美国大学生
数学竞赛题解

下

ei guo da xue sheng shu xue jing sai ti jie

美国大学生
数学竞赛题解

〔下〕

卢亭鹤　张永祺　邵存蓓　译
强文久　秦成林　林友明　校

甘肃人民出版社

美国大学生数学竞赛题解

〔下〕

卢亭鹤　张永祺　邵存蓓 译

强文久　秦成林　林友明 校

甘肃人民出版社出版

（兰州第一新村51号）

甘肃省新华书店发行　　兰州新华印刷厂印刷

开本 787×1092毫米　1/32　印张 4.125　字数 85,000

1983年8月第1版　　1983年8月第1次印刷

印数 1——8,000

书号：13096·89　　定价：0.36元

目　录

第 29 届

威廉·洛威尔·普特南数学竞赛

（1968年12月7日举行）

译自 J.H.Mc KAY 的总结，载于

1969年10月号《美国数学月刊》

第一部分试题

1. 证明

$$\frac{22}{7}-\pi=\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,dx.$$

2. 给定整数 a，b，e，c，d和f，且$ad \neq bc$，又给定实数$\varepsilon>0$，证明存在有理数r和s，使得

$$0<|ra+sb-e|<\varepsilon,$$

$$0<|rc+sd-f|<\varepsilon.$$

3. 证明有限集的所有子集的表能按下列方法作出：(i) 空集放在表的第一位，(ii) 每个子集恰好出现一次，(iii) 表中的每一个子集或者是通过前面的一个子集上加上一个元素或者是删去前面子集中的一个元素而得到．

4. 在球面$\{(x, y, z): x^2+y^2+z^2=1\}$上给出$n$个点，证明它们之间的距离平方和不超过$n^2$．

5. 设V是实系数的、对闭区间〔0，1〕上的所有x满

足$|P(x)|\leqslant 1$的一切二次多项式的集合，确定

$$\sup\{|P'(0)|: P\in V\}.$$

6. 确定具有$a_i=\pm 1$（$0\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant n<\infty$）的形为$\sum_0^n a_i x^{n-i}$的所有多项式，使得每个这样的多项式只有实零点。

第二部分试题

1. 芝加哥和底特律的温度分别是x°和y°，这些温度假定不是独立的，即我们给出

(i) $P(x^\circ=70^\circ)$，芝加哥温度是70°的概率，

(ii) $P(y^\circ=70^\circ)$，和

(iii) $P(max(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$.

确定$P(min(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$.

2. A是一个有限群G的子集（具有群的称为乘法的运算），而且A包含G的一大半元素．证明G的每个元素是A的两个元素的乘积．

3. 假定60°的角不能单用直尺和圆规三等分．证明：如果n是3的正倍数，则$360^\circ/n$的角中没有一个能单用直尺和圆规三等分．

4.证明：如果f是在$(-\infty, \infty)$内的实值连续函数，而且$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$存在，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x-\frac{1}{x}\right) dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

5. 设p是素数，又设J是所有2×2阶矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的

集合，这些矩阵的元素我们选自{0，1，2，…，
而且满足条件$a+d\equiv 1 \pmod p$，$ad-bc\equiv 0 \pmod{}$
J有多少个元素。

6． 一个实数集称为紧的，如果它是闭且有界的。证明不存在一个有理数的紧集序列$\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$，使得有理数的每个紧集至少包含在一个K_n中。

第一部分试题解答

1． 应用初等微积分标准解法。通过除法，把被积函数改写成多项式加上分子的次数小于2的有理函数。其解很容易求得。

2． 容易的解答是通过选择具有条件$0<\rho<\varepsilon$的有理数ρ和解线性方程组

$$ar+bs=e+\rho$$

$$cr+ds=f+\rho$$

而得到。因为$ad\neq bc$，因此解r和s存在而且是满足给定不等式的有理数。

评注：个别学生寻求接近于两条直线$ax+by=e$，和$cx+dy=f$的交点的具有有理坐标的点。这是一种普遍的但是笨拙的方法，而且有时学生没有证明此点不在这两条直线的任何一条上。

3． 用归纳法证明。对于单元素集{1}，所有子集的表是ϕ，{1}。因此结论对于单元素集是真的。假设对含有$n-1$个元素的集合结论是真的。令$S=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$和$T=\{1, 2, 3, \cdots n-1\}$。设$T_0$，$T_1,\cdots,T_t$（$t=$

$2^{n-1}-1$)是满足需要的T的子集的表，则所需要的S的子集的表是S_0，S_1，…，S_s($s=2^n-1$)，此处$S_i=T_i$($0\leqslant i\leqslant t$)且$S_{t+1}=T_t\cup\{n\}$，$S_{t+2}=T_{t-1}\cup\{n\}$，…$S_s=\{n\}$.

评注：此问题等价于在n维立方体中求Hamilton回路.

David Bloom 注意到S_k从S_{k-1}通过加上或删去$j+1$而得到，此处2^j是能除尽k的2的最高次幂.

4. 这n个点可以用具有$|v_i|=1$的向量v_i($j=1$，…，n)来表示. 在$n=3$的情况展开"它们之间的距离平方和"给我们启示了下列的一般恒等式

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|v_i-v_j|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(v_i-v_j)\cdot(v_i-v_j)$$

$$=(n-1)\sum_{1\leqslant i\leqslant n}v_i\cdot v_i-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}v_i\cdot v_j$$

$$=n\sum_{1\leqslant i\leqslant n}v_i\cdot v_i-\Big[\sum_{1\leqslant i\leqslant n}v_i\cdot v_i$$

$$+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}v_i\cdot v_j\Big]$$

$$=n^2-\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}v_i\Big)\cdot\Big(\sum_{1\leqslant i\leqslant n}v_i\Big).$$

于是结论推得，此外等号当且仅当$\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}v_i=0$时才成立.

5. 设$f(x)=ax^2+bx+c$是任意二次多项式，则$f(0)=c$，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c$，和$f(1)=a+b+c$，$f'(0)=$

$b = 4f(\frac{1}{2}) - 3f(0) - f(1)$. 应用给定的条件，$|p'(0)| \leqslant 4|p(\frac{1}{2})| + 3|p(0)| + |p(1)| \leqslant 8$而且$p(x) = 8x^2 - 8x + 1$满足给定的条件且有$|p'(0)| = 8$.

评注：上述解答归于W.G.Hammere.

6. 具有$a_0 = -1$的所需的多项式是具有$a_0 = 1$的那些多项式的负多项式，因此只需考虑$a_0 = 1$的多项式. $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$零点的平方和是$a_1^2 - 2a_2$，这些零点的平方的乘积是$a_n^2$. 如果所有的零点是实的，我们应用算术几何平均值不等式得

$$\frac{a_1^2 - 2a_2}{n} \geqslant (a_n^2)^{\frac{1}{n}},$$

而且等号仅当零点数值*相等时才成立。在我们的情形此不等式成为$(1 \pm 2)/n \geqslant 1$或$n \leqslant 3$. 注意$n > 1$蕴含$a_2 = -1$，和$n = 3$蕴含所有零点都是± 1. 于是多项式的一览表是

$$\pm(x-1),\ \pm(x+1),\ \pm(x^2+x-1),$$
$$\pm(x^2-x-1),\ \pm(x^3+x^2-x-1),$$
$$\pm(x^3-x^2-x+1).$$

第二部分试题解答

1. 四个事件$x° = 70°$, $y° = 70°$, $\max(x°, y°) = 70°$, $\min(x°, y°) = 70°$分别用A, B, C, D表示. 则$A \cup B = C \cup D$并且$A \cap B = C \cap D$. 因此$P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

*数值相等可放宽为绝对值相等——译注.

$+P(A\cap B)=P(C\cup D)+P(C\cap D)=P(C)+P(D)$ 并且 $P(\min(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)=P(x^\circ=70^\circ)+P(y^\circ=70^\circ)-P(\max(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$。

评注：在这一问题中有许多方法可以应用，但不是所有的方法都是有效的。许多学生对 $P(\min(x^\circ, y^\circ)=70^\circ)$ 有正确的公式，但在他们的推导中假定 x 和 y 是独立的。对于这种情形所得正确公式只获得较少的荣誉。

2. 设 g 是 G 的任何一个元素，则集合 $\{ga^{-1}|a\in A\}$ 有与 A 相同个数的元素。如果这两个集合是不相交的，则它们的并集将包含比 G 更多的元素。于是存在 $a_1, a_2\in A$ 使得 $a_1=ga_2^{-1}$，因此 $g=a_1a_2$。

另一解法：设 G 有 n 个元素，A 有 m 个元素，而且考虑 G 的乘法表。G 中的元素 g 必定在乘法表的每行每列中恰好出现一次。它在 A 的表外最多出现 $2(n-m)$ 次，在 G 的表内出现 n 次。因此它在 A 的表内最少出现 $n-2(n-m)=2m-n$ 次，又我们已知 $2m>n$，所以 G 的每个元素必在 A 的乘法表中出现。

3. 我们需要应用关于域和作图可能性的下列事实：（1）如果 Q 是有理数域，则 Q 的通过 $\cos(360^\circ/k)$ 的扩展度是 $\phi(k)$，此处 k 是正整数，而 $\phi(k)$ 是 Euler 函数。（2）如果 K, L, M 是具有 $K\subset L\subset M$ 的域而且 $[L:K]<\infty$，$[M:L]<\infty$，则 $[M:K]=[M:L]\cdot[L:K]$。（3）给定 $\cos(360^\circ/k)$，则 $\cos(360^\circ/3k)$ 是可作图的当且仅当

$$\left[Q\left(\cos\frac{360^\circ}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360^\circ}{k}\right)\right]$$

是 2 的乘幂。

因此，$\left[Q\left(\cos\frac{360^\circ}{3k}\right):Q\left(\cos\frac{360^\circ}{k}\right)\right]\cdot\phi(k)=\phi(3k)$.

现在

$$\phi(3^a)=3^{a-1}\cdot 2=\begin{cases}3\phi(3^{a-1}), & \text{当}a>1\text{时}\\ 2 & ,\text{当}a=1\text{时}\end{cases}$$

且由Euler函数乘法性质知

$$\phi(3k)=\begin{cases}3\phi(k), & \text{当}3\mid k\text{时}\\ 2\phi(k), & \text{当}3\nmid k\text{时}\end{cases}$$

因此$360^\circ/k$大小的角能三等分当且仅当$3\nmid k$。

评注：一个普遍的错误方法如下："如果$360^\circ/3k$能三等分，则我们能够构造$40^\circ/k$，重复此角k次得到40°，再从60°中减去它得到20°。但是60°的角是不能三等分的，因此20°不能作出"。这一议论的错误在于人们给出了试图三等分的角$360^\circ/3k$，而且借助于此可加的图形，60°或许可以三等分（例如$k=6$的情形）。

4．$y=x-1/x$的图形启示我们把积分分裂成形式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-1/x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}f(x-1/x)dx$$
$$+\lim_{b\to0-}\int_{-1}^{b}f(x-1/x)dx$$
$$+\lim_{c\to0+}\int_c^1 f(x-1/x)dx$$
$$+\lim_{d\to\infty}\int_1^d f(x-1/x)dx,$$

在前面两个积分中，作变量代换$x=\frac{1}{2}(y-\sqrt{y^2+4})$；在后面两个积分中，作变量代换$x=\frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+4})$。因为

这两个y的函数在所包含的区间中都有连续的一阶导数，因此变量代换是有效的。经过变换后，我们有四个广义积分。这些积分中每一个的收敛性由 Dirichlet 判别法的推论所建立（R.C.Buck，McGraw Hill高等微积分 P.143）．于是通过把被积函数相加允许把这些广义积分中的第一个和第三个重新写成一个积分，因为它们有相同的从$-\infty$到0的积分限。其结果是$\int_{-\infty}^{0} f(y)dy$。类似地另外两个积分联合起来给出$\int_{0}^{\infty} f(y)dy$。在此联合中，有一包含$y/\sqrt{y^2+4}$的项的相消，因为它一次出现正号，一次出现负号。我们已经证明了$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-1/x)dx$的收敛性和所需要的等式。

5． 如果$a=0$，则$d=1$，又如果$a=1$则$d=0$．不论何种情形$bc=0$，因此b或c为零，另一个任意．对$bc=0$有$2p-1$种不同的解，因此在$a=0$或$a=1$的情形，解的总数是$4p-2$种。如果$a\neq 0$或1，则d唯一地被确定，而且因为mod$p$的整数形成一个域，$bc\equiv ad\neq 0 \pmod{p}$蕴含对每个$b\neq 0$，存在唯一的$c$。因此在这种情形，对每个$a$有$p-1$种解。解的总数是$4p-2+(p-2)(p-1)=p^2+p$。

6． 设$\{K_n\}$是有理数紧集的任何序列，对于每个n，存在一个有理数$r_n\notin K_n$，且$0\leqslant r_n<1/n$。否则，K_n将包含$[0, 1/n]$中的一切有理数，因此包含了某些无理数（因为K_n是闭的）。令$S=\{0, r_1, r_2, \cdots\}$，则$S$是紧的而且不包含在任何$K_n$中。

第 30 届

威廉·洛威尔·普特南数学竞赛

（1969年12月6日举行）

译自J.H.McKAY的总结，载于
1970年9月号《美国数学月刊》

第一部分试题

1. 设$f(x, y)$是定义在整个x—y平面上的实变数x和y的具有实系数的多项式，对于$f(x, y)$的值域的可能性是什么？

2. 设D_n是n阶行列式，它在第i行第j列的元素是i和j的差的绝对值。证明D_n等于

$$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

3. 设P是具有n条边的不自交的封闭的多边形．设它的顶点是P_1，P_2，…，P_n。又设在P的内部给出另外的m个点Q_1，Q_2，…，Q_m。再设此图形是可三角剖分的，这意味着$(n+m)$个点P_1，…，Q_m的某些点对被直线段连结，使得(i)所得的图形仅仅由三角形的集合T组成，(ii)如果在T中的两个不同的三角形有一个以上的公共顶点则它们刚好有一条公共边，(iii)在T中三角形顶点的集合刚好是$(n+m)$个点P_1，…，Q_m。问在T中有多少个三角形？

4. 证明

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^{-n}$$

（被积函数在$x=0$点取值为1）.

5. 设在微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=-2y+u(t),\ \frac{dy}{dt}=-2x+u(t)$$

中的$u(t)$是连续函数．证明不管$u(t)$的选择如何，方程组在$t=0$时满足$x=x_0, y=y_0$的解将永远不通过$(0,0)$，除非$x_0=y_0$。当$x_0=y_0$时，证明对任何t的正值t_0，皆可选取$u(t)$，使得当$t=t_0$时解在$(0,0)$。

6. 设序列$\{x_n\}$是给定的，且设$y_n=x_{n-1}+2x_n$，$n=2,3,4,\cdots$假定序列$\{y_n\}$收敛．证明序列$\{x_n\}$也收敛．

第二部分试题

1. 设n是正整数使得$n+1$能被24除尽．证明n的所有因子的和能被24除尽．

2. 证明有限群不能是它的两个真子群的并集．如果“两”代之以“三”所述结论是否保留为真?

3. 序列T_n的项满足

$$T_nT_{n+1}=n.\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\text{和}\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{T_{n+1}}=1.$$

证明 $\pi T_1^2=2$.

4. 证明单位长的任何曲线能够被面积为1/4的闭矩形所复盖.

5． 设$a_1<a_2<a_3<\cdots$是正整数的增加序列．设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$$

收敛．对任何数x，设$k(x)$是其值不超过x的a_n的数目．证明$\lim\limits_{x\to\infty} k(x)/x=0$．

6． 设A和B分别是3×2和2×3阶矩阵．假定在AB的次序下它们的乘积由

$$AB=\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

给定．证明乘积BA由

$$BA=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

给定．

第一部分试题解答

1． $f(x, y)$的连续性蕴含值域是连通的（即若a，b在值域中，且$a<c<b$，则c也在值域中）．如果值域是上、下有界的，则多项式$f(x, kx)$对于每个k值是常数，因此$f(x, y)$是常数$f(0, 0)$．于是仅有的可能性是(i)一个点；(ii)具有端点的半无限区间；(iii)无端点的半无限区间；和(iv)所有的实数．

关于(i)，(ii)和(iv)的例子容易给出．关于(iii)的例子较难找．一种方式是使曲面的每个截口（对固定的y）是具有极小值的抛物线，当y趋向$\pm\infty$时，此极小值递减渐近

趋向于某一常数．一个适当的例子为$(xy-1)^2+x^2$．

评注：当试卷付印时，发现(iii)是不可能的．所用的议论是错误的．此额外的复杂性是很少高分的基本理由．

2． 从其它的各列，减去第一列，然后将第一行加到另外的各行上．现在最后一行除在第一列中的为$(n-1)$外其余皆为零．D_n是从变换后的行列式中划去第一列和最后一行的子式的$(-1)^{n-1}(n-1)$倍．此子式在主对角线以下仅有零．因此它等于主对角线元素的乘积。所以此子式有值2^{n-2}，因此$D_n=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$．

另一解法　从D_{n+1}的最底下一行减去$1/(n-1)$倍的第一行和$n/(n-1)$倍的第n行．如此，对于$n>1$证明了$D_{n+1}=-[2n/(n-1)]D_n$．结论容易通过迭代并注意到$D_2=-1$而得到．

3． 设t是三角形的数目．则一切角的和是πt（因为每个三角形的内角和是π），而且它也是$2\pi m+(n-2)\pi$．

另一解法　设t是三角形的数目．在Euler公式$V-E+F=2$中，$F=t+1$，和$V=n+m$．因为每一边在两个面上，$2E=3t+n$．代入直接导致答案$t=2m+n-2$．

评注：在问题中所述的是在多边形内部可三角形剖分．如果加上的直线段在多边形的外部，则答案是不同的．

4． 一个合理的获得级数的方法（不是用Riemann和，它明显地做不出来）是把被积函数写成e的幂并利用e的级数展开，则一致收敛能用来交换积分与求和的次序，而且证明了

$$\int_0^1 x^x dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int_0^1 x^m(\log x)^m dx.$$