第4篇 材料力学

主　　编　夏有为（上海交通大学）
编 写 人　李秀治（上海交通大学）
　　　　　夏有为（上海交通大学）
责任编辑　朱亚冠

材料力学是研究构件强度、刚度、稳定性的一门学科。它为机械工程中简单构件的设计计算提供力学的基础性理论及方法。对于较复杂的构件和结构的强度、刚度和稳定性计算，可参考其他有关资料。

1 应力和应变

1·1 外力和内力

1·1·1 外力

构件承受的载荷及其相邻零部件传来的力或力矩，称为外力。它包括载荷及支座的约束反力。

作用于构件上的外力，按其作用方式可分为：体积力（例如自重、惯性力）和表面力（例如流体压力）。若外力作用面积远小于构件尺寸，则此外力可看做作用于一点的集中力。按载荷作用时间可分为：不随时间变化（或变化很小）的静载荷及随时间变化的动载荷。动载荷又可分为随时间作周期性变化的交变载荷及具有一定加速度的冲击载荷。

支座（约束）反力，参见本书第3篇。

1·1·2 内力

受力构件内部各截面间由外力作用所引起的附加相互作用力，称为内力。它随着外力的增大而增大，当其数值超过一定限度时，构件将发生破坏。

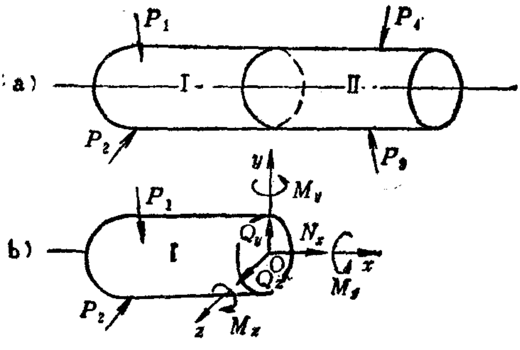


图4-1 截面上的应力

求构件内力的方法称为截面法，其步骤为：

（1）沿需求内力的截面，将构件假想地切开（图4-1 a）。

（2）任取其中一部分作为研究对象（例如图4-1 a中的Ⅰ）。

（3）在选取部分的截面上，以适当的内力代替去除部分（Ⅱ）上所有外力对它的作用（图4-1 b）。

（4）列静力平衡方程，求出截面上内力的大小及方向。

截面上的内力沿直角坐标分解，一般有六个分量（图4-1 b），即N_x（轴力）、Q_y（切力）、Q_z（切力）和M_x（扭矩）、M_y（弯矩）、M_z（弯矩）。其大小可由空间力系平衡方程式求得。

各内力沿构件轴线方向的变化规律可用图形表示，其分别为轴力图、扭矩图、切力图和弯矩图，统称为内力图。由内力图可直观地确定危险截面位置及内力的最大值。构件的内力与载荷成线性关系，在小变形条件下，对于受几个载荷同时作用的情况，可分别求各载荷单独作用的内力（或内力图），然后代数相加，即得几个载荷同时作用的内力（或内力图），此法称为叠加法。

1·2 应力和应力状态

1·2·1 应力和应力状态概念

a．应力 内力在截面上的分布与构件受力、变形及截面的形状大小有关。截面上单位面积的内力称为应力。与截面垂直的应力称为正应力σ，与截面平行或相切的应力称为切应力τ。与截面外向法线方向一致的正应力为拉应力，相反的为压应力。应力的单位为Pa（N/m²）、MPa（MN/m²）。

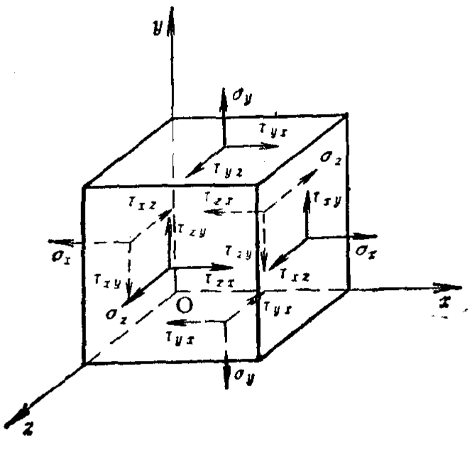
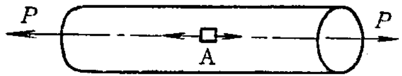
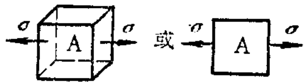
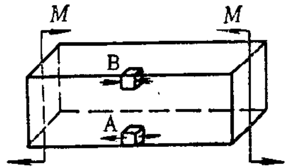
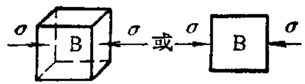
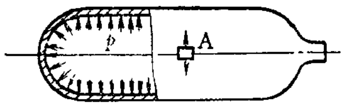
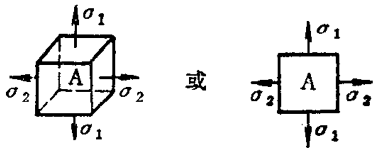


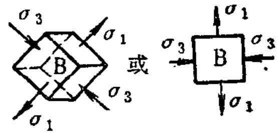
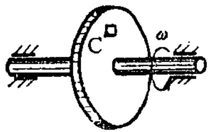
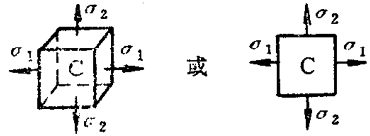
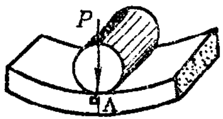
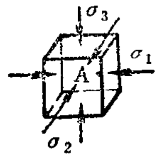
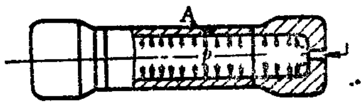
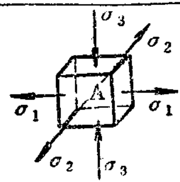
图4-2 应力分量

b．应力状态 通过物体内部某点各个截面上的应力情况，称为一点的应力状态。分析一点处的应力状态，通

表4-1 应力状态种类及实例

应力状态	实例	应力状态图示
单向应力状态 （线应力状态）	拉杆 	
	纯弯曲梁 	
二向应力状态 （平面应力状态）	高压气瓶 	

（续）

应力状态	实例		应力状态图示
二向应力状态（平面应力状态）	受扭杆		
	旋转盘		
三向应力状态（空间应力状态）	滚柱轴承接触点		
	厚壁容器		

常需围绕该点截取一个微小的单元体（一般取平行六面体），作为研究对象，如图4-2。单元体上最一般情况的应力分量为：σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yx}、τ_{yz}、τ_{zy}、τ_{zx}、τ_{xz}。由一点的应力状态可以表明该点各不同方向应力的变化规律，并可进一步找出应力最大值及其方向，以便进行强度计算。

c. 主应力　单元体上切应力等于零的平面称为主平面。主平面上的正应力称为主应力。可以证明，受力构件中任意一点均可找到三个相互垂直的主平面，而且面上的三个主应力的值就是该点正应力的极值。主应力按代数值用σ_1、σ_2、σ_3表示，且$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$。

d. 应力状态种类　单元体上只有一个主应力作用时称为单向应力状态（线应力状态）。单元体上有两个主应力或三个主应力时，则分别称为二向应力状态（平面应力状态）或三向应力状态（空间应力状态）。应力状态的种类及实例见表4-1。

1·2·2 切应力互等定理

受力构件内任一点的两个互相垂直的截面上，切应力必成对存在，其数值相等、方向相反，如图 4-3 所示，其关系为

$\tau_{yx}=-\tau_{xy}$或写为$\tau_y=-\tau_x$，切应力正负号规定为：顺时针转向为正，反时针为负。

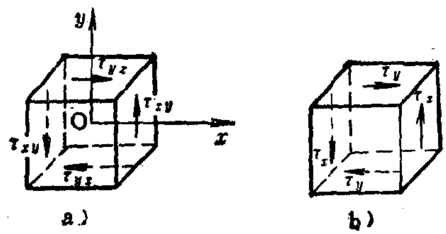


图4-3 切应力互等

1·2·3 二向应力分析

二向应力状态是工程构件中最常见的情况。设单元体上受力情况如图 4-4所示。

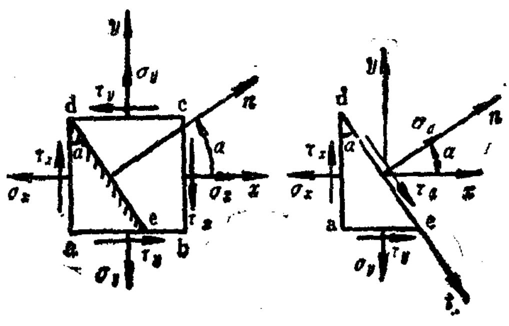


图4-4 斜截面上的应力

a. 斜截面上的应力 设此斜截面 de 垂直于主平面 abcd，截面法线与 x 轴的夹角为 α，以反时针转向为正。则

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha-\tau_x\sin 2\alpha\\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\alpha+\tau_x\cos 2\alpha\end{aligned}\right\}$$

b. 主应力与主方向

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$\alpha_0=-\tan^{-1}\frac{2\tau_x}{\sigma_x-\sigma_y}$$

式中，α_0为主应力σ_1与 x 轴的夹角（当$\sigma_x>\sigma_y$时），它表明σ_1所沿的方向，也叫主方向。

c. 最大切应力及其方向

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$\beta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x}$$

式中，β 为最大切应力τ_{max}作用面法线与 x 轴的夹角，它表明τ_{max}作用面的方位，且与主平面的夹角为$\pm 45°$。

1·2·4 应力圆

a. 应力圆 将σ_α及τ_α公式中参变量2α消去，可得到以σ_α和τ_α为变量的圆方程

$$\left(\sigma_\alpha-\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_\alpha^2=\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2$$

可见，圆心坐标为$\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},\ 0\right)$，半径为 $R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$，以此作圆即为应力圆。当已知单元体上所受应力$\sigma_x$、$\sigma_y$、$\tau_x$、$\tau_y$时，则此平面应力状态下任意斜截面上的应力可由该应力圆上对应点的坐标求得。

b．应力圆作法（图4-5） 取$\sigma-\tau$直角坐标系，将已知应力(σ_x, τ_x)及(σ_y, τ_y)按比例绘于图中得A、B两点，连A、B直线交σ轴于C点，以C点为圆心，CA（或CB）为半径作圆即得应力圆。

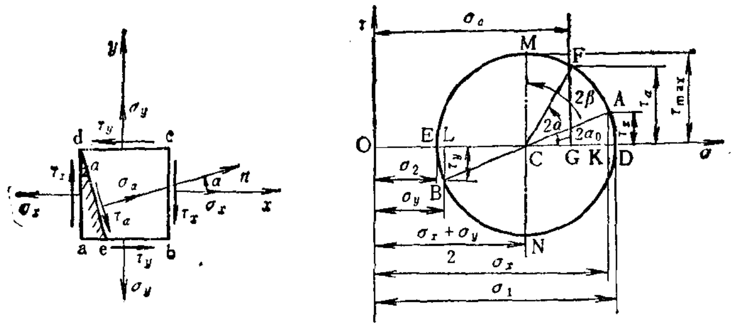


图4-5 应力圆的绘制

c．应力圆的应用 按选定的比例尺，由应力圆上（图4-5）量得斜截面上的应力：$\sigma_a=OG$，$\tau_a=FG$。主应力及主方向为：$\sigma_1=OD$，$\sigma_2=OE$。$\alpha_0=\frac{1}{2}\angle ACD$。最大切应力及其作用面位置：$\tau_{max}=CM$，$\tau_{min}=CN$。 $\beta=\frac{1}{2}\angle ACM$。

应用应力圆要注意的是：1）应力圆上任一点坐标值，必对应于单元体上某一截面的应力，即点与面必须对应。2）应力圆上任意两点所夹圆心角为2α，对应于单元体上与该两点相对应截面的夹角为α，其转向相同，大小差两倍。

1·2·5 三向应力状态

a．三向应力状态下斜截面上的应力 取三向应力状态的单元体见图4-6。设l、m、n为任意斜截面ABC法线的方向余弦，则该截面上的全应力p_n为

$$p_n=\sqrt{(\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n)^2+(\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n)^2+(\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n)^2}$$

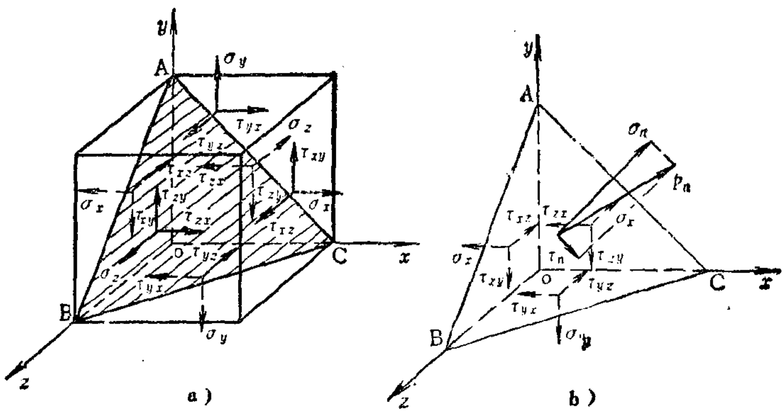


图4-6 三向应力状态下斜截面上的应力

正应力和切应力为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \\ \tau_n &= \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}\end{aligned}\right\}$$

该点的主应力σ_1、σ_2、σ_3为满足下列方程式的三个根，即

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)\sigma$$
$$- \sigma_x\sigma_y\sigma_z + \sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = 0$$

若已知单元体的各面为主平面，则斜截面上的正应力和切应力为

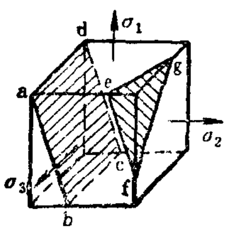
$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ \tau_n &= \sqrt{(\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)}\end{aligned}\right\}$$

若斜截面与三个主平面的倾角相等，则此斜截面组成一个八面体，此截面上的应力叫八面体应力。其值为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{OCT} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ \tau_{OCT} &= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}\end{aligned}\right\}$$

b．三向应力圆 设已知单元体的主应力为σ_1、σ_2、σ_3，任意斜

截面法线与三个主应力的作用方向 x、y、z 夹角分别为 α、β、γ。在图4-7中取 $OA=\sigma_1$，$OB=\sigma_2$，$OC=\sigma_3$。分别取 BC、AC、AB 的中点为 O_1、O_2、O_3，以点 O_1、O_2、O_3 为圆心，以 $\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$，$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$，$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)$ 为半径画圆得应力圆Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，这些应力圆称为主应力圆。它们分别代表三组与主应力 σ_1、σ_2、σ_3 平行的斜截面应力，例如图4-7 a 中abcd面（阴影面），因与主应力 σ_3 平行，所以 σ_3 在此平面上不会引起正应力和剪应力，亦即该截面的应力仅与 σ_1、σ_2 有关，由应力圆Ⅲ决定。同理，圆Ⅰ、Ⅱ分别表示平行于 σ_1、σ_2 的各截面的应力情况。与三个主应力均不平行的任意斜截面 efg 面上应力情况的相应点在应力圆（图4-7 b）的阴影区内。过点A、B、C引垂线，再过A、B、C引与上述垂线夹角分别为 α、β、γ 的直线，这些直线与主应力圆Ⅲ、Ⅱ、Ⅰ分别交于点 A_1、B_1、C_1。再以 O_1、O_2、O_3 为圆心，通过 A_1、B_1、C_1 作三个圆，则此三个圆的交点K的坐标即为任意斜截面 efg上的应力 σ 与 τ。



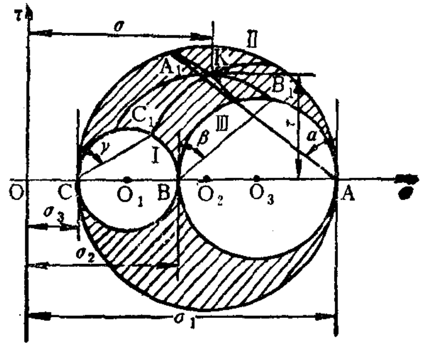


图4-7 三向应力圆

三向应力状态下，由图4-7可知

$$\sigma_{max}=\sigma_1,\quad \sigma_{min}=\sigma_3,\quad \tau_{max}=\pm\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$$

1·3 应变和应变状态

1·3·1 变形和应变

构件受外力作用将产生变形，一般各部分的变形并不相同，但在分析构件中一点处（单元体）变形时，可近似认为是均匀的。

a. 线应变 对于受轴向拉伸的等截面直杆，各点应变相同，则纵向绝对伸长变形为 $\Delta l = l_1 - l$，纵向线应变为 $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$，也称为相对线变形（图4-8）。若应变不均匀时，则取微段dx，伸长为du，线应变为 $\varepsilon = \dfrac{du}{dx}$，应变无量纲。

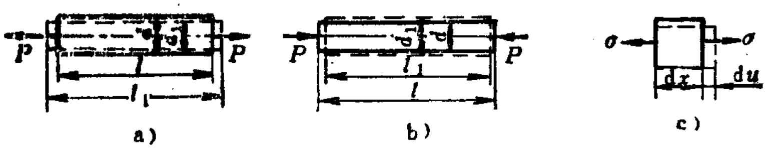


图4-8 纵向应变

在纵向变形的同时，构件横向也发生变形 $\Delta d = d_1 - d$，横向线应变为 $\varepsilon' = -\dfrac{\Delta d}{d}$。横向线应变与纵向线应变之比，取绝对值为 $\mu = \left|\dfrac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|$，称为横向变形系数，也叫泊松比，是材料的弹性常数，见表4-2。

b. 切应变 单元体棱边或平面间所夹直角的角度改变，称为相对角变形，也称切应变或角应变，用 γ 表示（图4-9），即

$$\frac{aa'}{ab} = \tan\gamma \approx \gamma$$

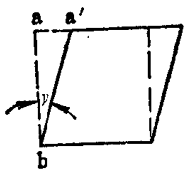


图4-9 切应变

c. 体积应变 设构件内某点的单元体体积为V，受力后体积增大了ΔV，则其体积应变为 $\varepsilon_v = \dfrac{\Delta V}{V}$，其与三个方向线应变间的近似关系为 $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$。

1·3·2 应变状态

在构件内任意点取单元体，变形后与应力状态相似，一点的应变状态可用6个应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 来表达。各不同方向截面上应变的变化情况也与应力状态变化公式相似，只是公式中切应变需用 $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$、$\frac{1}{2}\gamma_{yz}$、$\frac{1}{2}\gamma_{zx}$ 来表示。

以平面应变状态为例（图4-10），已知单元体的 ε_x、ε_y、γ_{xy}，则任意方向 x'、y' 的应变为

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_{x'}\\ \\ \varepsilon_{y'}\end{array}\right\}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\alpha\mp\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\alpha$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2}=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha+\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\alpha$$

式中 ε_x、ε_y、γ_{xy}——已知单元体的线应变及角应变；α——x' 轴与 x 轴之间的夹角。

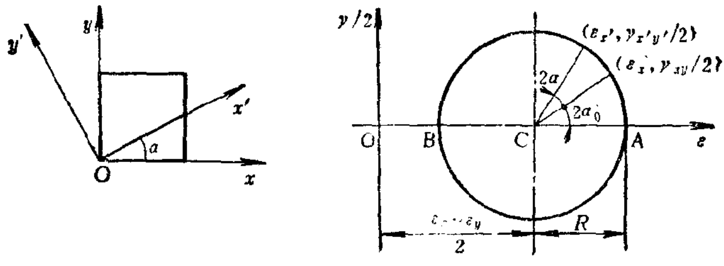


图4-10 应变圆

主应变为

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=\varepsilon_{max}\\ \\ \varepsilon_2=\varepsilon_{min}\end{array}\right\}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\alpha_0=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{-\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}$$

最大切应变为

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{max}=\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

应变圆 只需将应力圆的纵坐标轴 τ 改为 $\frac{\gamma}{2}$，横坐标轴 σ 改为 ε，其圆心C为 $\left(\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2},\ 0\right)$，半径 R 为 $\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$，作图即得应变圆，见图4-10。

1·4 应力和应变关系

1·4·1 虎克定律

a. 单向拉压虎克定律 当应力不超过材料的比例极限时，正应力 σ 与线应变 ε 成正比，即

$$\sigma=E\varepsilon$$

式中，E 为材料的弹性模量，常用材料的 E 值见表4-2。

表4-2 弹性模量和横向变形系数

材料名称	E GPa	G GPa	μ
碳钢	196～216	78.4～79.4	0.25～0.33
合金钢	194～216	78.4～79.4	0.24～0.33
灰口铸铁、白口铸铁	113～157	44.1	0.23～0.27
铝、硬铝合金	69.6	25.5～26.5	0.33
铜、铜合金	73～127	39.2～45.1	0.31～0.42
铅	16.7	6.9	0.42
橡胶	0.00784	—	0.47
木材（顺纹）	9.8～11.8	—	0.0539
木材（横纹）	0.49～0.98	—	—

b. 剪切虎克定律 当应力不超过材料的比例极限时，切应力 τ 与切应变 γ 成正比，即

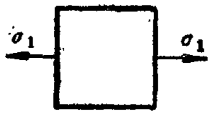
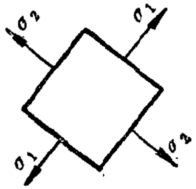
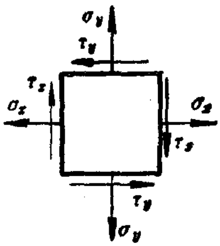
$$\tau=G\gamma$$

式中，G为材料的切变模量，常见材料的G值参见表4-2。

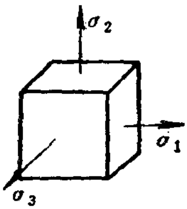
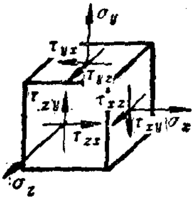
1·4·2 广义虎克定律

在比例极限内，各种应力状态下应力和应变的关系，统称广义虎克定律，见表4-3。

表4-3 广义虎克定律

应力状态		以应力表示应变	以应变表示应力
单向应力状态	已知主应力或主应变 	纵向主应变 $\varepsilon_1=\dfrac{\sigma_1}{E}$ 横向应变 $\varepsilon_2=\varepsilon_3=-\mu\varepsilon_1$ $=-\mu\dfrac{\sigma_1}{E}$	主应力 $\sigma_1=E\varepsilon_1$
二向应力状态	已知主应力或主应变 	主应变 $\varepsilon_1=\dfrac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_2)$ $\varepsilon_2=\dfrac{1}{E}(\sigma_2-\mu\sigma_1)$ $\varepsilon_3=-\dfrac{\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2)$	主应力 $\sigma_1=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)$ $\sigma_2=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1)$ $\sigma_3=0$
	已知一般应力或应变 	应变分量 $\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)$ $\varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)$ $\varepsilon_z=-\dfrac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$ $\gamma_{xy}=\dfrac{\tau_{xy}}{G}$ $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$	应力分量 $\sigma_x=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)$ $\sigma_y=\dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)$ $\tau_{xy}=G\gamma_{xy}$ $\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$

（续）

应力状态		以应力表示应变	以应变表示应力
三向应力状态	已知主应力或主应变 	主应变 $\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]$ $\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]$ $\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]$	主应力 $\sigma_1=2G\varepsilon_1+\lambda e$ $\sigma_2=2G\varepsilon_2+\lambda e$ $\sigma_3=2G\varepsilon_3+\lambda e$ 式中 $e=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$ $\lambda=\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$
	已知一般应力或应变 	应变分量 $\varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]$ $\varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]$ $\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]$ $\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$ $\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}$ $\gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}$	应力分量 $\sigma_x=2G\varepsilon_x+\lambda e$ $\sigma_y=2G\varepsilon_y+\lambda e$ $\sigma_z=2G\varepsilon_z+\lambda e$ $\tau_{xy}=G\gamma_{xy}$ $\tau_{yz}=G\gamma_{yz}$ $\tau_{zx}=G\gamma_{zx}$ 式中 $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ $\lambda=\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$

1·5 应变能

构件受力后，随着弹性变形而储藏的能量称为弹性变形能，简称变形能。在比例极限内，若不计热能等损耗，根据能量守恒定律，外力所作的功等于构件内储藏的变形能。单位体积内的变形能称为应变能，也称比能。