高等学校教材

线性多变量系统频域法

古孝鸿 周立峰 编

上海交通大学出版社

线性多变量系统频域法

古孝鸿　周立峰　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系统而全面地介绍了多变量控制系统频域理论及几种设计方法，即逆Ngquist 阵列法、序列回差法、复变量法及并矢展开法。本书每章附有设计例子及适量习题，供读者加深理解。

本书可供自动控制、工业自动化等专业的高年级学生和研究生作为教材。也可供系统理论，控制理论，控制工程以及相应学科的科技工作者，工程技术人员，高等院校师生参考。

线性多变量系统频域法

出 版：上海交通大学出版社
(淮海中路1984弄19号)
发 行：新华书店上海发行所
印 刷：上海交通大学印刷厂
开 本：787×1092(毫米)1/32
印 张：12.75
字 数：285000
版 次：1990年10月 第一版
印 次：1990年11月 第一次
印 数：1—1050
科 目：231—288
ISBN7—313-00716-7/TP·13

定价：2.50 元

前　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1986～1990年编审出版规划，由自动控制教材编审委员会组织征稿，推荐出版的。

本教材由电子科技大学古孝鸿、周立峰编写，西北工业大学陈新海教授担任主审。

本课程的参考学时数为40学时，主要介绍现代频域理论和设计技术。共分六章：第一章介绍了必要的数学基础，第二章讨论了线性多变量系统的一般分析方法。第三章至第六章分别详细叙述了多变量频域理论和设计技术的四种主要方法，即逆Nyquist阵列设计法，序列回差设计法，复变量设计法，并矢展开设计法。每章都附有设计例子和适量习题，供加深理解所述内容之用。书后有三个附录，分别给出了常用的分块矩阵计算公式，适合于编制计算程序的多项式计算公式和几个定理的证明。

本教材第二章和第六章由周立峰同志编写，其余由古孝鸿同志编写，本书的全部插图由李惠敏同志绘制。

由于编者业务水平所限，书中难免会有缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

绪　论

在本世纪 30 至 50 年代，为适应生产的需要发展了一套解决单输入/单输出控制系统分析与设计的频域法。经过许多人的努力，获得了丰富的成果。大约到1960年，经典频域法的内容便已相当完备了。其中最有代表性的是 Nyquist 和 Bode 的频率响应法、Evans的根轨迹法。这些方法适于手算，且大量依赖于经验和技巧，却受到工程设计者的欢迎，至今仍在广泛使用。其原因在于：这些方法具有清晰的物理概念和坚实的实验基础，不仅能定性地判明设计方向，而且有直观的物理解释，计算和作图都很简单。因此，经典频域法经实践证明是行之有效的好方法。

从50年代末期开始，由于宇航和复杂控制的需要，发展了状态空间法。这种方法的特点是：以状态空间为特征，以用计算机进行解析计算为主要手段，以实现最优性能指标为主要目的。这种方法解决了一些经典频域法无法处理的问题，它在宇航领域中获得了卓有成效的应用。但是，一经应用到一般工业上，便发现状态空间法并不如预期的那样理想。主要在于：①这种方法要求有精确的数学模型，而一般工业对象却只有或只能建立粗糙的数学模型。②一般工业过程要求的控制精度远不如宇航那么高，但要求控制器的结构尽可能简单，成本尽可能低。采用状态空间法设计出来的控制器，常常结构过于复杂，成本较高，影响了推广应用。③状态空间法对问题的提法往往比较间接，控制目标往往缺乏明显的物理依据，在工业上使用

不方便。到现在，虽然有很多人致力于解决状态空间法应用于工业上的问题，但上述缺陷却仍然不同程度地存在着。

还在状态空间法蓬勃发展的时候，一些人便恢复了对频域法的兴趣。在60年代中期，Kalman 提出了最优控制问题的频域描述，迈开了第一步。特别是英国学者 Rosenbrock，他系统地、开创性地研究了把经典频域法推广到多变量系统的问题，利用对角优势阵的概念把多变量系统的设计转化为单变量系统的设计问题，从而为多变量系统设计方法开辟了一条崭新的路线。

Rosenbrock 的逆 Nyquist 阵列法的成功，给控制理论研究工作者以巨大的鼓舞。一些重要的方法，如Mayne的序列回差法，MacFarlane 的特征轨迹法，Owens的并矢展开法，相继出现，从而形成了一套新的频域理论和设计方法，被称为现代频域法。

现代频域法的特点是：①把相互交连很严重的多输入/多输出系统的设计问题转化为一系列单输入/单输出系统的设计问题，从而可选用某一种经典频域法完成系统的设计。②它们保留和继承了经典频域法的主要优点，如物理概念清晰，图形直观，实验依据充分，不要求精确的数学模型，容易满足工程上的限制，较易引入物理思维和工程感觉，等等。③采用计算机进行设计，利用人——机对话功能以充分发挥设计者的智慧和经验，设计出满足工程要求、性能良好、结构简单、兼顾抑制交连的控制器。

整个70年代被认为是现代频域法大有生机的十年。在此期间理论上和实践上都取得了重要的成功。迄今，现代频域法已成功地应用于石油、化工、造纸、原子反应堆、飞机发动机和

自动驾驶仪等系统或设备的设计，取得了令人满意的结果。1980年日本统计了80家化工、石油企业的过程控制设备（大多数是多变量系统）的情况，发现49%都采用了多变量控制方案。其中，采用解耦控制的占40%，采用最佳控制的占27%，采用现代频域法的占33%。这说明现代频域法在日本工业过程控制中已有较普及的应用。在我国，现代频域法的应用正日益受到重视，逐步发展和推广。

状态空间法和现代频域法都解决了大量的实际问题，两者是相辅相成的。没有状态空间法的发展就不可能有现代频域法的发展；反过来，现代频域法的发展又推动了状态空间法的进一步发展。二者各有千秋。人们正在不断努力缩小二者之间的界限，克服各自的缺点，寻求更为良好的多变量控制系统的工程设计方法。

目　　录

第四章 序列回差法设计

第五章 复变量法设计

第一章 数学基础

在研究线性多变量控制系统频域设计理论时，要大量用到有理分式矩阵、代数函数等数学工具。为了给阅读以后章节内容作必要的准备，本章扼要介绍矩阵分解、多项式矩阵、有理分式阵、代数函数等内容的基本概念和一些主要关系。由于多变量频域设计理论一开始便和计算机的使用联系在一起，故在介绍上述内容时，不追求所得结果在写法上的简洁，而注意尽量提供便于编写程序的数学公式。

如果读者已熟悉这些内容，可直接阅读后续章节。

§ 1.1 复数矩阵的分解

一、酉空间

在复数域上定义了内积的线性空间U称为酉空间。在工程上，内积通常定义为

$$<x, y>=y^*x=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}。 \qquad (1.1.1)$$

式中，复数x_i和y_i分别表示列向量x和y的第i个分量；符号y^*表示列向量y的共轭转置；$\overline{y_i}$表示复数y_i的共轭复数。

在酉空间中，定义向量的长度类似于Euclid空间的那样。即

$$|x|=\sqrt{<x, x>}=\sqrt{x^*x}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\geqslant 0。\tag{1.1.2}$$

由上式知，只有零向量的长度才为0，而长度等于1的列向量称为单位向量。

把任意列向量x用长度$|x|$去除后得到的列向量$x/|x|$必为单位向量。这种运算称为向量的标准化或规格化。例如列向量$[2-j, 1, 1+j3]^T$的长度为4，经标准化后成为$[0.5-j0.25, 0.25, 0.25+j0.75]^T$，即为单位向量。

对两个列向量x和y而言，若其内积为零，则它们是互相正交的。

显然，一切列向量都与零向量正交。今后讨论中不考虑这种特殊情况。

在n维酉空间中必存在n个互相正交的单位列向量，它们构成酉空间的基，称为标准正交基。

二、酉矩阵

由若干个标准正交向量并列构成的矩阵称为次酉矩阵。故次酉矩阵的列数不大于它的行数。列数等于行数的次酉矩阵称为酉矩阵。

$m\times n$复数矩阵的全体记为$\boldsymbol{C}^{m\times n}$。$m\times n$次酉矩阵的全体记为$\boldsymbol{U}^{m\times n}$。如矩阵的秩为$r$，则两矩阵类分别记为$\boldsymbol{C}_r^{m\times n}$和$\boldsymbol{U}_r^{m\times n}$。

次酉矩阵有如下的基本性质：

定理 1.1.1 设$A\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，$n\leqslant m$，则$A$为次酉矩阵的充要条件是

$$A^*A=I_n。\tag{1.1.3}$$

证：将A按列向量分解为

$$A=[a_1, a_2, \cdots, a_n],$$

因为

$$a_i^* a_j=\begin{cases}1, & \text{当 } i=j;\\ 0, & \text{当 } i\neq j;\end{cases}$$

则

$$A^*A=\begin{pmatrix}a_1^*\\ \vdots\\ a_n^*\end{pmatrix}[a_1, \cdots, a_n]=I_n。$$

反之，如$A^*A=I_n$，则列向量$a_1, \cdots, a_n$的长度均为1且两两正交，故A是次酉的。

定理 1.1.2 两次酉矩阵A和B的乘积仍是次酉矩阵。

证：因$(AB)^*(AB)=B^*A^*AB=B^*IB=I$，由定理1.1.1知$(AB)$是次酉矩阵。

酉矩阵是次酉矩阵的特例，上述两性质必均具备。此外，酉矩阵还具有下述性质。

定理 1.1.3 如果A是酉阵，则$A^*=A^{-1}$。

定理 1.1.4 如果A是酉阵，则A^*也是酉阵。

定理 1.1.5 如果A是酉阵，则$|\det A|=1$。

上述三个定理的证明很简单，请读者自行分析。

定理 1.1.6 以同一酉阵左乘两列向量，则向量的内积不变。

证：
$$\begin{aligned}\langle Ax, Ay\rangle&=(Ay)^*(Ax)=y^*A^*Ax\\&=y^*x=\langle x, y\rangle\end{aligned}$$

三、Schur 三角分解

定理 1.1.7 任何复数方阵恒可分解为

$$A=UT_SU^* \tag{1.1.4}$$

式中，U是酉阵，T_S是上（下）三角阵，T_S的诸对角元就是A的诸特征值。

此定理的证明见附录 C。

式(1.1.4)称为 Schur 三角分解（STD——Schur triangular decomposition），也叫做A酉相似于T_S。

四、特征值分解

定义 1.1.1 设$A\in C^{m\times m}$有性质

$$A^*A=AA^*, \tag{1.1.5}$$

则称A为规范矩阵或正规矩阵。

定理 1.1.8 $A\in C^{m\times m}$是规范矩阵的充要条件为：存在完全的标准正交向量系构成的酉矩阵W，使A与对角阵Λ酉相似．即

$$W^*AW=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}=\Lambda。 \tag{1.1.6}$$

式中，λ_1，λ_2，…，λ_m是A的特征值。

证：根据定理 1.1.7 知$A=WT_SW^*$，且T_S为上三角阵，当且仅当

$$T_S^*T_S=T_ST_S^*$$

才能满足$A^*A=AA^*$。如以t_{ij}表示T_S的元，因T_S为上三角阵，故

$$t_{ij}=0,\ \forall i>j。$$

将此结果代入前式，并比较两端的元，可依次得到$t_{12}=t_{13}=\cdots=t_{1m}=0$，$t_{23}=t_{24}=\cdots=t_{2m}=0$，…，$t_{m-1,m}=0$。由此

$$T_S=\operatorname{diag}\{t_{11}, t_{22}, \cdots, t_{mm}\}$$

已知T_S的对角元$t_{ii}=\lambda_i$，$i=1, 2,\cdots,m$，由定理1.1.3可

得式(1.1.6)。

反之，如 $T_S=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$，则 $T_S^*T_S=T_ST_S^*$，从而 $A^*A=AA^*$，即 A 是规范的。

式(1.1.6)可改写为

$$A=W\Lambda W^*=W\mathrm{diag}\{\lambda_i\}W^*。\tag{1.1.7}$$

此式称为 A 的特征值分解（CVD——Characteristic value decomposition）。

由线性代数得知，如 $A\in C^{m\times m}$ 有 m 个相异的特征值 λ_i，$i\in \underline{m}$（$i=1, 2, \cdots, m$ 的缩写），则它们必对应于 m 个线性无关的特征向量 p_i，$i\in\underline{m}$，用这些向量构成变换矩阵

$$P=[p_1, p_2, \cdots, p_m],$$

有

$$A=P\Lambda P^{-1}=P\mathrm{diag}\{\lambda_i\}P^{-1}。\tag{1.1.8}$$

这是利用相似变换化到对角形，是又一种特征值分解公式。与(1.1.7)比较，这里的 P 不一定是酉阵，但它是满秩阵。

再对特征值分解作些解释。在式(1.1.7)中，将 W 按列向量分解，将 $W^*=W^{-1}$ 按行向量分解，即

$$W=[w_1, w_2, \cdots, w_n],$$

$$W^{-1}=V=[v_1, v_2, \cdots, v_m]^T。$$

由 $AW=W\Lambda$，有

$$Aw_i=\lambda_i w_i,\ i\in\underline{m}。\tag{1.1.9}$$

表明 w_i 是 A 的对应于特征值 λ_i 的特征向量，也称为 A 的右特征向量。

又由 $W^{-1}A=\Lambda W^{-1}$，即 $VA=\Lambda V$，有

$$v_i^T A=\lambda_i v_i^T, \quad i\in \underline{m}, \tag{1.1.10}$$

称列向量 v_i 为 A 的对应于特征值 λ_i 的左特征向量，或称为 w_i 的对偶特征向量。

今后称 W 为右特征向量阵或右特征标架，称 V 为左特征向量阵或左特征标架（Frame）。A 的特征值记为 $\lambda(A)$。

五、奇异值分解

给定 $A\in C_r^{m\times n}$，则 A^*A 和 AA^* 均为正半定Hermite阵，故特征值全为非负实数。两方阵虽不同阶但有相同的秩 r。如以 ρ_i，$i\in\underline{m}$ 和 μ_j，$j\in\underline{n}$ 分别表示 AA^* 和 A^*A 的按降序排列的特征值，则

$$\rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\cdots\geqslant\rho_r>\rho_{r+1}=\cdots=\rho_m=0,$$
$$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r>\mu_{r+1}=\cdots=\mu_n=0。 \tag{1.1.11}$$

定理 1.1.9 A^*A 和 AA^* 有相同的非零特征值。即

$$\rho_i=\mu_i, \quad i\in\underline{r}。 \tag{1.1.12}$$

证： 设 AA^* 的与 ρ_i 相对应的非零特征向量为 x_i，则

$$(AA^*)x_i=\rho_i x_i\neq 0,$$

由此 $A^*x_i0\neq 0$。上式两端同乘以 A^*，得

$$A^*A(A^*x_i)=\rho_i(A^*x_i)。$$

故 ρ_i 也是 A^*A 的特征值，对应的特征向量为 A^*x_i，式(1.1.12)成立。

定义 1.1.2 若 $A\in C_r^{m\times n}$，A^*A 和 AA^* 的特征值如式(1.1.11)，则称

$$\sigma_i=\sqrt{\rho_i}=\sqrt{\mu_i}, \quad i\in\underline{r} \tag{1.1.13}$$

为 A 的奇异值。记为 $\sigma(A)$。

在一些文献中，把 $r<\min(m,n)$ 时的上述奇异值称为正奇值。这时 A^*A 尚有 $(n-r)$ 个零特征值 $\rho_j, j=r+1,r+2,\cdots,n$。可类似定义 $(n-r)$ 个零奇异值 $\sigma_j=\sqrt{\rho_j}=0$。而把这些统称为奇异值。在实用上，每当谈到奇异值时总是指正奇异值。

显然，A 与 A^* 有相同的奇异值。

仅当 A 为方阵时 A 的特征值才有定义。当 A 为非方阵时 A 的奇异值也有定义。特征值可为复数，奇异值必为正实数。

定理 1.1.10 设 $A\in \boldsymbol{C}_r^{m\times n}$，则存在 $Y\in \boldsymbol{U}^{m\times m}$ 和 $V\in \boldsymbol{U}^{n\times n}$，使

$$A=Y\Sigma V^* \tag{1.1.14}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma=\begin{pmatrix}S & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{m\times n}\\ &S=\operatorname{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r\}\in \boldsymbol{R}^{r\times r}\end{aligned}\right\} \tag{1.1.15}$$

证：因 AA^* 为规范阵，其特征值记为 λ_i，$i\in \underline{m}$。由定理 1.1.8 知存在 $Y\in \boldsymbol{U}^{m\times m}$，使

$$\begin{aligned}Y^*AA^*Y &=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}\\ &=\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0\}\\ &=\operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_r^2, 0, \cdots, 0\}\\ &=\begin{pmatrix}S^2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}。\end{aligned}$$

如记 $Y=[Y_1, Y_2]$，$Y_1\in \boldsymbol{C}^{m\times r}$，$Y_2\in \boldsymbol{C}^{m\times(m-r)}$，又由于

$$Y^*AA^*Y=\begin{pmatrix}Y_1^*AA^*Y_1 & Y_1^*AA^*Y_2\\ Y_2^*AA^*Y_1 & Y_2^*AA^*Y_2\end{pmatrix},$$