部分和才可当作级数和的近似值，即当 n 充分大

时，S_n 与 S 相差可任意小，其误差就是余项的绝对值 $|r_n|$。

例 1 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散。

证 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots$，其部分和 $S_n = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+1)}{2} = \infty$，可知这个级数发散。

例 2 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots$ 称为几何级数(或等比级数)，其中 $a \neq 0$，q 为公比。试讨论这个级数的敛散性。

解 由于这个级数在 $|q| > 1, =1, <1$ 时有不同结论，故分别进行讨论：

如果 $|q| \neq 1$，有 $S_n = a+aq+\cdots+aq^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$。

当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$，这时级数发散。

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，这时级数收敛，其和 $S = \dfrac{a}{1-q}$。

如果 $|q| = 1$，

当 $q = 1$ 时，$S_n = na \to \infty$，这时级数发散，

当 $q = -1$ 时，级数为 $a - a + a - a + \cdots$，显然 S_n 随着 n 的奇偶性分别等于 a 或 0，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，故这时级数也发散。

总之，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的敛散性是：当 $|q| < 1$ 时收敛，当

$|q| \geqslant 1$ 时发散.

几何级数是一个重要且常用的数项级数，利用它的敛散性可以判断许多其它级数的敛散性，因此大家要牢记它的敛散性结论.

二、级数的基本性质

根据级数的收敛与发散概念，可以得出级数的以下基本性质：

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，k 为任一常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 的部分和分别是 S_n 和 σ_n，则 $\sigma_n = ku_1 + ku_2 + \cdots + ku_n = k(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = kS_n$，于是，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} kS_n = k\lim\limits_{n\to\infty} S_n = kS$，这表明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 kS.

易见，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，且 $k \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 仍发散.这是因为，若 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，据性质 1，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} \cdot ku_n\right)$ 就收敛，这与已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散相矛盾. 由此可知，级数各项乘以任一常数后，其敛散性不变.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 S 与 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm \sigma$.

证 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S \pm \sigma$. 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛于 $S \pm \sigma$.

性质 2 表明，收敛级数可以逐项相加或逐项相减。应该注意的是，这个性质仅就收敛级数而言，如果忽略收敛这个条件，结论就不正确了。例如一个收敛级数与一个发散级数的和肯定是发散级数；两个发散级数的和可能收敛也可能发散。

性质 3 改变级数的有限项，不影响级数的敛散性。

证 首先证明去掉级数有限项的情况：设去掉级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的前m项后，级数变为 $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+n}+\cdots$，它的部分和为 $T_n=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+n}=(u_1+\cdots+u_{m+n})-(u_1+\cdots+u_m)$，由于前$m$项的和 $u_1+\cdots+u_m$ 必然是常数，记作 C，所以有 $T_n=S_{m+n}-C$。这表明 T_n 与 S_{m+n} 相差一个常数 C。当 $n\to\infty$时，它们或者同时存在极限，或者同时不存在极限，从而对应的两个级数具有共同的敛散性。这就证明了去掉级数的有限项不改变级数的敛散性。

类似地可以证明，在级数前边加上有限项也不会改变级数的敛散性。概括说来，改变级数的有限项，不会改变级数的敛散性。不过应该注意的是，改变收敛级数的有限项后，其和通常是要改变的。

性质 4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则对其项任意加括号后所成的级数仍收敛，且其和不变。

证 设 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，对其项任意加括号后的级数的部分和为 σ_n，且有

$$\sigma_1=u_1+u_2+\cdots+u_{i_1}=S_{i_1}$$

$$\sigma_2=(u_1+u_2+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+u_{i_1+2}+\cdots+u_{i_2})$$
$$=S_{i_2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_n=(u_1+\cdots+u_{i_1})+(u_{i_1+1}+\cdots+u_{i_2})+\cdots$$

$$+ (u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n})$$

可见 $\{\sigma_n\}$ 实际上就是 $\{S_n\}$ 的一个子数列，故由部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛性可知部分和数列 $\{\sigma_n\}$ 也收敛，且极限不变。这就是性质 4 的结论。

应该注意的是，性质 4 的逆命题不成立。若加括号后的级数收敛，原级数不一定收敛。例如级数 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛于 0，但是原级数 $1-1+1-1+\cdots$ 却是发散的。概括说来，收敛级数可以任意加括号，但是不能任意去括号。

性质 5(收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

证 因为 $S_n = S_{n-1} + u_n$，即 $u_n = S_n - S_{n-1}$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

性质 5 的逆否命题同时成立：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一般项的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数必发散。

人们常常利用性质 5 的逆否形式判断某些级数的发散性。这时只需观察级数的一般项 u_n 是否不趋于零，只要 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，就可断言级数是发散的。

值得注意的是，性质 5 只是级数收敛的必要条件，而不是收敛的充分条件。也就是说，即使 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，也不能断定级数收敛。例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，易见 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但是这个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ 发散。为什么是发散呢？下面的例子给以说明。

例 3 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的。

证 顺序将级数的一项、两项、四项、八项、…、2^m项、…括起

来，构成一个新级数：

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

加括号的级数各项都大于级数：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)+\cdots$$

的对应各项．而后一个级数等于

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

其部分和等于 $n\cdot\frac{1}{2}$．当 $n\to\infty$时，$\lim\left(n\cdot\frac{1}{2}\right)=\infty$，故后一个级数发散．于是加括号的级数也发散．再利用性质4的逆否形式，若加括号后的级数发散，则原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$必发散．

以上介绍了级数的基本性质．利用级数的收敛定义及级数的基本性质，可以判断级数的敛散性．

例4 用收敛定义判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$$

的敛散性．

解 利用收敛定义判敛时，需看级数的部分和数列是否有极限，这就需要首先把 S_n 整理变形成易求极限的形式．对于这个级数，可将每一项改写成两项差，然后正负项抵消，就可得出 S_n 的表达式．

由于$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$，原级数写

成：

$$\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{16}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)+\cdots$$

将这种形式中的正负项抵消，即求出部分和 S_n 的表达式 $S_n=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)=\frac{1}{5}$，所以原级数收敛。

例 5 利用级数的性质，判断级数

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots \text{ 的敛散性。}$$

解 易见这个级数的一般项为 $u_n=\frac{n+1}{n+2}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1\neq 0$，据性质 5，故原级数发散。

例 6 判断级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$ 和级数 $-\frac{2}{7}+\frac{2^2}{7^2}-\frac{2^3}{7^3}+\cdots$ 的敛散性。

解 易见级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$，由于括号内为调和级数，它是发散的，据性质1，故原级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$ 也发散。

易见 $-\frac{2}{7}+\frac{2^2}{7^2}-\frac{2^3}{7^3}+\cdots$ 是以 $q=-\frac{2}{7}$ 为公比的几何级数，而 $|q|=\frac{2}{7}<1$，故这个级数收敛。

习　题　7-1

1. 写出下列级数的前五项：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$；　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}$；

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}$；　④ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2. 写出下列级数的一般项：

① $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$；　② $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$；

③ $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$；

④ $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$.

3. 利用级数收敛定义判断以下级数的敛散性：

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

② $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$.

4. 利用级数的性质以及几何级数、调和级数的敛散性判断以下级数的敛散性：

① $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$；　② $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\cdots$；

③ $\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\cdots$；　④ $\frac{3}{2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3^3}{2^3}+\cdots$；

⑤ $\frac{1}{11}+\frac{2}{12}+\frac{3}{13}+\cdots$；　⑥ $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$；

⑦ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$；

⑧ $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{10\cdot n}+\cdots$.

5. 试讨论在级数 $\sum u_n$ 收敛的条件下，以下级数的敛散性：

① $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + 0.001)$;　　② $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1000}$;

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{u_n}$.

§7.2　正项级数的判敛法

上节我们举例介绍了利用级数收敛定义和级数性质判断级数敛散性的方法．现在需要指出：仅靠上节介绍的级数判敛方法是远远不够用的，特别是利用级数收敛定义判敛时，需要求部分和数列 $\{S_n\}$ 的极限，这往往也是很难进行的．例如，对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n+2}$，若用收敛定义或级数性质均不易判断．因此本节将寻找更广泛更简便实用的判敛法．

我们首先讨论各项都是正数或零的级数，即正项级数．这是特别重要的一类常数项级数，以后将会看到许多级数的判敛问题都归结为正项级数的判敛问题．

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数（$u_n \geqslant 0$），它的部分和为 S_n．显然部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增的：

$$0 \leqslant S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots.$$

若数列 $\{S_n\}$ 有界，即存在常数 M 使得 $S_n \leqslant M$．根据单调有界数列必有极限的准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛于某数 S，且 $S_n \leqslant S \leqslant M$．

反之，若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于某数 S，即 $\lim_{n\to\infty}S_n = S$，则根