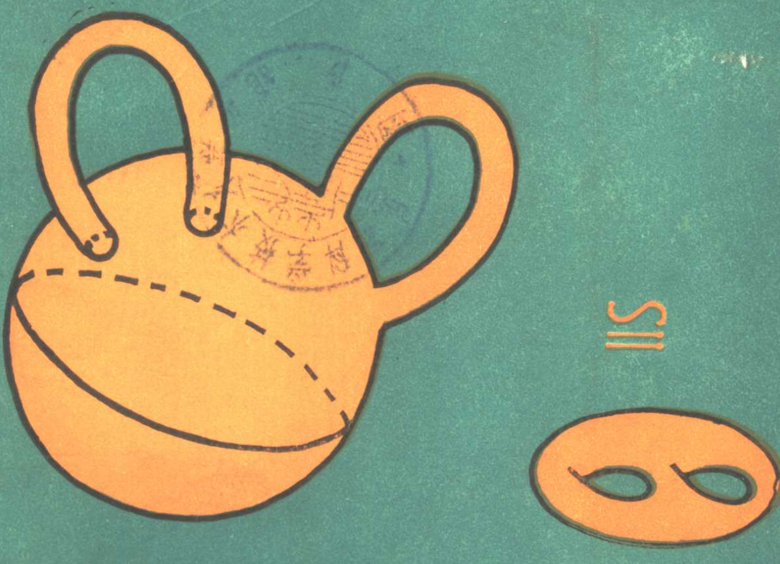
基础拓扑学

何伯和　廖公夫

高等教育出版社



基础拓扑学

何伯和 廖公夫 著

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

全书共分六章，包括拓扑空间的基本概念、基本群、单纯复形、曲面分类、同调群与它的应用等内容，而具有有限生成元的交换群作为代数方面的补充知识列入附录. 本书参照高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会1980年审订的两个拓扑学教学大纲编写，基本上编入了两个大纲所列的主要内容，取材适当，包含了一些最基本的内容，并完整地给出了一些重要定理的证明，习题安排也较恰当.

本书可供高等学校数学专业作为拓扑学课程的教材，也可供其它有关专业参考使用。

基础拓扑学

何伯和　廖公夫

*

高等教育出版社出版
新华书店总店北京科技发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.375 字数 170 000
1991年10月第1版 1991年10月第1次印刷
印数 0001—2 015
ISBN7-04-003488-3/O·1057
定价3.25元

前　言

拓扑学的研究可以说是从1736年瑞士数学家Euler研究哥尼斯堡七桥问题开始的．以后，1752年，Euler关于凸多面体的定理，则是拓扑学中头一个重要的结果．继Euler以后，在1833年前后，德国数学家Gauss研究了3维空间中各种各样的纽结问题，并讨论了函数沿纽结的积分．到1851年，德国数学家Riemann进行了所谓Riemann曲面的研究，这方面的工作，虽然属于所谓复变函数论的范围，但是从另一角度，也可以看作是对于曲面性质的拓扑研究．到十九世纪末，德国数学家Cantor创立了集合论．这是数学基础方面一次重大的改革，从此数学中的分析、代数与几何，甚至包括数理逻辑，都可看作是以集合论为基础的．时至今日，集合与映射，已经成为一切现代数学中最基本的概念．

在分析学发展中积累起来的大量素材的基础上，由于集合论与公理化方法的发展，产生了抽象空间的概念，这种研究拓扑空间的方法，可以说是由法国数学家Fréchet等人1906年所倡导与开始的，延续至今，这就逐渐形成了今天的点集拓扑学．

与此同时，法国数学家Poincaré从研究分析学中问题的几何解释入手，感到有研究多维流形的几何性质首先是拓扑性质的必要，从而开始了拓扑空间的组合，也就是代数方法的研究，他把流形——局部看起来象欧氏空间的那种整体图形，分解成单纯形，单纯形的集合便是一种具有组合结构的复合形，从而引入了同调的概念，这就逐渐形成了现在的代数拓扑学．

本教材是应吉林大学数学系的教学需要而编写的，在编写过

程中，参照了1980年高等学校理科数学、力学、天文学教材编审委员会审订的两个拓扑学教学大纲，并且基本上编入了两个大纲所列的主要内容。这是因为作为拓扑学的一个基础教材，从吉林大学的实际情况来看，点集拓扑与代数拓扑两方面的基本内容都是需要的．当然，我们假定读者在阅读本书的时候，已经熟悉了群与同态，集合及其运算等方面的基础知识．但是对于代数方面的进一步内容，如具有有限生成元的交换群的分解定理，我们作为附录，列在本书的最后，以供参考．

从吉林大学数学系的试用情况来看，本教材大约可在64学时内讲完，初学者如果感到困难的话，可能是由于拓扑学中以同胚作为一切考虑的核心，因而在处理问题的方法上，对不拘一格、多种多样这样一种风格不习惯．熟悉这种风格需要一个过程，因此作为第一次，在学的过程中删去任何一些比较难的部分，都是可以的。

在本教材的形成过程中，作者对于姜伯驹教授与孙以丰教授的推荐与支持深表感谢．

何伯和

1988年2月于长春

目 录

第一章 拓扑空间的基本概念

在本世纪初，由于集合论与公理化方法的发展，在分析学积累起来的大量素材的基础上，产生了抽象空间的概念. 从而建立了点集拓扑学. 点集拓扑学的基本思想来源于分析，所以一方面它具有高度的抽象与概括，能够广泛应用于现代数学的许多分支，成为现代数学的基本工具之一，而另一方面，它的基本概念与方法，又都有其具体背景，因此把握这两者之间的关系，是十分重要的. 在本章我们讨论拓扑空间、连续映射等点集拓扑的基本概念，对有关问题的进一步展开，将留待下一章讨论.

§1 拓扑空间

在一个抽象集合上定义拓扑的方法是多种多样的，自从 1914 年 Hausdorff 用邻域系确定拓扑以来，现在人们已经知道，用开集族、闭集族、闭包运算、收敛类等方法均可定义拓扑. 下面我们从目前比较通用的由开集族建立拓扑的方法，来定义拓扑空间，这种方法始于 Alexandroff 与 Hopf.

1.1 定义 设 X 为非空集合，$\mathscr{T}\subset 2^X$ 为 X 的一个子集族，若 $\mathscr{T}$ 满足

1) $X, \varnothing\in\mathscr{T}$;

2) 当 $\mathscr{T}'\subset\mathscr{T}$ 时，$\bigcup\limits_{U\in\mathscr{T}'} U\in\mathscr{T}$;

3) 当 $U_1, \cdots, U_n\in\mathscr{T}$ 时，$\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\in\mathscr{T}$,

则称$\mathscr{T}$为X上的一个拓扑结构或拓扑. 集合X与它的一个拓扑$\mathscr{T}$组成的偶$(X,\mathscr{T})$称为拓扑空间或空间,X中的元素称为点,$\mathscr{T}$中的元素称为$(X,\mathscr{T})$的开集,在不致引起混淆的情况下,也记$(X,\mathscr{T})$为X.

由定义可见,所谓给空间(即集合)X以一个拓扑,就是规定其中某些子集为开集,使之满足条件 1)——3),因此可以想象,在一个集合X上,可以给出的拓扑结构,一般来说不是唯一的,而拓扑空间无非是比集合更为精细的一种结构.

例 1 设$X\neq\varnothing$,令$\mathscr{T}_I=\{X,\varnothing\}$,则$\mathscr{T}_I$为$X$上的拓扑,称为$X$的密集拓扑. 又令$\mathscr{T}_d=2^X$,则$\mathscr{T}_d$也是$X$的一个拓扑,称为$X$上的离散拓扑.

易见,对于X上的任意一个拓扑$\mathscr{T}$,作为2^X中的子集,总有

$$\mathscr{T}_I\subset\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_d,$$

因此从这个意义上说,$\mathscr{T}_I$是最粗或者说最弱的拓扑,而$\mathscr{T}_d$是最细,最强的拓扑.

例 2 设$X=\{a,b\}$,令$\mathscr{T}_1=\{\varnothing,\{a,b\}\}$,$\mathscr{T}_2=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$,$\mathscr{T}_3=\{\varnothing,\{b\},\{a,b\}\}$,$\mathscr{T}_4=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,则$\mathscr{T}_1$,$\mathscr{T}_2$,$\mathscr{T}_3$,$\mathscr{T}_4$均为$X$上的拓扑,其中$\mathscr{T}_1$为密集拓扑,$\mathscr{T}_4$为离散拓扑,而$\mathscr{T}_2$与$\mathscr{T}_3$不能比较.

例 3 设$X\neq\varnothing$,令$\mathscr{T}_{cf}=\{X-A;A$为X的有限子集$\}\cup\{\varnothing\}$,则容易验证,$\mathscr{T}_{cf}$是X上的一个拓扑,称为X上的余有限拓扑.

例 4 设R为实数集,$\mathscr{T}_{cc}=\{\varnothing,R-c;\ c$为$R$中的可数集$\}$,则$\mathscr{T}_{cc}$是$R$的一个拓扑,称为$R$上的余可数拓扑.

例 5 设R为实数集,对于$x,y\in R$,令

$$d(x,y)=|y-x|$$

称为两个点x,y之间的距离. 其次对于$x\in R$,$\varepsilon>0$,令

$$U_\varepsilon(x)=\{y;d(x,y)<\varepsilon,y\in R\}$$

称为点 x 的 ε 邻域. $U\subset R$ 称为 R 的开集，当且仅当对于任意 $x\in U$，存在 $U_\varepsilon(x)\subset U$. 于是容易验证，如此规定的 R 中的开集族，满足定义 1.1 中的 1)——3)，因此它使 R 成为一个拓扑空间，这个拓扑空间称为实直线或 1 维欧氏空间，记作 E^1，其中的开集就是我们通常所熟悉的实直线上的开集. R 的这个拓扑，也称为 R 的通常拓扑.

例 6 对于 n 元实数之集 R^n 中的任意两点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,\cdots,y_n)$，令

$$d(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $x\in R^n$，$\varepsilon>0$，令

$$U_\varepsilon(x)=\{y;d(x,y)<\varepsilon,y\in R^n\},$$

然后定义 $U\subset R^n$ 为开集，当且仅当对于任意 $x\in U$，存在 $U_\varepsilon(x)\subset U$. 容易验证，如此定义的 R^n 中的开集族满足定义 1.1 的 1)——3)，因此构成 R^n 的一个拓扑，称为 R^n 的通常拓扑，而这个拓扑空间称为 n 维欧氏空间，记作 E^n，这也是我们通常所熟悉的.

在拓扑空间的定义中，有了开集的概念，便可派生出闭集的概念.

1.2 定义 设 X 为拓扑空间，$A\subset X$，A 称为 X 的闭集，当且仅当 $X-A$ 为 X 中的开集.

于是由定义 1.1 的 1)——3)，对应地可得下列关于闭集的基本性质的命题.

1.3 命题 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的闭集满足下列性质：

1) X 与 $\varnothing$ 是闭集；

2) 若 $\mathscr{A}$ 是 X 中任意一族闭集，则 $\bigcap\limits_{A\in\mathscr{A}}A$ 是闭集；

3) 若 $A_1,\cdots,A_n$ 是闭集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是闭集.

证明 1) 由 1.1，X，$\varnothing\in\mathscr{T}$，$\Rightarrow X-X=\varnothing$，$X-\varnothing=X$ 为闭集.

2) 设 $\mathscr{A}=\{A_\lambda;\ \lambda\in\Lambda\}$，因 A_λ 是闭集，$\Rightarrow X-A_\lambda$ 为开集，$\Rightarrow$ $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(X-A_\lambda)=X-\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为开集，$\Rightarrow\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 为闭集.

3) 因A_i为闭集，$\Rightarrow X-A_i$为开集，$\Rightarrow\bigcap\limits_{i=1}^{n}(X-A_i)=X-\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为开集，$\Rightarrow\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 为闭集.

其次我们讨论由X的拓扑诱导的X的子集的拓扑.

1.4 定义 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，Y 为X的非空子集，令

$$\mathscr{T}|_Y=\{Y\cap U;U\in\mathscr{T}\},$$

则容易验证 $\mathscr{T}|_Y$ 是集合 Y 上的一个拓扑，称之为由$\mathscr{T}$诱导的相对拓扑，$(Y,\mathscr{T}|_Y)$称为$(X,\mathscr{T})$的拓扑子空间，简称为子空间。

由定义 1.4，对于拓扑空间X中的任意非空子集Y，在相对拓扑意义下，均自动成为拓扑空间. 例如根据例 6，已知 E^n 为在通常拓扑意义下的拓扑空间，因此 E^n 中的任意非空子集，都是在相对拓扑意义下的拓扑空间.

例 7 当 $0<m<n$，容易看出 R^m 关于 E^n 的相对拓扑，即为 E^m.

例 8 由于 E^1 为拓扑空间，所以 E^1 中的任一闭区间 $[a,b]$，为拓扑子空间，这时对于任意 $a<c<b$，$[a,c)$便是$[a,b]$ 中的开集，但它不是 E^1 中的开集. 又如 $X=[a,b)$为 E^1 的拓扑子空间，由于在任何拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中，全空间X是其中的既开又闭集，因此$[a,b)$是$(X,\mathscr{T})$ 中的既开又闭集，但在 E^1 中，它既不是开集，也不是闭集.

因此以后我们在谈到开集或闭集时，必须说明它在什么空间

中是开集或闭集，这是十分重要的.

1.5 命题 设Y是X的子空间，$B\subset Y$，则B是Y的闭集，当且仅当存在X的闭集A，使得$A\cap Y=B$.

证明 A为X的闭集，$\Rightarrow X-A$为X的开集，$\Rightarrow(X-A)\cap Y=X\cap Y-A\cap Y=Y-A\cap Y$为开集，$\Rightarrow A\cap Y=B$为$Y$的闭集. 反之，$B\subset Y$为闭集，$\Rightarrow Y-B=C\cap Y$，其中$C$为$X$的开集，$\Rightarrow B=Y-C\cap Y=X\cap Y-C\cap Y=(X-C)\cap Y=A\cap Y$，其中$A=X-C$是$X$的闭集.

例 9 设X为拓扑空间，$Y\subset X$为开集，则$U\subset Y$为Y中的开集，当且仅当U是X的开集. 同样地，若$Y\subset X$为闭集，则$A\subset Y$为Y中的闭集，当且仅当A是X的闭集，这由定义 1.4 与命题 1.5 即可获知.

1.6 定义 1) 设$(X,\mathscr{T})$为拓扑空间，A，V为X的子集，V称为A的邻域，当且仅当存在$U\in\mathscr{T}$，使得$A\subset U\subset V$，并且常常记$V=V(A)$；

2) 包含A的开集U称为A的开邻域. 特别地，若$A=\{x\}$，V称为x的邻域，U称为x的开邻域. 点x的全体邻域记作$\mathscr{N}(x)$，称为x的邻域系.

由定义，包含x的开集均为x的开邻域，当然更是邻域，但是x的邻域未必是开集.

1.7 命题 拓扑空间X的子集A是开集，当且仅当对于任意$x\in A$，有$A\in\mathscr{N}(x)$

证明 由邻域的定义，必要性显然. 反之，对于$x\in A$，因$A\in\mathscr{N}(x)\Rightarrow$有$x$的开邻域$U_x\subset A$，所以$A\subset\bigcup_{x\in A}U_x\subset A$，$\Rightarrow A=\bigcup_{x\in A}U_x$为开集.

1.8 定义 1) 设X为拓扑空间，$A\subset X$，$x\in X$，如果对于x的

任意开邻域U，有$U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，则称$x$为$A$的聚点；

2) A的全体聚点之集称为A的导集，记作A'；

3) A与A的导集之并称为A的闭包，记作$\bar{A}$，即$\bar{A}=A\cup A'$

关于闭包，有下列基本性质.

1.9 命题 1) $\bar{A}$是X中一切含A的闭集之交；

2) 对于$x\in X$，$x\in\bar{A}$当且仅当对于x的任何开邻域U，有$U\cap A\neq\varnothing$.

证明 1) 令

$$\mathscr{F}_A=\{F;A\subset F,F\text{为}X\text{的闭集}\},$$

$$B=\bigcap_{F\in\mathscr{F}_A}F,$$

则对$x\in\bar{A}$，$F\in\mathscr{F}_A$，当$x\in A\Rightarrow x\in F$；当$x\in A'$，$\Rightarrow x\overline{\in}X-F$，所以也有$x\in F$. 从而$\bar{A}\subset B$. 反之，对$x\in B$，若$x\overline{\in}A$，任取$x$的开邻域$U$，若$U\cap(A-\{x\})=U\cap A=\varnothing$，$\Rightarrow X-U$是含$A$的闭集，不含$x$，$\Rightarrow x\overline{\in}B$，矛盾，因此必有$U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，故$x\in A'$，从而$B\subset A\cup A'=\bar{A}$，所以$\bar{A}=B$.

2) 设$x\in\bar{A}$，U是x的开邻域，若$x\in A$，显然有$U\cap A\neq\varnothing$，若$x\in A'-A$也有$U\cap A=U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，所以总有$U\cap A\neq\varnothing$.

反之，对$x\in X$，若对于x的任意开邻域U，有$U\cap A\neq\varnothing$，此时如果$x\overline{\in}A$，则$U\cap(A-\{x\})=U\cap A\neq\varnothing\Rightarrow x\in A'$，从而必有$x\in\bar{A}$.

1.10 命题 1) 对于任意$A\subset X$，$\bar{A}$是X中的闭集；

2) 对于$F\subset X$，F为闭集当且仅当$\bar{F}=F$；

3) 对于$F\subset X$，F为闭集当且仅当$F'\subset F$.

证明 1) 由命题1.9，$\bar{A}$是X中一切含A的闭集之交，故为闭集.

2) 若F为闭集，因$\bar{F}$是含F的最小闭集，所以$\bar{F}=F$. 反之，若$\bar{F}=F$，由1) 即知F为闭集.

3) $\bar{F}=F\cup F'$，若 F 为闭集，则 $\bar{F}=F$，所以 $F'\subset F$. 反之，由于 $F'\subset F\Rightarrow\bar{F}=F$，故 F 为闭集.

1.11 命题 1) 若 $A\subset B\subset X$，则 $\bar{A}\subset\bar{B}$;

2) 若 $A\subset B\subset X$，则 $A'\subset B'$;

3) 对于任意 $A_1, A_2\subset X$，有 $(A_1\cup A_2)'=A_1'\cup A_2'$

证明 1) 由命题 1.9, 1) 即知.

2) 对 $x\in A'$，设 U 为 x 的任意一个开邻域，则 $U\cap(B-\{x\})\supset U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$，所以 $x'\in B$，$\Rightarrow A'\subset B'$.

3) 由 A_1，$A_2\subset A_1\cup A_2$，根据 2)，$\Rightarrow A_1'$，$A_2'\subset(A_1\cup A_2)'$，$\Rightarrow A_1'\cup A_2'\subset(A_1\cup A_2)'$. 反之，若 $x\overline{\in}A_1'\cup A_2'$，则存在 x 的开邻域 V，使得 $(V\cap(A_1-\{x\}))\cup(V\cap(A_2-\{x\}))=\varnothing\Rightarrow V\cap(A_1\cup A_2-\{x\})=\varnothing\Rightarrow x\overline{\in}(A_1\cup A_2)'$. 这表明 $(A_1\cup A_2)'\subset A_1'\cup A_2'$. 于是 $A_1'\cup A_2'=(A_1\cup A_2)'$.

1.12 命题 在拓扑空间 X 中，关于子集的闭包有下列性质:

1) $\bar{\varnothing}=\varnothing$;

2) $\bar{A}\supset A$;

3) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$;

4) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

证明 1) ——3) 是显然的，对性质 4)，由于

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=(A\cup B)\cup(A\cup B)'=(A\cup B)\cup A'\cup B'\\&=(A\cup A')\cup(B\cup B')=\bar{A}\cup\bar{B},\end{aligned}$$

所以也成立.

性质 1) ——4) 称为 Kuratowski 的闭包公理，由它们出发，也可以定义拓扑空间.

1.13 定义 1) 对拓扑空间 X，$A\subset X$，若 $\bar{A}=X$，则称 A 在 X 中稠密或 A 是 X 的稠密子集.

2) 对拓扑空间 X，若在其中存在可数的稠密子集，则称 X 为

可分的，或可分空间.

对于 $A\subset X$ 与 $x\in A$，若存在开集 U，使得 $x\in U\subset A$，则称 x 为 A 的内点，A 的全体内点之集称为 A 的内部，记作 A°，显然它是含于 A 中的最大开集. 因此 $A\subset X$ 为开集，当且仅当 $A^{\circ}=A$，而对于一般情形，总有 $A^{\circ}\subset A$. 此外，对于 $N\subset X$，$x\in X$，N 是 x 的邻域，当且仅当 $x\in N^{\circ}$.

1.14 定义 设 A,B 为 X 的子集，若 $B\subset\bar{A}$，则称 A 在 B 中稠密；若 $A=A'$，则称 A 为完全集；若 $(\bar{A})^{\circ}=\varnothing$，则称 A 为 X 中的无处稠密集. 可数多个无处稠密集之并称为第一范畴集，不是第一范畴集的子集，称为第二范畴集. 若 X 的任意可数个稠密开集之交仍为稠密集，则称 X 为 Baire 空间.

例 10 在 E^1 中，设 Q 为有理数集，S 为无理数集，Z 为自然数集，则 $\bar{Q}=\bar{S}=E^1$，故 Q,S 均为 E^1 中的稠密子集. 而 $(\bar{Z})^{\circ}=Z^{\circ}$ $\varnothing$，故 Z 在 E^1 中无处稠密.

1.15 定义 对于拓扑空间 X 的子集 A，称 $\bar{A}\cap\overline{X-A}$ 为 A 的边界，记作 $\mathrm{Bd}\,A$，$\mathrm{Bd}\,A$ 中的点称为 A 的边界点.

例 11 在 E^1 中，显然有 $\mathrm{Bd}Z=Z$，$\mathrm{Bd}Q=\mathrm{Bd}S=E^1$，$\mathrm{Bd}[a,b]=\mathrm{Bd}(a,b)=\{a,b\}$.

习　题

1. 设 $\mathscr{T}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是 X 上的一族拓扑，证明：$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{T}_\lambda$ 也是 X 上的拓扑.

2. 设 X 是多于 2 个点的集合，$\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2$ 是 X 的拓扑，举例说明 $\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$ 未必是 X 上的拓扑.

3. 说明当 X 为什么集合时，在 X 上有 $\mathscr{T}_I=\mathscr{T}_d$.

4. 设 $\mathscr{T}_{cf},\mathscr{T}_{cc},\mathscr{T}_e$ 分别为 R 上的余有限，余可数与通常拓扑，试比较它们的粗细，即强弱.

5. 试考察在下列空间中每点的邻域：1) $(X,\mathscr{T}_I)$，2) $(X,\mathscr{T}_d)$，3) $(R,$

$\mathscr{T}_{0f}$)

6. 举例说明导集 A' 未必是闭集.

7. 1) 举例说明有集族 $\{A_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$，使得

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \neq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda.$$

2) 举例说明存在 A 与 B，使得 $\overline{A\cap B} \neq \bar{A}\cap\bar{B}$.

8. 证明 $\overline{\bigcap A_\lambda} \subset \bigcap \bar{A}_\lambda$，$\overline{\bigcup A_\lambda} \supset \bigcup \bar{A}_\lambda$

9. 设 A 为 X 的稠密子集，U 为开集，证明 $U\subset(\overline{A\cap U})$

10. 设 A 是 X 的稠密子集，B 在 A 中稠密，证明 B 是 X 的稠密子集.

11. 证明稠密开集与稠密子集之交为稠密子集.

12. 证明可分空间中互不相交的开集的个数至多是可数的，但其逆不成立.

13. 证明 Baire 空间的开集仍为 Baire 空间.

14. 设，$A, B\subset X$，证明：

1) $\bar{A}=A\cup \mathrm{Bd}A=A^\circ\cup\mathrm{Bd}A$;

2) $\mathrm{Bd}(A\cup B)\subset\mathrm{Bd}A\cup\mathrm{Bd}B$.

15. 设 $A, B\subset X$，证明

1) $\mathrm{Bd}A\subset A\Longleftrightarrow A$ 是闭集；

2) $\mathrm{Bd}A\cap A=\varnothing\Longleftrightarrow A$ 为开集；

3) $\mathrm{Bd}A=\varnothing\Longleftrightarrow A$ 既开又闭；

4) $\bar{A}^\circ=A\Longleftrightarrow A$ 是开集的闭包.

§2 拓扑基与度量空间

我们知道对于拓扑空间 X，可以通过其中的开集来了解它，但是一般说来，X 的开集往往非常之多，因此如同向量空间中的向量通过基来表示一样，可以考虑用 X 中的一部分开集来表示 X 的全部开集，这就导致拓扑基的概念.

2.1 定义 设 $(X,\mathscr{T})$ 为拓扑空间，$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$，若对于任意 $U\in\mathscr{T}$，存在 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$，使得

$$U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B,$$

则称$\mathscr{B}$为拓扑$\mathscr{T}$的一个基或集X的一个拓扑基. 为了叙述的方便,集合X的拓扑$\mathscr{T}$的基也称为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的一个基.

换言之,$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$是$X$的拓扑基,当且仅当对$X$的任意开集$U$以及$x\in U$,存在$B\in\mathscr{B}$,使得$x\in B\subset U$.

例1 1) E^n中的全体开球构成E^n的一个基.

2) E^n中的全体开方体构成E^n的一个基.

3) E^n中的全体$U_\varepsilon(x)$,其中$\varepsilon>0$为有理数,$x\in E^n$构成E^n的一个基.

4) E^n中的全体$U_\varepsilon(x)$,其中$\varepsilon>0$为有理数,$x\in E^n$为有理点构成E^n的一个基.

由此可见,一般说来,拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的拓扑基不是唯一的,特别是当$\mathscr{B}$是X的一个基,$\mathscr{A}\subset\mathscr{T}$,那末只要$\mathscr{B}\subset\mathscr{A}$,$\mathscr{A}$便是$X$的一个拓扑基,因此$\mathscr{T}$本身也是$X$的一个基.

反之,若想在一个非空集X上赋予某种拓扑,可以考虑先选定2^X的一个子集B,然后规定一切

$$U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}'} B \tag{1}$$

(其中$\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$)为$X$的开集. 但是这样规定合理吗?什么样的$\mathscr{B}$可以生成$X$的一个拓扑?这有下列命题:

2.2 命题 设$X\neq\varnothing$,$\mathscr{B}\subset 2^X$,则$\mathscr{B}$为X上某拓扑之基的充要条件是:

1) $X=\bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$;

2) 若$B_1,B_2\in\mathscr{B}$, $x\in B_1\cap B_2$, 则存在$B_3\in\mathscr{B}$,使得$x\in B_3\subset B_1\cap B_2$