687

高职高专教材

线性代数学习指导书

王秋庭　王建武　彭延铭　编

A0945537

高等教育出版社

内容提要

本书是彭玉芳教授等编写的《线性代数》的配套教材，可供高等职业教育、高等专科教育的有关学校师生作为教学参考书选用，还可供业余大学、干部训练班等作为教学参考书.

内容紧扣原教材，并增加了"线性代数计算机解法初步"、"层次分析法初步"二部分内容.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导书/王秋庭，王建武，彭延铭编.
—北京：高等教育出版社，2001
ISBN 7-04-008828-2

Ⅰ.线… Ⅱ.①王…②王…③彭… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48285 号

线性代数学习指导书
王秋庭 王建武 彭延铭 编

出版发行	高等教育出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	邮政编码	100009
电　　话	010-64054588	传　　真	010-64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2001年5月第1版
印　　张	5.5	印　　次	2001年5月第1次印刷
字　　数	130 000	定　　价	6.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有　侵权必究

前　　言

线性代数是高等工程专科学校、职业技术学院和成人教育学院学生的一门必修基础课.不少学生和自学者在学习这门课程时往往感到比较抽象,很难把握概念的实质,解题过程中的问题也较多.为了帮助学生克服在线性代数学习中的困难,根据原国家教委颁布的高等工程专科学校教学基本要求,结合我们的教学实践,编写了这本学习指导书,它是彭玉芳教授等编写的《线性代数》一书的配套教材,用以提高学生分析问题和解决问题的能力.

本书在编写过程中力图注意以下几个方面:

1. 基本内容依据新订教学基本要求和主教材编写而成,并与主教材同步;

2. 侧重于对基本概念和运算方法的解疑释难,便于学生自学;

3. 尽可能的与实际问题(几何、物理以及有关实际问题)相联系,消除线性代数只是公式的推导和数值的计算的误解.为此,增加了层次分析法初步作为附录;

4. 为了便于学生用现代化的工具解决线性代数中的各种计算问题,我们增加了线性代数的计算机解法初步的内容.

本书由武汉科技大学王秋庭副教授、郑州工业高等专科学校王建武副教授、上海冶金高等专科学校彭延铭副教授编写.

本书由北京机械工业学院的朱铉道教授主审,参加审稿的还有常州工业技术学院彭玉芳教授和沈京一副教授、南京动力高等专科学校宣立新教授、上海纺织高等专科学校黄炳章副教授.他们认真审阅了全稿,并提出了许多宝贵的建议,对此,我们表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，书中错误在所难免，敬请读者批评指正．

编　者

1999年12月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　行　列　式

行列式最早产生于解线性方程组，然而它在数学的其他分支及相关学科中也有广泛的应用．因此了解行列式的有关知识是今后学习所必需的．

一、基本要求和重点及难点

（一）基本要求①

1．知道 n 阶行列式的定义．

2．了解行列式的性质，熟练掌握二、三阶行列式的计算，掌握四阶行列式的计算．

3．知道克拉默(Cramer)法则．

（二）本章的重、难点是利用行列式的性质和定义计算行列式

二、本章主要内容

（一）行列式的概念

1．式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

称为二阶行列式．其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素；i 为行下标，j 为列下标，分别说明该元素所在的行和列，即元素在行列式中所处的位置．

2．式子

① 各章基本要求摘自原国家教委 1997 年颁布的高等工程专科学校数学课程教学基本要求．

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\&-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned} \tag{1.2}$$

称为三阶行列式.

3. 式子

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个 n 阶行列式.它由 n^2 个数按一定顺序排成 n 行 n 列,代表一个算式,其结果为一个数,可用下面定义的代数余子式来计算.

行列式中划去第 i 行、第 j 列,即划去元素 a_{ij} 所在的行、列的所有元素,其余元素按原来顺序所构成的 $(n-1)$ 阶行列式 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式.而 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{aligned}&a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\\&(\text{按第 } i \text{ 行展开}, i=1,2,\cdots,n);\end{aligned} \tag{1.3a}$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\,(\text{按第 } j \text{ 列展开}, j=1,2,\cdots,n). \tag{1.3b}$$

应当指出 n 阶行列式的定义也适用于二、三阶行列式(规定一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$).这里给出的 n 阶行列式的定义属于归纳

定义,即是在定义了二、三阶行列式之后,再来给出一般的 n 阶行列式的定义,这样定义的目的是便于读者理解和接受,但用它来证明行列式的基本性质比较麻烦.另外还有用 n 次置换的概念来定义的,目前多数教材采用的是引入排列的概念,利用排列的奇偶性来定义,有兴趣的读者可参阅其它线性代数教材.

(二) 行列式的性质

行列式有如下性质:

1. 行列式转置后,其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

2. 互换行列式的任意两行(列),行列式仅改变符号.

3. 若行列式中有两行(列)对应元素相同,则此行列式为零.

4. 若行列式中有一行(列)元素全为 0,则此行列式等于零.

5. 把某一行(列)的各元素同乘以数 k,等于数 k 乘以该行列式.

推论 1 若行列式某行(列)的所有元素有公因子,则可将该公因子提到行列式外面.

推论 2 若行列式有两行(列)元素对应成比例,则行列式等于零.

6. 行列式中,若某行(列)所有元素都是两个数的和.则此行列式等于两个行列式的和:即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

7. 以数 k 乘以行列式的第 i 行(列)加到第 j 行(列)上去,记为 $kr_i + r_j(kc_i + c_j)$,行列式的值不变.

注意:1. 用对角线法计算行列式只适用于二、三阶行列式.

2. 在运用性质 7 时,不可将其理解为"行列式的某一行各元素同乘以一个数后将另一行中对应元素加到该行上去,行列式的值不变".

(三) 行列式的计算

1. 二、三阶行列式可用对角线法分别按照下列线条所示写出其展开式(1.1)和(1.2):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.,$$

其中实线为正,虚线为负,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

2. 利用 n 阶行列式的展开式(1.3a)和(1.3b)将行列式降阶,反复使用,直降到二、三阶行列式,然后直接计算.

在计算时常利用行列式的性质将行列式某行(列)化为只有一个或两个非零元素,然后再按该行展开.

3. 计算行列式的另一基本方法是利用行列式的性质将行列式化为三角形行列式,此时行列式的值等于三角形行列式主对角线元素之积.这种方法计算程序固定,且随着行列式阶数的增加,与前面计算相比进行乘法运算的次数大大减少,因此很适于在计算机上使用.

(四) 克拉默法则

1. **定理** 若含有 n 个未知量和 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则方程组(1)有唯一解，且

$$x_j = \frac{D_j}{D}(j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.4}$$

课本上已给出了证明，这里再给一个易于理解的证明.

因为 $Dx_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j}x_j & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{2j}x_j & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj}x_j & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[k=1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n]{x_k c_k + c_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_j ,
$$

又因为 $D\neq 0$,

所以 $x_j=\dfrac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots,n)$.

克拉默法则可判断线性方程组(1)在什么条件下有惟一解,且给出了求解的方法.但是需要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式,计算量是非常大的.可是其计算程序简单,为使用计算机带来极大方便.

克拉默法则在理论研究上有很大用处.如在矩阵理论、线性方程组、向量组的相关性讨论中都将用到.

2. **推论** 齐次线性方程组

$$
\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}
$$

有非零解的必要条件是 $D=0$.

证明 若方程组(2)有非零解且 $D\neq 0$,则由克拉默法则,与 $D\neq 0$ 时方程组(2)只有零解相矛盾.因此必有 $D=0$.

三、疑难解析

1. n 阶行列式的展开式应有多少项?每项有多少个元素相乘?

答 我们知道二阶行列式有两项,三阶行列式有六项,即 $1\cdot 2\cdot 3=3!$ 项,其中 3 项带正号,三项带负号.根据 n 阶行列式的定义,四阶行列式可按某行元素分别与其代数余子式(是三阶行列式)相乘后再求和,因此应有 (4×6) 项即 $4!$ 项,其中 $\dfrac{4!}{2}$ 项带正号,

$\frac{4!}{2}$项带负号.同理,n 阶行列式计算中应有 $n\cdot(n-1)!=n!$ 项,其中 $n!/2$ 项带正号,$n!/2$ 项带负号.

二阶行列式展开式中,每项中有两个元素相乘,且它们都是取自不同行、不同列的元素.三阶行列式展开式中每项有三个元素相乘,它们也是分别取自不同行、不同列.n 阶行列式展开式中,每项有 n 个分别取自不同行、不同列的元素相乘.

2. 行列式的某一行(列)与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为什么等于零?

答 根据行列式的性质 3 有

$$D_1=\begin{array}{l}\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right|\begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}\end{array}=0,$$

按第 j 行将 D_1 展开便得

$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0$,同理对第 i 列与第 j 列相等的行列式,其值为

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

3. 下面两个行列式的值是否相等?

(A) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$;

(B) $\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

答 由 n 阶行列式的定义:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3,$$

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & 0 \\ c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ c_3 & 0 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 c_3.$$

因此这两个行列式的值在 $a_1 b_2 c_3 \neq 0$ 时是不相等的.

一般地 $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

4. 下面运算对吗？为什么？

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

答 上面运算是错误的. 根据行列式性质 6 有

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & c_1+d_1 \\ a_2+b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1+d_1 \\ a_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1+d_1 \\ b_2 & c_2+d_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

5. 下面计算错在哪里？

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{-r_3+r_2 \\ -r_1+r_3}]{-r_2+r_1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

解 该题是用性质 7 计算. 在进行 $-r_2+r_1$ 运算之后，第一

行变为 $-1\quad 3\quad 4$,而不再是 $1\quad 3\quad 5$,因此,在进行 $-r_1+r_3$ 后第三行应为 $2\quad 0\quad 3$,而不是 $0\quad 0\quad 2$.正确作法是

$$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&0&1\\1&3&7\end{vmatrix}\xlongequal[-r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&3&5\\0&-6&-9\\0&0&2\end{vmatrix}=1\times(-6)\times 2=-12.$$

通过本题的讨论,在运用性质 7 时,还要注意每一次利用性质都是在完成上一步的基础上进行的.初学者最好用一次性质写下结果后再做下一步运算.如本例还可以改用下面方法计算其值.

$$\begin{vmatrix}1&3&5\\2&0&1\\1&3&7\end{vmatrix}\xlongequal{-r_3+r_1}\begin{vmatrix}0&0&-2\\2&0&1\\1&3&7\end{vmatrix}\xlongequal{-2r_3+r_2}\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&-6&-13\\1&3&7\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{3\times 2}{2}}(-2)\times(-6)\times 1=-12.$$

6. 行列式中若某行和某列都有相同因子是否可以同时提取?

答 这种情况应特别细心.如

$$\begin{vmatrix}ax&y&z\\ay&az&ax\\az&x&y\end{vmatrix}\neq a^2\begin{vmatrix}x&y&z\\y&z&x\\z&x&y\end{vmatrix}$$

7. 在 n 阶行列式的展开式中应注意什么?

答 用行列式的定义计算行列式的值时,为了计算方便应注意:

(1) 若某行有公因子(或分数),应先提取公因子(或分数的公分母).

(2) 用性质 7 将某行或某列(零元素多的行或列)化为仅有一个元素不为零.

(3) 展开时切记,按行展开的展开式(1.3a)是该行各元素与其代数余子式的乘积之和;而不是与余子式的乘积之和.这一点经常出错.如

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

8．克拉默法则能否求解一般线性方程组?

答 克拉默法则只是在 n 个未知数和 n 个方程且系数行列式 $D\neq0$ 的条件下，用来求其方程组的唯一解．对于 $D=0$ 时是否有解，在有解的情况下如何求解未作解答．当未知数个数多于(或少于)方程的个数时的线性方程组的解的问题也没讨论．因此克拉默法则有很大的局限性．

四、典型例题分析

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的元素中有的是分数，应用性质与推论 1 将其化为整数：

$$D=\begin{vmatrix} \frac{3}{4} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{5}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix}$$

能被 3 整除.

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{10}\begin{vmatrix}3 & 8 & -2 & -20\\2 & -4 & 3 & 16\\5 & -8 & 8 & 28\\4 & -8 & 5 & 24\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\begin{vmatrix}3 & 2 & -2 & -5\\2 & -1 & 3 & 4\\5 & -2 & 8 & 7\\4 & -2 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{-2r_2+r_3\\-2r_2+r_4}]{2r_2+r_1}\frac{1}{30}\begin{vmatrix}7 & 0 & 4 & 3\\2 & -1 & 3 & 4\\1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{30}\times(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}7 & 4 & 3\\1 & 2 & -1\\0 & -1 & -2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{-2c_2+c_3}-\frac{1}{30}\begin{vmatrix}7 & 4 & -5\\1 & 2 & -5\\0 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{30}\times(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7 & -5\\1 & -5\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{30}\times(-30)=1.$$

例 2 不展开行列式,证明

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\4 & 4 & 1\\2 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

能被 3 整除.

证明 所给行列式所有元素都是整数,因为行列式的展开式中只有加、减、乘法运算,整数的加、减、乘的结果仍是整数,所以该

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com