·经济类·

贾凤亭　编著

高等数学自学考试应试要览

世界图书出版公司

内容简介

本书共分两部分，第一部分为各章复习要点及典型例题。各章复习要点是根据高等数学（一）自学考试大纲及对近年来高等数学自学考试题进行分析归类所提炼出的各章重点内容；典型例题是各章复习要点所涉及的各种考试题型。第二部分选编了自一九八八年以来全国高等教育自学考试高等数学试题，并对每套试题作了详细的解答。同时，在解答过程中逐题进行了解题分析，指出同一题型的解题规律，特别是对学员在解题中容易出现的错误进行了分析指正。

本书除作为参加自学考试的广大学员考前指导书外，也可作为大中专院校尤其是财经类院校学生的学习参考书。

高等数学自学考试应试要览

贾凤亭　著

*

责任编辑　纪谊

世界图书出版公司北京公司出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1992 年 7 月第一版　开本：787×1092　1/32

1994 年 2 月第二次印刷　印张：12.75

印数：4001—5000　字数：26 万字

ISBN　7－5062－1570－5/F・35

定价：6.90 元

前　言

随着我国经济建设的发展，人们愈来愈认识到知识的重要性，广大有志青年涌跃投入到自学考试行列。他们渴望通过自学，学到知识，掌握本领，为祖国经济建设服务。近几年来，我国的高等教育自考事业得到了蓬勃发展，多数专业已把高等数学作为必考学科之一，参加高等数学考试的人数也在不断地增加。然而由于高等数学这一学科具有较强的抽象性和逻辑性，同时还必须有较扎实的基础，所以多数考生在学习高等数学时困难较大，考试成绩不够理想。有的考生其它学科均已合格，唯有高等数学久攻不下。编者几年来在给自考学员辅导高等数学时，许多学员要求老师在考试前能给予重点复习，并多做些典型例题。同时多数学员对自学考试题的题型、难易程度均不了解，要求老师在考试前给予介绍，并希望能以原考试题作为考前的模拟试题。鉴于考生的这种愿望，编者将几年来在辅导中积累的一些教学体会和有关资料，编成《高等数学自学考试应试要览》，目的在于帮助广大自考学员在全面学习的基础上，利用考前的复习时间，集中精力，重点复习，掌握主要知识；同时以考试原题进行模拟练习，强化复习效果。这对于自考学员掌握高等数学这门知识，提高考试成绩，无疑是有帮助的。同时由于本书选编的试题，题型全面，涉及面广，对各类大中专院校的学生学习高等数学也将有很大的指导作用。

由于水平有限，缺点和错误在所难免，恳请读者不吝赐教。

贾凤亭

1992年3月

目　录

第一部分

第二部分

第一章　函　数

复习要点及典型例题

一、集合运算

1．交集

（1）**定义**：设有集合A和B，由A和B的所有公共元素构成的集合，称为A与B的交集，记为$A\cap B$，即$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}$。

（2）**性质**：

Ⅰ．$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$

Ⅱ．对任何集合A，有$A\cap\Phi=\Phi$，$A\cap A=A$

2．并集

（1）**定义**：设有集合A和B，由A和B的所有元素构成的集合，称为A与B的并集，记为$A\cup B$，即$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}$。

（2）**性质**：

Ⅰ．$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$

Ⅱ．对任何集合A，有$A\cup\Phi=A$，$A\cup U=U$（U为全集），$A\cup A=A$

3．差集

（1）**定义**：设有集合A和B，属于A而不属于B的所有元素构成的集合，称为A与B的差，记为$A-B$，即$A-B=$

$\{x|x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$.

4．补集

（1）**定义**：全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记为 A'，即：$A'=\{x|x\in U$ 且 $x\overline{\in}A\}$.

（2）**性质**：$A\cup A'=U$，$A\cap A'=\Phi$

例 1 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, \}$，$B=\{3, 4, 5, 6\}$，$C=\{4, 8\}$.

求：（1）$A\cap B$；（2）$A\cup B$；（3）$(A\cup B)\cap C$；（4）$A\cap(B\cup C)$.

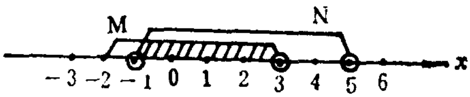
解：（1）$A\cap B=\{3, 4, 5\}$；（2）$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$；

（3）$(A\cup B)\cap C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\cap\{4, 8\}=\{4\}$；

（4）$A\cap(B\cup C)=\{1, 2, 3, 4, 5\}\cap\{3, 4, 5, 6, 8\}=\{3, 4, 5\}$；

例 2 设 $M=\{x|-2\leqslant x<3\}$，$N=\{x|-1<x<5\}$，求 $M\cup N$，$M\cap N$.

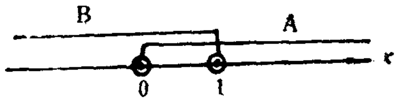
解：如图



$M\cup N=\{x|-2\leqslant x<5\}$，$M\cap N=\{x|-1<x<3\}$

例 3 设 $U=R$，$A=\{x|x>0\}$，$B=\{x|x<1\}$，

求 (1) $A\cap B$；(2) $A\cup B$；(3) $A-B$；(4) A'.



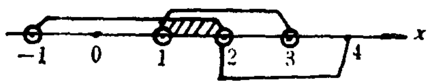
解：如图

(1) $A\cap B=\{x|0<x<1\}$；(2) $A\cup B=R$；

(3) $A-B=\{x|x\geqslant 1\}$；(4) $A'=\{x|x\leqslant 0\}$。

例4 计算$[(-1,2)\cap(1,3)]\cup[2,4]$。

解：如图：



$\because (-1,2)\cap(1,3)=(1,2)$

$\therefore [(-1,2)\cap(1,3)]\cup[2,4]=(1,2)\cup[2,4]=(1,4]$。

注：用列举法或用区间表示的集合之间的运算，首先在数轴上找到参与计算的每一个集合的元素范围（即作图），然后再根据图，找到相应的计算所得的集合元素的范围，写出该集合的表达式即可。

二、函数定义

若D是一个非空实数集合，设有一个对应规则f，使每一个$x\in D$，都有一个确定的实数y与之对应，则称这个对应规则f为定义在D上的一个函数关系，或称变量y是变量x的函数。记作$y=f(x)$，$x\in D$，x称为自变量，y称为因变量。集合D（自变量x的范围）称为函数的定义域，记为$D(f)$，全体函数值的集合$\{y|y=f(x), x\in D(f)\}$称为函数$y=f(x)$的值域，记作$Z(f)$。

1．求函数值

对于函数 $y=f(x)$，求在$x=x_0$处的函数值，只要将点$x=x_0$代入函数解析式$y=f(x)$中，计算出函数值$f(x_0)$即可。

例 1　已知$f(x)=|1+x|+\dfrac{(7-x)(x-1)}{|2x-5|}$，求$f(-2)$

解：将$x=-2$代入$f(x)$的解析式中，得$f(-2)=-2$

例 2　设$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0\\ x-10, & x>0\end{cases}$ 求$f(-2)$和$f(3)$。

解：$f(-2)=1+(-2)^2=5$；$f(3)=3-10=-7$

注：求分段函数$f(x)$在$x=x_0$点的函数值，首先要确定点x_0是在函数定义域中的哪一部分上，然后再将$X=X_0$代入相应的函数解析式中，计算函数值。本题$x_0=-2$处于定义域中$x\leqslant 0$内，故将$x_0=-2$代入$f(x)=1+x^2$内，得$f(-2)=5$；而$x_0=3$处于函数定义域中$x>0$内，故将$x=3$代入$f(x)=x-10$中，得$f(3)=-7$.

例 3　设$f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0\\ 1+x^2 & 0\leqslant x<2\end{cases}$，求$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

解：$0<\dfrac{\pi}{2}<2$，故$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=1+\dfrac{\pi^2}{4}$。

例 4　设$f(x)=x^2+x+7$，求$f\{f(1)\}$

解：$\because f(1)=9$，$\therefore f\{f(1)\}=9^2+9+7=97$

2．求函数定义域

求函数定义域，一般来说，主要是根据函数的表达式（解析式）来确定，下面几种形式常用到：

（1）分式函数 $\dfrac{1}{g(x)}$，定义域由分母$g(x)\neq 0$来确定；

（2）偶次根式$\sqrt[m]{g(x)}$，定义域由被开方函数 $g(x)\geqslant 0$ 来确定；

（3）对数函数$\log_a g(x)$，定义域由真数函数 $g(x)>0$ 来确定；

（4）反正弦函数 $\arcsin g(x)$ 及反余弦函数 $\arccos g(x)$，定义域由$|g(x)|\leqslant 1$来确定；

（5）由上述几个函数经四则运算得到的函数定义域，是每个函数定义域的交集；

（6）复合函数的定义域。

设函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，如果 $y=f(u)$ 的定义域为集合D，即u的变化范围为集合D，而$u=\varphi(x)$，则$\varphi(x)$ 也必须满足集合D的要求，再从中解出x的变化范围集合M，则集合M就是复合函数$y=f[\varphi(x)]$的定义域。

（7）分段函数的定义域。

分段函数的定义域就是函数的每个定义区间的并集。

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{|1-x^2|}$；(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+3x-4}$；(3) $y=\lg(2-x^2)$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$。

解：（1）由 $|1-x^2|\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$，∴定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

（2）$\begin{cases}x+3\geqslant 0\\ x^2+3x-4\neq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant -3\\ x\neq 1,\ x\neq -4\end{cases}$

$\Longrightarrow x\geqslant -3$且$x\neq 1$

$\therefore$定义域为$[-3,1)\cup(1,+\infty)$

（3）$2-x^2>0 \Longrightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ $\therefore$定义域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

（4）$\left|\dfrac{x+1}{2}\right|\leqslant 1 \Longrightarrow -1\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1 \Longrightarrow -3\leqslant x\leqslant 1$

$\therefore$定义域为$[-3,1]$

例 2 设$y=f(x)$的定义域为$(-1,3]$，求$f(x+1)$的定义域。

解：函数$y=f(x)$的定义域为$(-1,3]$，即$-1<x\leqslant 3$，而对于函数$y=f(x+1)$来说，$x+1$也得满足条件$-1<x+1\leqslant 3$，解得$-2<x\leqslant 2$，故$f(x+1)$的定义域为$(-2,2]$。

例 3 设函数$f(u)$的定义域为$1<u<2$，求$f(\ln x)$的定义域。

解：由已知条件，必有$1<\ln x<2$，解得$e<x<e^2$即$f(\ln x)$的定义域为(e,e^2)。

例 4 求函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & |x|\leqslant 2\\ 0\ , & |x|>2\end{cases}$的定义域

解：$f(x)$的定义区间分别为$[-2,2]$及$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，故$f(x)$的定义域为$[-2,2]\cup[(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)]=R$

例 5 求函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|<2\end{cases}$的定义域

解：由$|x|\leqslant 1$得 $-1\leqslant x\leqslant 1$

由$1<|x|<2$ 得$-2<x<-1$或$1<x<2$

即函数$f(x)$的定义区间分别是$[-1,1]$，$(-2,-1)$，$(1,2)$

故$f(x)$的定义域为$(-2,-1)\cup[-1,1]\cup(1,2)=(-2,2)$。

3. 判断两个函数相同

设函数$y=f(x)$及$y=g(x)$，如果$f(x)$与$g(x)$：(1) 定义域相同；(2) 对应关系相同（即对于定义域内的每一个点，$f(x)$与$g(x)$都有相等的函数值），则函数$f(x)$与$g(x)$一定相同。

例1 判断下列函数是否相同？

（1）$f(x)=\lg x^2$与$g(x)=2\lg x$；

（2）$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=\sqrt{x^2}(-\infty<x<\infty)$与$g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$；

（4）$f(x)=1$与$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$。

解：（1）$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，$g(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$两个函数定义域不相同，故$f(x)\neq g(x)$。

（2）$f(x)$与$g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$但当$x<0$时，比如$x=-2$，$f(-2)=-2$，$g(-2)=2$，函数值不相等，即函数关系不相同，故$f(x)\neq g(x)$；

（3）$f(x)$与$g(x)$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，并且对于$(-\infty,+\infty)$中的每一点x_0，都有$f(x_0)=g(x_0)$即对应关系相同，故$f(x)=g(x)$；

（4）$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，都是$(-\infty,+\infty)$，对于$(-\infty,+\infty)$中的每一点x_0，$f(x_0)=g(x_0)$即对应关系相同，故$f(x)=g(x)$。

三、函数的奇偶性

对于函数$y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若$f(-x)=$

$-f(x)$，则称$f(x)$为奇函数；若$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为偶函数；若 $f(-x)\neq -f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$，则称$f(x)$为非奇非偶函数。

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于y轴对称。

例 1 判断下列函数的奇偶性

（1）$f(x)=x-4\sin x$；（2）$f(x)=x^2\cos x$；

（3）$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；（4）$f(x)=|x+1|$.

解：（1）$\because f(-x)=-x-4\sin(-x)$

$$=-x+4\sin x$$

$$=-(x-4\sin x)$$

$$=-f(x)$$

$\therefore f(x)$为奇函数

（2）$\because f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$

$\therefore f(x)$为偶函数

（3）$\because f(-x)=\frac{1}{2}[e^{-x}+e^{-(-x)}]$

$$=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^x)$$

$$=f(x)$$

$\therefore f(x)$为偶函数

（4）$\because f(-x)=|-x+1|$

$f(x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$

$\therefore f(x)$为非奇非偶函数

例 2　下列函数中，哪个函数关于原点对称？

（1）$f(x)=2x^2+\sin^2x$；

（2）$f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3）$f(x)=(x+1)^3$。

解：（1）$\because f(-x)=2(-x)^2+\sin^2(-x)$

$$=2x^2+\sin^2x=f(x)$$

$\therefore f(x)$为偶函数，图象关于y轴对称。

（2）$f(-x)=\ln[-x+\sqrt{1+(-x)^2}]$

$$=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=-f(x)$$

$\therefore f(x)$为奇函数，其图象关于原点对称。

（3）$\because f(-x)=(-x+1)^3$

$$=-(x-1)^3$$

$f(-x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$

$\therefore f(x)$为非奇非偶函数。

$\therefore$只有函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的图象关于原点对称。

四、反函数

设函数$y=f(x)$其定义域为D，值域为M，如果对于M中的每一个值y，都可以从关系式$y=f(x)$确定唯一的x值与之对应，那么确定的以y为自变量的函数$x=f^{-1}(y)$以做函数$y=f(x)$的

反函数，它的定义域为M，值域为D，习惯上用x表示自变量，用y表示因变量，所以将$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$改写为$y=f^{-1}(x)$。

函数$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称。

例 1 求下列函数的反函数

（1）$y=\dfrac{x}{1+x}$；　（2）$y=e^{x+1}$；

（3）$y=x^2$，$x\in(-\infty,0)$。

解：（1）由$y=\dfrac{x}{1+x}$解出$x=\dfrac{y}{1-y}$，改写为$y=\dfrac{x}{1-x}$，所以函数$y=\dfrac{x}{1+x}$的反函数为$y=\dfrac{x}{1-x}$；

（2）取对数$\ln y=x+1$　$\therefore x=\ln y-1$，改写为$y=\ln x-1$，即$y=e^{x+1}$的反函数为$y=\ln x-1$。

（3）由$y=x^2$解得$x=\pm\sqrt{y}$，由已知$x\in(-\infty,0)$，故应取$x=-\sqrt{y}$，$y\in(0,+\infty)$，改写为$y=\sqrt{x}$，$x\in(0,+\infty)$

例 2 求$y=|e^x-1|$　$x\in(-\infty,0)$的反函数

解：当$x\in(-\infty,0)$时$y=1-e^x$，解出$x=ln(1-y)$，$y\in(0,1)$，改写为$y=\ln(1-x)$，$x\in(0,1)$。

五、复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为$D(f)$，$u=\varphi(x)$的值域为$z(\varphi)$，$z(\varphi)\cap D(f)$非空，则称$y=f[\varphi(x)]$为复合函数，x为自变量，u为中间变量，y为因变量。

例 1 设函数$f(x)=x^3$，$\varphi(x)=2^x$，求$f[\varphi(x)]$

解：$f[\varphi(x)]=[\varphi(x)]^3=(2^x)^3=2^{3x}=8^x$。

例 2 设函数$f(x)=(5x-2)e^{2x}$，$\varphi(x)=\ln x$。求$f[\varphi(x)]$

解：$f[\varphi(x)]=[5\varphi(x)-2]e^2\varphi(x)$

$$=[5\ln x-2]e^{2\ln x}$$

$$=(5\ln x-2)x^2。$$

例 3 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，求$f\{f(x)\}$

解：$f\{f(x)\}=\begin{cases}1, & |f(x)|\leqslant 1\\ 0, & |f(x)|>1\end{cases}$，

由于 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，无论$x$为何值，都有$|f(x)|\leqslant 1$

故$f\{f(x)\}=1$。

例 4 已知$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x}{x+1}$，求$f(x)$

解：$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$

$$\therefore f(x)=1-x$$

第二章　极限与连续

复习要点及典型例题

一、极限概念

1．数列极限定义

如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正整数N，当$n>N$时，$|y_n-A|<\varepsilon$恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列y_n以常数A为极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}y_n=A$或$y_n\to A(n\to\infty)$

2．函数极限定义

（1）当$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数M，使得当一切$|x|>$M时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称当x趋于无穷大时，函数$f(x)$以常数A为极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A$ $(x\to\infty)$．

注意：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$表示$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$及$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$同时成立．

（2）当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

如果对于任意给定的正数ε，总存在一个正数δ，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立，则称当x趋于x_0时，函数$f(x)$以常数A为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$ $(x\to x_0)$。

3．函数左、右极限定义

如果当x从x_0的左侧$(x<x_0)$趋于x_0时，$f(x)$以A为极