高等学校高职单独招生公共课统一考试丛书

紧扣考试说明　全面复习要点
突出重点难点　全真模拟测试
检测学习效果　提高应试能力

2003 高职招生考试复习指南

数学

高职入学考试研究组

北京大学出版社

2003年高职招生考试复习指南

数　　学

高职入学考试研究组

北京大学出版社
·北　　京·

图书在版编目(CIP)数据

2003年高职招生考试复习指南·数学/冯翠莲编著.—北京：北京大学出版社，2002.9
ISBN 7-301-05861-6

Ⅰ.高…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第067294号

书　　名：2003年高职招生考试复习指南·数学
著作责任者：冯翠莲　编著
责任编辑：陈小红
标准书号：ISBN 7-301-05861-6/G·0764
出 版 者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：出版部62752015　发行部62754140　邮购部62752019
电子信箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者：北京大学印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
787×1092　16开本　14.25印张　340千字
2002年9月第1版　2002年9月第1次印刷
印　　数：0001—5000册
定　　价：18.50元

编写说明

近年来全国高等职业教育有较快的发展，尤其是部分高等学校高等职业教育(以下简称高职班)实行单独招生，招收普通高中、职高、中专、技校的应届、往届毕业生，牵动了无数学生和家长的心。鉴于高职教育是培养应用型人才新的教育模式，其招生考试在全国没有统一的招生、命题机构，也无统一的复习考试大纲，故对各地考生参加高职招生考试的复习带来一定的困难。为了帮助广大考生更好地复习数学、语文、英语这三门公共课，根据我们多年在高职招生考前辅导班积累的丰富教学经验，在深入调查研究北京市及其他各地高职考试大纲和历届考试试卷基础上，我们应邀按照《2002年北京市高等学校高职班单独招生公共课统一考试说明》编写了《2003年高职招生考试复习指南·数学》，希望能对全国各地的高职考生在复习时有所帮助，以增强他们的应试能力，提高考试成绩。为了使考生了解北京市高职班单独招生考试的考试要求及试卷结构，我们在书末附有《2002年北京市高等学校高职班单独招生**数学考试说明**》(以下简称《数学考试说明》)和《2002年北京市普通高等学校高职班招生统一考试·数学》试卷，供广大考生复习时参考。

本书编写的宗旨是：帮助广大考生加深对高职《数学考试说明》的理解，更好地对命题思路和规律进行分析和把握；帮助广大考生站在更高的层次，更完整地掌握知识结构，使所学知识更加系统化、条理化，提高考生的应试能力。

全书有以下特点：

紧扣考试说明——将每章节的知识点系统地进行归纳、分析、总结，突出重点、难点、要点。

注重解题思路——通过对考点进行研究，对所选例题以考试内容为主线进行归类，对典型例题进行分析、点评，给出同类题的解题思路和程序，从而使读者具备举一反三、触类旁通的本领，提高分析问题和解决问题的能力。在例题的编排上，注意各种题型的搭配，既有选择题、填空题，又有解答题(包括计算题、证明题和应用题等)；注意难易结合，既有基本题，也有一定难度的综合题；并注意到命题思想、特色及发展趋势。

配备题型练习——在每章节之后都配有适当的巩固性练习题，并将精选的每道练习题都给出解答与提示，以便于考生及时进行自测，找出差距，提高复习质量和效率，加强复习的针对性。

全真模拟测试——通过4套题型、题量、难易程度完全模拟实际考试的综合性全真模拟测试，可以测试自己的真实水平，迅速进入临考状态，增强应考答题的悟性和技巧。

读者阅读此书，可以开阔眼界，增强分析问题、解决问题和参加应试的能力。全书可以作为高职入学考试考生及成人高考考生的复习用书，也可以作为授课教师的参考书。

本书是在北京高职入学考试研究组指导下编写的，并有薛世明、梁丽芝、赵惠斌、蔡利珍、葛振三、胡家斌等同志参加本书的讨论，提出了宝贵意见，在此一并致谢。

由于时间所限，错误在所难免，恳请读者不吝指正。

编　者

2002年8月于北京

目　录

第一章　集合·逻辑用语

§1　集　　合

【知识点】

一、集合的概念

1. 集合

具有某种属性的对象放在一起就成为一个**集合**，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示；集合中的每个对象称为该集合的**元素**，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示.

若元素 a 在集合 A 中，记作 $a\in A$；若元素 a 不在集合 A 中，记作 $a\notin A$（或 $a\overline{\in}A$）.

按集合元素的数量，集合可分为有限集和无限集.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$.

由所研究的所有对象构成的集合称为**全集**，记作 $\boldsymbol{U}$. 需要特别指出的是，全集具有相对性，是相对于所研究的问题而言的.

以数为元素的集合称为数集. 其中数 0 和正整数构成的集合称为自然数集，记作 $\boldsymbol{N}$；整数集记作 $\boldsymbol{Z}$（正整数集记作 $\boldsymbol{Z}^{+}$[①]，负整数集记作 $\boldsymbol{Z}^{-}$）；有理数集记作 $\boldsymbol{Q}$（正有理数集记作 $\boldsymbol{Q}^{+}$，负有理数集记作 $\boldsymbol{Q}^{-}$）；实数集记作 $\boldsymbol{R}$（正实数集记作 $\boldsymbol{R}^{+}$，负实数集记作 $\boldsymbol{R}^{-}$）；复数集记作 $\boldsymbol{C}$.

以下讨论的集合除第八章复数外均是实数集，这样，当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时有时省略不写.

2. 集合的表示方法

(1) 列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号{　}内.

(2) 描述法：把集合中元素的公共属性，写在大括号{　}内.

为了形象地理解集合的概念，有时用图形，如圆或某一封闭曲线表示集合.

二、集合的关系与集合的运算

1. 集合的关系

(1) 子集：对于两个集合 A 与 B，若 A 中的任何一个元素都在 B 中，称 A 为 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

子集的性质：① $A\subseteq A$；② $\varnothing\subseteq A$（空集是任何集合的子集）；③ 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(2) 真子集：若 A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A，称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$.

例如，常见的几种数集有如下关系：

$$\boldsymbol{N}\subsetneqq\boldsymbol{Z}\subsetneqq\boldsymbol{Q}\subsetneqq\boldsymbol{R}\subsetneqq\boldsymbol{C}.$$

(3) 集合相等：对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$；否则，称 A 与 B **不相等**，记作 $A\neq B$.

---

① 本书用 $\boldsymbol{Z}^{+}$ 表示正整数集合.

2. 集合的运算

(1) 交集：由集合 A 与 B 的公共元素构成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

如图 1-1 中阴影区域所示.

交集的性质：

① $A\cap A=A$；② $A\cap\varnothing=\varnothing$；③ $A\cap B=B\cap A$；④ 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap B=A$.

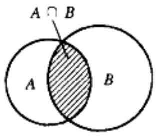

图 1-1

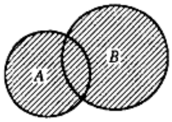

图 1-2

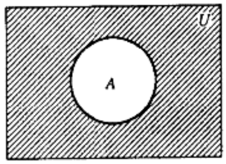

图 1-3

(2) 并集：由集合 A 与 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\},$$

如图 1-2 中阴影区域所示.

并集的性质：

① $A\cup A=A$；② $A\cup\varnothing=A$；③ $A\cup B=B\cup A$；④ 若 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$.

(3) 补集：已知全集为 U，且集合 $A\subseteq U$，由 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 在全集 U 中的补集，记作 $\overline{A}$(或 $C_U A$)，即

$$\overline{A}=\{x\mid x\in U,\text{且 }x\notin A\}.$$

如图 1-3 中阴影区域所示.

补集的性质：

① $A\cup\overline{A}=U$；② $A\cap\overline{A}=\varnothing$；③ $\overline{\overline{A}}=A$；④ $\overline{\varnothing}=U$；⑤ $\overline{U}=\varnothing$.

三、区间

区间可理解为实数集 $\boldsymbol{R}$ 的子集，区间可分为**有限区间**和**无限区间**.

1. 有限区间

设 $a,b\in\boldsymbol{R}$，且 $a<b$.

集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 记作 (a,b)，称为以 a,b 为端点的**开区间**.

集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 记作 $[a,b]$，称为以 a,b 为端点的**闭区间**.

集合 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$，这是**半开区间**.

以上各有限区间的长度都为 $b-a$.

2. 无限区间

集合 $\{x\mid x>a\}$，记作 $(a,+\infty)$；类似的，$\{x\mid x\geqslant a\}$ 记作 $[a,+\infty)$、$\{x\mid x<b\}$ 记作 $(-\infty,b)$、$\{x\mid x\leqslant b\}$ 记作 $(-\infty,b]$；实数集 $\boldsymbol{R}$ 记作 $(-\infty,+\infty)$.

本书在以后的叙述中，若我们所讨论的问题在任何一个区间上都成立时，将用字母 I 表示这样一个泛指的区间.

【考点、解题方法及例题分析】

一、元素与集合之间的关系，集合与集合之间的关系

“$\in,\notin$”是指元素与集合的关系；“$\subseteq,\subsetneqq,=,\neq$”是指两个集合之间的关系，在使用时不能

用错.

例 1 判断下列各式对否：

(1) $0\in \boldsymbol{N}$；　(2) $\varnothing\in \boldsymbol{Q}$；　(3) $0\in\{0\}$；　(4) $\varnothing\in\{0\}$；

(5) $0\in \boldsymbol{R}^{+}$；　(6) $0\in\varnothing$；　(7) $\{x\mid x^2-1=0\}\in\{-1,1\}$；

(8) 点$(-2,3)\in\{(x,y)\mid x\in \boldsymbol{R},y\in \boldsymbol{R}\}$；　(9) $\{0,1\}\in\{(0,1)\}$；

(10) $\{(a,b)\}\in\{(b,a)\}$；　(11) 点$(1,-1)\in\{y\mid y^2=x\}$；

(12) $(1,-1)\in\{(x,y)\mid y^2=x\}$.

分析 (1),(3),(5),(6),(8),(11),(12)都是讨论元素与集合之间的关系；而(2),(4),(7),(9),(10)是讨论两个集合之间的关系.

解 (1) 对；　(2) 错. 可改为$\varnothing\subsetneqq \boldsymbol{Q}$；　(3) 对；

(4) 错. 可改为$\varnothing\subsetneqq\{0\}$；　(5) 错. 应改为 $0\notin \boldsymbol{R}^{+}$；

(6) 错. 应改为 $0\notin\varnothing$；　(7) 错. 应改为$\{x\mid x^2-1=0\}=\{-1,1\}$；

(8) 对；　(9) 错. 应改为$\{0,1\}\neq\{(0,1)\}$；

(10) 错. 当 $a=b$ 时，$\{(a,b)\}=\{(b,a)\}$；当 $a\neq b$ 时，$\{(a,b)\}\neq\{(b,a)\}$；

(11) 错. 应改为点$(1,-1)\notin\{y\mid y^2=x\}$或点$(1,-1)\in\{(x,y)\mid y^2=x\}$；

(12) 对.

点评 空集$\varnothing$是重要的特殊集合，是任何集合的子集，值得重视；0 是一个较特殊的自然数，应予以注意；$\{0\}$是以 0 为元素的单元素集(仅含有一个元素的集合，称为**单元素集**)；(10)中的 $a=b$ 是可能出现的特殊情况，不可不考虑到.

例 2 设集合 $A=\{-1,0,1\}$，$B=\{0\}$，则下列正确的是①(　　).

(A) $B=\varnothing$；　(B) $B\in A$；　(C) $B\subsetneqq A$；　(D) $A\subsetneqq B$.

解 B 是以 0 为元素的单元素集，不是空集，A 错；且由于 $0\in B,0\in A$，且 $1\in A$ 但 $1\notin B$，所以 $B\subsetneqq A$，选 C.

例 3 设 A,B 是两个非空集合，且 $A\neq B$，则必有(　　).

(A) $\varnothing\in A\cap B$；　(B) $\varnothing=A\cap B$；　(C) $\varnothing\subsetneqq A\cap B$；　(D) $\varnothing\subseteq A\cap B$.

解 由$\varnothing,A,B$ 都是集合，可知 A 错；由于题中仅知 $A\neq B$，而$\varnothing$是任何集合的子集，所以$\varnothing\subseteq A\cap B$，应选 D.

二、集合中的元素所具有的性质

集合中的元素具有以下性质：

(1) 确定性：对每一个集合而言，某对象是否是该集合的元素应是确定的，形成集合的条件应是明确的；

(2) 互异性：一个集合中的元素互不相同，元素不允许重复；

(3) 无序性：不考虑集合中元素的顺序.

例 1 讨论下列每组中各集合的意义是否相同：

(1) $\{x\mid x^2-ax+1=0,x\in \boldsymbol{R}\}$，$\{a\mid$方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根，$a\in \boldsymbol{R}\}$；

(2) $\{x\mid x^2-2x+1=0\}$，$\{1\}$.

解 (1) $\{x\mid x^2-ax+1=0,x\in \boldsymbol{R}\}$中的元素 x 是方程 $x^2-ax+1=0$ 的实数解(最多两

① 本书的选择题都是四选一型的单项选择题.

个)；$\{a \mid$ 方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根，$a\in \boldsymbol{R}\}$中的元素 a 是使方程 $x^2-ax+1=0$ 有实根的字母系数 a 的取值范围($a\geqslant 2$ 或 $a\leqslant -2$). 这两个集合所含的元素不同，故不是同一集合；

(2) $\{x \mid x^2-2x+1=0\}$中的元素 x 是方程 $x^2-2x+1=0$ 的实数解 $x_1=x_2=1$，根据集合中元素的互异性，$\{x \mid x^2-2x+1=0\}=\{1\}$.

例 2 若集合 $A=\{x \mid ax^2+2x+a=0, a\in \boldsymbol{R}\}$中有且只有一个元素，则 a 的取值的集合是(　　).

(A) $\{1\}$；　　(B) $\{-1\}$；　　(C) $\{-1,1\}$；　　(D) $\{-1,0,1\}$.

解 当 $a=0$ 时 $x=0$，符合题意；当 $a\neq 0$ 时，要使一元二次方程 $ax^2+2x+a=0$ 有两个相等的实数根(据集合中元素的互异性，此时 A 仍只含有一个元素)，必须有一元二次方程根的判别式 $\Delta=4-4a^2=0$，得 $a=\pm 1$，所以应选 D.

点评 本题易忽略对 $a=0$ 的考查.

三、集合运算

(1) 集合运算有交集、并集和补集. 在进行集合运算时，必须严格按照定义，正确表示，并注意运算性质.

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$，注意这里是"**且**"字. 若用列举法表示，要在大括号{　}内写进 A 与 B 的公共元素；特别注意性质 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$，注意这里是"**或**"字. 若用列举法表示，要在大括号{　}内写进 A 与 B 的所有元素；特别注意性质 $A\cup\varnothing=A$.

$\overline{A}=\{x \mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$，注意这里是"**且**"字，也可写成"**而**"字. 补集是相对于全集 U 而言. 若用列举法表示，要把全集 U 中属于 A 的元素去掉，把剩下的元素写进大括号{　}内，特别注意性质 $\overline{\varnothing}=U$，$\overline{U}=\varnothing$.

求 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 时，应先算出 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$，再算 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 的交或并，也可用性质

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

(2) 进行集合运算时，若题目没有要求，可以用列举法也可用描述法表示结果；若题目指定了表示方法，则必须按要求行事.

(3) 求以不等式为条件的某些数集的交集、并集和补集时，可以借助于数轴，具有直观性.

例 1 设全集 $\boldsymbol{U}=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，集合 $M=\{a,b,c,d\}$，$N=\{b,c,e,f\}$. 求：

(1) $M\cap N$；(2) $M\cup N$；(3) $\overline{M\cap N}$；(4) $\overline{M\cup N}$；(5) $\overline{M}\cup\overline{N}$；(6) $\overline{M}\cap\overline{N}$；(7) $M\cap\overline{N}$.

解 (1) $M\cap N=\{b,c\}$；　(2) $M\cup N=\{a,b,c,d,e,f\}$；

(3) 由(1)及补集的求法，$\overline{M\cap N}=\{a,d,e,f,g\}$；

(4) 由(2)及补集的求法，$\overline{M\cup N}=\{g\}$；

(5) 因为 $\overline{M}=\{e,f,g\}$，$\overline{N}=\{a,d,g\}$，所以 $\overline{M}\cup\overline{N}=\{a,d,e,f,g\}$；

(6) $\overline{M}\cap\overline{N}=\{g\}$；　(7) 由 M 及 $\overline{N}$，$M\cap\overline{N}=\{a\}$.

点评 通过该例题，可以得到以下规律：

$$\overline{M\cap N}=\overline{M}\cup\overline{N};\quad \overline{M\cup N}=\overline{M}\cap\overline{N},$$

这就是著名的**德·摩根定理**.

例 2 若 a 为实数，集合 $A=\{-5,a+1,a^2\}$，$B=\{a^2+1,a-5,2a-1\}$，且 $A\cap B=\{-5\}$，则 $a=$(　　).

(A) 2；　　(B) 0；　　(C) -2；　　(D) 1.

分析 本题的特点是已知 $A\cap B$，求集合 A 与 B 中所含的未知字母 a.

解题思路 应据集合中元素的互异性，并对比 A,B 的元素，采用排他法分析：首先，对任意实数 a，$a^2+1\neq-5$；而 $a-5=-5$，即 $a=0$ 时，$A=\{-5,1,0\}$，$B=\{1,-5,1\}$，$A\cap B=\{-5,1\}$ 与已知 $A\cap B=\{-5\}$ 矛盾. 只有可能 $2a-1=-5$.

解 由 $2a-1=-5$ 得 $a=-2$. 此时 $A=\{-5,-1,4\}$，$B=\{5,-7,5\}$，$A\cap B=\{-5\}$ 符合题意，选 C.

例 3 已知 $A=\{-2,0,2\}$，$B=\{0,1,2\}$，$C=\{1,2,3\}$，则 $(B\cup C)\cap A=($　　$)$.

(A) $\{0,1,2,3,4\}$；　　(B) $\varnothing$；

(C) $\{0,2\}$；　　(D) $\{0\}$.

解 由于

$$B\cup C=\{0,1,2,3\},$$

所以

$$(B\cup C)\cap A=\{0,2\}.$$

选 C.

例 4 设集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-35=0\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

(A) $\{2,3\}$；　(B) $\{-5,7\}$；　(C) $\{2,3,-5,7\}$；　(D) $\varnothing$.

解 由 $A=\{2,3\}$，$B=\{-5,7\}$，知 $A\cap B=\varnothing$，故选 D.

例 5 设集合 $A=\{(x,y)\mid 2x+y=3\}$，$B=\{(x,y)\mid x-2y=9\}$，则 $A\cap B=$________.

分析 本题中的 A 与 B 分别是二元一次方程 $2x+y=3$ 和 $x-2y=9$ 的解集. 求 $A\cap B$ 就是求同时满足这两个方程的解集，即求由这两个方程联立起来的方程组的解集.

解 由 $\begin{cases}2x+y=3,\\x-2y=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=-3,\end{cases}$

所以 $A\cap B=\{(-3,3)\}$，填 $\{(-3,3)\}$.

点评 本题常见错误是：$A\cap B=\{-3,3\}$.

例 6 设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid 2<x\leqslant5\}$，$N=\{x\mid x\geqslant3\}$，求：

(1) $M\cap N$；(2) $M\cup N$；(3) $\overline{M}$；(4) $\overline{N}$；(5) $M\cap\overline{N}$.

解 如图 1-4.

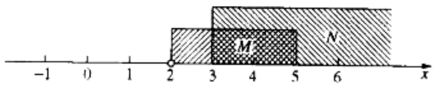

图 1-4

(1) $M\cap N=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant5\}$；

(2) $M\cup N=\{x\mid x>2\}$；

(3) $\overline{M}=\{x\mid x\leqslant2$ 或 $x>5\}$；

(4) $\overline{N}=\{x\mid x<3\}$；

(5) $M\cap\overline{N}=\{x\mid 2<x<3\}$.

例 7 设 $M=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$N=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则正确答案是(　　).

(A) $M\cup N=\varnothing$；　(B) $M\cup N=N$；　(C) $M\cap N=N$；　(D) $M\cap N=\varnothing$.

解 由于 $M=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0$ 或 $x<0$ 且 $y<0\}$，而 $N=\{(x,y)\mid x>0$ 且 $y>0\}$，则 $M\supsetneqq N$，所以应有 $M\cup N=M$，$M\cap N=N$，故选 C.

【题型练习一】

一、选择题

1. 设集合 $M=\{x\mid x\geqslant0\}$，则下列关系正确的是(　　).

(A) $0\subsetneqq M$；　(B) $\{0\}\subsetneqq M$；　(C) $\{0\}\in M$；　(D) $0\subseteq M$.

2. 若 $A=\{$有理数$\}$，$B=\{$无理数$\}$，那么 $A\cap B=$(　　).

(A) $\varnothing$；　(B) $\{0\}$；　(C) $\{$实数$\}$；　(D) 0.

3. 设集合 $A=\{(x,y)\,|\,|x+1|+(y-2)^2=0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则集合 A 与 B 的关系是(　　).

(A) $A\supsetneqq B$；　(B) $A\subsetneqq B$；　(C) $A\in B$；　(D) (A)，(B)，(C)都不对.

4. 若 $a,b\in \boldsymbol{R}$，$A=\{(a,b)\,|\,ab=0\}$，$B=\{(a,b)\,|\,a^2+b^2=0\}$，$C=\{(a,b)\,|\,(a-b)^2=0\}$，$D=\{(a,b)\,|\,a^2=b^2\}$，则下列关系中正确的个数是(　　).

① $B\subsetneqq A$；　② $B\subsetneqq C$；　③ $C\subsetneqq D$；　④ $B\subsetneqq D$.

(A) 1 个；　(B) 2 个；　(C) 3 个；　(D) 4 个.

5. 设全集 $U=\{-2,-1,0,1,2\}$，$M=\{-1,1\}$，$N=\{-2,2\}$，则 $M\cap \overline{N}=$(　　).

(A) $\{-1,0,1\}$；　(B) $\{-1,1\}$；　(C) $\{0\}$；　(D) $\varnothing$.

6. 已知 $A=\{3,-2\}$，$B=\{x\,|\,ax+2=0\}$，$A\cup B=A$，则实数 a 所有可能取值构成的集合为(　　).

(A) $\left\{-\frac{2}{3},1,0\right\}$；　(B) $\left\{\frac{2}{3},-1\right\}$；　(C) $\left\{\frac{3}{2},-1\right\}$；　(D) $\left\{-\frac{3}{2},1\right\}$.

7. 设 $M=\{x\,|\,x\geqslant -3\}$，$N=\{x\,|\,x<6\}$，则 $M\cup N=$(　　).

(A) $\{x\,|\,-3\leqslant x<6\}$；　(B) $\{x\,|\,-3<x<6\}$；

(C) $\boldsymbol{R}$；　(D) $\varnothing$.

8. 直角坐标系中，坐标轴上的点的集合可表示为(　　).

(A) $\{(x,y)\,|\,x=0,y\neq 0$ 或 $x\neq 0,y=0\}$；　(B) $\{(x,y)\,|\,x=0$ 且 $y=0\}$；

(C) $\{(x,y)\,|\,x,y$ 不同时为 $0\}$；　(D) $\{(x,y)\,|\,xy=0\}$.

9. 设(x,y)表示直角坐标平面内的点，则集合 $M=\{(x,y)\,|\,xy\leqslant 0\}$(　　).

(A) 在第二象限；　(B) 在第四象限；

(C) 在第二、四象限；　(D) 不在第一、三象限.

10. 设 a,b,c 为非零的实数，$M=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$的值组成的集合为(　　).

(A) $\{4\}$；　(B) $\{-4\}$；　(C) $\{-4,4,0\}$；　(D) $\{0\}$.

二、填空题

1. 设集合 A 中含有 n 个元素，则 A 的子集共有________个；A 的真子集有________个；A 的非空真子集有________个.

2. 设 $A=\{x\,|\,-3<x<5\}$，$B=\{x\,|\,x<a\}$，且满足 $A\subsetneqq B$，则实数 a 的取值范围为________.

3. 设 $a<0<b<|a|$，$A=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{x\,|\,-b\leqslant x\leqslant -a\}$，则 $A\cap B=$________；$A\cup B=$________.

4. 设 $A=\{(x,y)\,|\,a_1x+b_1y+c_1=0\}$，$B=\{(x,y)\,|\,a_2x+b_2y+c_2=0\}$，则方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ 的解集是________；方程$(a_1x+b_1y+c_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2)=0$ 的解集是________.

5. 设全集为 $\boldsymbol{R}$，集合 $M=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 8\}$，$N=\{x\,|\,3\leqslant x\leqslant 6\}$，则 $M\cap\overline{N}=$________.

三、解答题

1. 设集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，$a\neq0$，且 $M=N$，求 q 的值.

2. 如果集合 $A=\{2,5,a^2-3a+5\}$，$B=\{1,3,a^2-6a+10\}$，且 $A\cap B=\{2,3\}$，求实数 a.

§2 逻辑用语

【知识点】

一、逻辑联结词

1. 命题

(1) 具有判断且可以判断真假的语句称为**命题**；不需判断或无法判断真假的语句不称为命题.

(2) 如果一个命题正确反映了客观实际，它就是**真命题**；反之，它就是**假命题**. 一个命题不是真就是假，必居其一.

2. 简单命题与复合命题

(1) 不含逻辑联结词的命题称为**简单命题**.

(2) 由简单命题和逻辑联结词构成的命题称为**复合命题**；命题中的**逻辑联结词有"且∧"、"或∨"、"非¬"**.

3. 真值表

真值表是根据简单命题的真假，判断由这些简单命题与逻辑联结词构成的复合命题的真假的工具，它并不涉及简单命题之间的具体内容，见表 1-1.

表 1-1

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\vee q$	$p\wedge q$	$\neg(p\vee q)$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg p\wedge\neg q$	$\neg(\neg p)$
真	真	假	假	真	真	假	假	假	假	真
真	假	假	真	真	假	假	真	真	假	真
假	真	真	假	真	假	假	真	真	假	假
假	假	真	真	假	假	真	真	真	真	假

说明 $\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$；$\neg(p\wedge q)=\neg p\vee\neg q$；$\neg(\neg p)=p$.

逻辑联结词与集合并、交、补的定义以及不等式解集的表达密切相关. $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；$\overline{A}$ 是全集 U 中非集合 A 的元素组成的集合. 如不等式 $x^2-2x-3>0$ 的解集是 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>3\}$，其中的或、且、非均与逻辑联结词的含义一致.

二、充分条件和必要条件

1. 符号说明

(1) 符号"$\Longrightarrow$"为**推断符号**. "$p\Longrightarrow q$"表示"若 p 则 q"为真命题；"$p\not\Longrightarrow q$"表示"若 p 则 q"为假命题；

(2) 符号"$\Longleftrightarrow$"为**等价符号**. "$p\Longleftrightarrow q$"表示"$p\Longrightarrow q$ 且 $p\Longleftarrow q$"，也表示"p 等价于 q".

2. 在讨论条件 p 和条件 q 的关系时，要注意

(1) 若 $p\Longrightarrow q$，但 $q\not\Longrightarrow p$，则 p 是 q 的充分但不必要条件；

(2) 若 $q\Longrightarrow p$，但 $p\not\Longrightarrow q$，则 p 是 q 的必要但不充分条件；

(3) 若 $p \Rightarrow q$，且 $q \Rightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件；

(4) 若 $p \Rightarrow q$，且 $\neg p \Rightarrow \neg q$，则 p 是 q 的充要条件；

(5) 若 $p \not\Rightarrow q$，且 $q \not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

【考点、解题方法及例题分析】

一、判断简单命题的真假的思路

若一个命题正确反映客观实际，它便是真命题，否则便是假命题. 对于假命题，还可通过举反例进行说明.

例 1 下列命题中是真命题的是(　　).

(A) $\{\varnothing\}$是空集；　　(B) 方程 $x^2-3x=0$ 的根为自然数；

(C) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid x^2-9 \leqslant 0\}$是无限集；　　(D) $\sin 60°=\dfrac{1}{2}$.

解 (A) $\{\varnothing\}$是含单元素$\varnothing$的集合，不是空集，A 是假命题；

(B) 方程 $x^2-3x=0$ 的根为 $x_1=0, x_2=3$，而 0 与 3 都是自然数，B 是真命题；

(C) $\{x \in \boldsymbol{N} \mid x^2-9 \leqslant 0\}=\{x \in \boldsymbol{N} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$是个有限集，C 是假命题；

(D) $\sin 60°$应为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\sin 60°=\dfrac{1}{2}$也是假命题. 选 B.

例 2 判断下列命题是否为真命题：

(1) “空集$\varnothing$是任何集合的真子集”；

(2) “0 是任何集合的子集”；

(3) “如果 $A \subseteq B$，那么 $A \cap B=A$”.

解 (1) 是个假命题，反例：空集$\varnothing$是其本身的子集，但非真子集；

(2) 也是个假命题，因为 0 通常认为是元素，元素不能是集合的子集；

(3) 是个真命题，这可由集合交的性质得到.

二、判断复合命题的真假的程序

首先应将复合命题分解出简单命题；其次判断每个简单命题的真假；再次明确原复合命题所用逻辑联结词；最后据真值表判断真假.

例 1 “$x^2 \leqslant 0$”的含义是(　　).

(A) $x^2=0$ 且 $x^2<0$；　　(B) $x \in \varnothing$；

(C) $x \in \boldsymbol{R}$；　　(D) $x^2=0$ 或 $x^2<0$.

解 命题“$x^2 \leqslant 0$”可分解为 p：$x^2=0$，q：$x^2<0$，$p \vee q$ 形式的复合，故应选 D.

例 2 指出下列命题的构成形式及构成它的简单命题，并指出真假.

(1) 末位数字是 0 或 5 的整数是 5 的倍数；

(2) π 不是有理数但是实数；

(3) 方程 $x^2+x-1=0$ 没有实数根.

解 (1) 这个命题是“$p \vee q$”形式，其中 p：末位数字是 0 的整数是 5 的倍数；q：末位数字是 5 的整数是 5 的倍数. 由于 p 和 q 都是真命题，所以 $p \vee q$ 是真命题；

(2) 这个命题是“$\neg p \wedge q$”的形式，其中 p：π 是有理数，这是个假命题；q：π 是实数，这是个真命题，所以 $\neg p \wedge q$ 是真命题；

(3) 这个命题是“$\neg p$”的形式，其中 p：方程 $x^2+x-1=0$ 有实数根，由于该方程根的判别

式 $\Delta=5>0$，p 是真命题，所以 $\neg p$ 是假命题.

例 3 命题 p："$2>1$"，命题 q："$1+1=5$"，则（ ）.

(A) $p\wedge q$ 是真命题； (B) $p\vee q$ 是真命题；

(C) $\neg p\wedge q$ 是真命题； (D) $\neg p\wedge\neg q$ 是真命题.

解 由于命题 p 是真命题，q 是假命题，由真值表，$p\vee q$ 是真命题，而 $p\wedge q$，$\neg p\wedge q$，$\neg p\wedge\neg q$ 都是假命题，所以应选 B.

点评 在逻辑联结词中，理解"或"相对最难. 这是因为在日常生活中"或"往往带有选择的意思，它与现在逻辑中的"或"不尽相同. 逻辑中 p 或 q 包括三种情况：(1) p 且 $\neg q$，(2) q 且 $\neg p$，(3) p 且 q.

例 4 如果命题"p 或 q"与"p 且 q"都是假命题，则下列判断不正确的是（ ）.

(A) p，q 都是假命题； (B) p、非 q 都是真命题；

(C) 非 p、非 q 都是真命题； (D) 非 p 与 q 一真一假.

分析 本题的特点是已知复合命题的真假，判断构成复合命题的简单命题的真假. 可通过反查真值表，或验证(A)，(B)，(C)，(D)中哪一个符合题意.

解 (A)中 p，q 都假，则 $p\vee q$，$p\wedge q$ 都假，A 正确；

(B)中 p，$\neg q$ 都真，即 p 真 q 假，则 $p\vee q$ 真，$p\wedge q$ 假，B 不正确；

(C)中 $\neg p$，$\neg q$ 都真，即 p，q 都假，同 A；

(D)中若 $\neg p$ 真 q 假，即 p，q 都假，同 A.

由于本题要选出不正确的，所以应选 B.

例 5 命题"明天刮风或者下雨"的非是（ ）.

(A) 明天不刮风或者不下雨； (B) 明天不刮风且不下雨；

(C) 明天刮风且不下雨； (D) 明天不刮风且下雨.

解 设 p：明天刮风；q：明天下雨. 题中已知"$p\vee q$"，由于 $\neg(p\vee q)=\neg p\wedge\neg q$，且 $\neg p$ 是"明天不刮风"，$\neg q$ 是"明天不下雨". 所以，"明天刮风或者下雨"的非是"明天不刮风且不下雨"，所以选 B.

三、判断充要条件

判断充分但不必要条件、必要但不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件的**解题思路**：

(1) 首先分清条件 p 是什么，结论 q 是什么；

① 若 $p\Longrightarrow q$ 但 $q\not\Longrightarrow p$，则 p 是 q 的充分但不必要条件，"充分"可直白地理解为"有之则必然"；

② 若 $q\Longrightarrow p$ 但 $p\not\Longrightarrow q$，则 p 是 q 的必要但不充分条件，"必要"可直白地理解为"必不可少"；

③ 若 $p\Longrightarrow q$ 且 $q\Longrightarrow p$，则 p 是 q 的充要条件，"充要"可直白地理解为"当且仅当".

(2) 要判断 p 是 q 的什么条件，有时可考虑集合 $A=\{x|x$ 满足 $p\}$，$B=\{x|x$ 满足 $q\}$.

① 若 $A\subseteq B$，则 p 是 q 的充分但不必要条件；

② 若 $A\supseteq B$，则 p 是 q 的必要但不充分条件；

③ 若 $A=B$，则 p 是 q 的充要条件.

例 1 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件（在"充分但不必要条件"、"必要但不充分条件"、"充要条件"、"既不充分也不必要条件"中选出一种）.

(1) p：$m=1$，q：$y=x^{m^2-4m+5}$是二次函数；

(2) p：$m>0$，q：方程 $x^2+x-m=0$ 有实根；

(3) p：$c=0$，q：抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$过原点；

(4) p：四边形对角线相互平分，q：四边形是矩形.

解 (1) 当 $m=1$ 时，$m^2-4m+5=2$，$y=x^{m^2-4m+5}$是二次函数，即 $p\Rightarrow q$；但由 $m^2-4m+5=2$ 可得 $m=1$ 或 $m=3$，即 $m=1$ 不是 $m^2-4m+5=2$ 的必不可少的条件，所以 p 是 q 的充分但不必要条件；

(2) 方程 $x^2+x-m=0$ 的根的判别式 $\Delta=1+4m$. 当 $m>0$ 时，有 $\Delta>0$，方程有实根，即 $p\Rightarrow q$；但方程 $x^2+x-m=0$ 有实根，m 未必大于零. 如 $m=0$ 时，方程 $x^2+x=0$ 有实根 $x_1=0$，$x_2=-1$，即 $q\not\Rightarrow p$，所以 p 是 q 的充分但不必要条件；

(3) 若 $c=0$，则抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$相应变为 $y=ax^2+bx$ 过原点，即 $p\Rightarrow q$；若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，将 $x=0$，$y=0$ 代入，求得 $c=0$，即 $q\Rightarrow p$，故 p 是 q 的充要条件；

(4) 若四边形是矩形，则对角线相互平分，即 $q\Rightarrow p$；但四边形对角线相互平分未必是矩形，菱形的对角线也相互平分，即 $p\not\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的必要但不充分条件.

例 2 设 $x,y\in\boldsymbol{R}$，$(x+1)^2+(y-2)^2=0$ 的充要条件是(　　).

(A) $x=-1$；　　(B) $y=2$；

(C) $x=-1$ 或 $y=2$；　　(D) $x=-1$ 且 $y=2$.

解 若$(x+1)^2+(y-2)^2=0$，$x\in\boldsymbol{R}$，$y\in\boldsymbol{R}$，则必有 $x+1=0$ 且 $y-2=0$，即 $x=-1$ 且 $y=2$；反之，若 $x=-1$ 且 $y=2$，则必有 $x+1=0$，$y-2=0$，从而有$(x+1)^2+(y-2)^2=0$ 成立. 所以 $x,y\in\boldsymbol{R}$，$(x^2+1)^2+(y-2)^2=0$ 的充要条件是 $x=-1$ 且 $y=2$. 选 D.

例 3 用以下四个选择项进行选择：

(A) 充分但不必要条件；　　(B) 必要但不充分条件；

(C) 充要条件；　　(D) 既不充分也不必要条件.

① $ab>0$ 是$\frac{a}{b}>0$ 的(　　)；　　② $ab\geqslant 0$ 是$\frac{a}{b}\geqslant 0$ 的(　　)；

③ $x^2-1<0$ 是 $x<1$ 的(　　).

解 ① 由$\{(a,b)\mid ab>0\}=\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{a}{b}>0\right\}$知，$ab>0$ 是$\frac{a}{b}>0$ 的充要条件，选 C；

② 由$\{(a,b)\mid ab\geqslant 0\}\supsetneqq\left\{(a,b)\,\middle|\,\frac{a}{b}\geqslant 0 \text{ 且 } b\neq 0\right\}$知，$ab\geqslant 0$ 是$\frac{a}{b}\geqslant 0$ 的必要但不充分条件，选 B；

③ 由$\{x\mid x^2-1<0\}=\{x\mid -1<x<1\}\subsetneqq\{x\mid x<1\}$知，$x^2-1<0$ 是 $x<1$ 的充分但不必要条件，选 A.

【题型练习二】

一、选择题

1. 下列是真命题的是(　　).

(A) $x+y$ 是有理数，则 x,y 都是有理数；

(B) 求证：若 $x\in\boldsymbol{R}$，方程 $x^2+x+1=0$ 无实根；

(C) $x\in\boldsymbol{R}$，方程 $x^2+x+1=0$ 无实根；

(D) $3x>x$.

2. 下列命题中为真命题的是(　　).

(A) 空集是任何集合的真子集;

(B) 命题"方程 $x^2=1$ 的解是 $x=\pm 1$"是简单命题;

(C) "$a^2+b^2\neq 0$"的含义是 a,b 都不为零;

(D) 如果 $a+b>0$,那么 a 和 b 中至少有一个大于零.

3. 命题 p:"$\frac{2}{3}$是有理数",命题 q:"$\sqrt{2}$是无理数",则下列正确的是(　　).

(A) $p\wedge q$ 是真命题; (B) $\neg p\vee\neg q$ 是真命题;

(C) $\neg p\wedge\neg q$ 是真命题; (D) $\neg p$ 是真命题.

4. 若 p,q 是两个简单命题,且"$p\vee q$"的否定是真命题,则必有(　　).

(A) p 真 q 真; (B) p 假 q 假; (C) p 真 q 假; (D) p 假 q 真.

5. 如果命题"$p\wedge q$"与命题"$p\vee q$"都是假命题,则下列命题中是真命题的是(　　).

(A) $\neg p\wedge\neg q$; (B) $\neg p\wedge q$; (C) $p\wedge\neg q$; (D) $p\vee q$.

6. 如果命题"$p\vee q$"和"$\neg p$"都是真命题,则下列命题中是真命题的是(　　).

(A) q; (B) $p\wedge q$; (C) $\neg q$; (D) $\neg p\wedge\neg q$.

7. 下列命题是假命题的是(　　).

(A) $4\leqslant 5$; (B) $3.14\in\boldsymbol{Q}$; (C) $3\geqslant 3$; (D) $\pi\in\boldsymbol{Q}$.

8. $x\neq y$ 是 $x^2\neq y^2$ 的(　　).

(A) 充分但不必要条件; (B) 必要但不充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

9. $|x|=x$ 是 $x>0$ 的(　　).

(A) 充分但不必要条件; (B) 必要但不充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

10. $\frac{1}{|a|}\geqslant 1$ 成立的一个充分而不必要的条件是(　　).

(A) $-1\leqslant a\leqslant 1$; (B) $-1<a<1$;

(C) $-1<a<0$ 或 $0<a<1$; (D) $-1\leqslant a<0$ 或 $0<a\leqslant 1$.

11. $A\cap B=A$ 是 $A\cup B=B$ 的(　　).

(A) 充分但不必要条件; (B) 必要但不充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

12. "$b=0$"是"抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 y 轴的(　　).

(A) 充分但不必要条件; (B) 必要但不充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

13. p 表示"α 是 4 的倍数",q 表示"α 是 2 的倍数",则有(　　).

(A) p 是 q 的充要条件; (B) p 是 q 的必要不充分条件;

(C) q 是 p 的必要不充分条件; (D) q 是 p 的充分不必要条件.

14. p:"G 是 4 和 9 的等比中项",q:"$G=6$",p 是 q 的(　　).

(A) 必要但不充分条件; (B) 充分但不必要条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

15. 下列说法正确的是(　　).

(A) $x^2-1>0$ 是 $x<-1$ 的充分但不必要条件;