高等学校数学辅导教材

- 以历年考研部分试题作典型例题
- 与同济大学新教材配套选解习题

高等数学
学习指导与习题解析

（第二版）

黄光谷 刘兴卫 夏敏学 欧贵兵 编

（下册）

华中科技大学出版社

以历年考研部分试题作典型例题
与同济大学新教材配套选解习题

高等学校数学辅导教材

高等数学学习指导与习题解析

（第二版下册）

黄光谷　刘兴卫
夏敏学　欧贵兵　编

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题解析(第二版下册)/黄光谷　等编
武汉:华中科技大学出版社， 2002年3月
ISBN 7-5609-2001-2

Ⅰ.高…
Ⅱ.①黄…　②刘…　③夏…　④欧…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

高等数学学习指导与习题解析
(第二版下册)

黄光谷　刘兴卫
夏敏学　欧贵兵　编

责任编辑:李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:陈元玉　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

印　刷:武汉首壹印刷厂

开本:850×1168　1/32　印张:18.25　字数:440 000
版次:2002年3月第2版　印次:2002年3月第4次印刷　印数:16 001—20 000
ISBN 7-5609-2001-2/O·190　定价:21.50元

内 容 提 要

本书是高等学校(主动式教学法教学改革)数学序列教材之主教材《高等数学Ⅰ》的辅导教材,内容以教育部(原国家教委)所颁本科《高等数学课程教学基本要求》为依据,下册包括向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,重积分,曲线积分与曲面积分,无穷级数共五章.各章按讲编写,与主教材配套,便于程序化教与自学及规范化管理;各讲包括内容提要、答疑辅导、典型例题、教与学建议、补充与提示、习题选解几个部分;各章末安排了习作课,含内容小结、释疑解难、题型归类、课堂练习、课外作业(及答案与提示)几部分;书末安排了期末复习课三次,含知识要点、范例分析、自测题(及答案)、总复习题解答、期末试题(及答案)三套;还附有近几年的硕士研究生入学试题及答案.

本书可供高校工科、理科、农林、财经本科或专科各专业《高等数学》课程作为教学参考书,还适宜作为自学辅助课本、教师上课与习作课和复习课的讲义,本书第二版的许多例题(或习题)换上了历年同类型的考研试题,便于读者复习备考和作为“考研”的复习资料.本书内容具有通用性,对于使用各种版本(本科)《高等数学》或《数学分析》教材的读者,都适用.例如,本书的编排体系与同济大学新编《微积分》教材,是不谋而合的.本书第二版的习题选解换成了同济大学编《高等数学》第四版与《微积分》两种教材中重、难点习题的选解,因此,本书也适宜与该《微积分》教材和该《高等数学》教材配套使用.

本套书是湖北省教育委员会审定的A类《湖北省普通高等学校1997年省级教学研究项目》.

序　　言

我们即将进入21世纪，面临信息时代（或工业革命后时代、计算机革命时代）.其特点是信息爆炸，通常以十年为单位度量；计算机迅速发展、日益普及；数学的应用向一切领域渗透，科技及各行业日益数学化、数字化.我们必须进行教育改革以适应时代的发展.

高等学校传统的数学教材有许多优点，对培养人才起了很大的作用.但反思一下，传统的高校数学教材和教学越来越形式、抽象，多见定义、定理、证明、计算、推导，少见与周围世界及各实际问题和其他学科的密切联系，内容老化，培养学生能力和素质不够，不便于自学.通过数学教学开发智力、达到开发头脑全面考虑科学系统的功能就更差了，这也是一个国际性的问题.目前的高校数学教育对培养绝大多数的非数学专业的人才来说是远远不够的，高校数学教育必须进行改革.

由黄光谷教授等一批老师编写的《高等学校数学序列教材》，顺应了转变教学思想、更新教学内容、改进教学方法、改革创新教材的新形势，他们立足于多年教学实践、探索、改革的基础之上，有深厚的群众基础、素材基础、经验基础和写作基础.这些老师在退休前，边教学、边写作，精心设计、大胆创新、团结协作，克服了种种困难，终于完成了这项系统工程，这套著作将为百年树人，提供春秋季教材作出巨大的贡献.

这套教材的每门课程教材分为三个梯级：主教材、教学指导书、习题解答，它们互相配合呼应，形成一个大系统和整体，便于自学，构成大三级循环.中三级循环为新课、习作课与复习课，小三级为每讲的内容，思考题与习题.大、中、小三个梯级循环，配合默契，学生学了不愁学不好，不愁能力和素质不增强.虽减少了课时，但能提高教学的质与量.

这套教材注意继承传统教材的优点，并实行主动式教学法，本着循序渐进、学而时习之的教学原则，注意调动学生学习的主观能动性，实行教与自学双向教学，力求处理好传授知识与培养能力和提高素质的关系，注意培养学生思考、归纳、分析、综合、钻研、类比、判断、选择、联想、应用、建模、创新等等各种数学方法和能力；让学生在分析问题、解决问题中学会选择方法、检验结果、寻找原因、转换观点等一系列实在的本领，提高学生的素质和数学修养.

这套教材既注意了传授必要的基础知识，又注意介绍建模、数学软件等新概念、新方法和新知识，以适应当今科技迅猛发展的形势. 在编写格式方面，大胆采用了按讲编写的新方式，既便于教与自学及规范化管理，还可为后续工程——制作音像教材(音像制品和电子书籍等)提供脚本或素材，便于电化教学之用.

总之，这套教材构思好、声势大、编排新、使用专业多、适用面广，将会在数学教育界引起很大的反响.

编写这套教材是改革数学教育的一种尝试. 由于前无借鉴和时间仓促等原因，和任何新生事物一样，这套教材中也会存在一些不足之处，这将会随着试用、修改而日臻完善. 我相信这套几百万字教材的出版，定能受到广大师生和教育工作者的欢迎和好评，它们将为高等学校数学教材的百花园又增添一批奇葩.

华中科技大学教授　林化夷

1997 年 11 月于武汉

第二版前言

本书自 1999 年 8 月第一版问世以来，深得读者的厚爱，供不应求，每半年都要印刷一次，已连续印刷了 4 次，在此深表谢意！

应读者的要求，本书第二版在保持原有的结构和风格的前提下，对第一版作了如下改动：

一、对各讲中的典型例题，各章习作中的题型归类、及期末总复习中的例题或习题，部分地作了类型相同的更换，换上了 1987 至 2001 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学一至四的试题及解答，其中部分试题末标注的(2001，一)是指 2001 年数学一的考研试题，其它类似. 作这样的例题(或习题)更换，既便于新学高等数学或微积分课程的读者了解教学要求和考试要求，也便于考研者复习备考. 附录换上了近三年的考研试题及答案.

二、对各讲的习题选解和各章复习题选解，换上了同济大学编《高等数学》第四版与面向 21 世纪《微积分》两种教材(高等教育出版社出版)中重点和较难习题的选解，这样更换可为更多的读者排忧解难，配合对上述两教材的学习和复习.

三、改正了本书第一版中个别的排校疏误.

我们相信，如上改动会得到更多读者的理解和欢迎；继续恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改.

编　者
2001 年 10 月于武汉

第一版前言

国家要实现“四个”现代化，要参与21世纪的世界性竞争，关键是人才的培养；而人才培养的关键是教育.数学教育是教育事业的重要组成部分，改革数学教育的关键是教材的改革.有什么样的教材，就决定了教师采用什么样的教学方式和方法.传统数学教材有逻辑严谨、系统性强等许多优点，对培养人才起了很大的作用.但由于历史的局限性，是有改进之处的.

本套（新编）高等学校数学系列教材，共三类六门十多册，是覆盖高等数学、工程数学等主要基础课程的教材，注意吸收了各门传统教材的优点，又力求转变教育思想，体现教改精神，以适应21世纪科技与信息迅猛发展的新形势，着眼于培养具有知识面广的较高数学修养（或素养、素质）的人才，具有现实的意义.

本套教材在内容上以国家教委新颁《高等学校工科数学课程教学基本要求》为依据，提倡主动式教学法，力求处理好传授数学知识与培养各种能力和提高素质的关系，把培养学生获取知识、解决问题的能力与开拓、创新的精神作为教材的重要任务之一，变被动式的灌输知识（注入式）为主动的参与、钻研与力行（即主动式、启发式教学法），实行教与自学双向教学.

这套教材总的构思是：按讲编写，循环配合；培养能力，便于自学；提高素质，减少课时，便于备课和电化教学.其中三类书之间既互相配合呼应，又各分工不同，各显特色：主教材减少课时、内容少而精、便于教与自学；主教材所配习题及习题解答书则巩固教材内容，更多地提供方法、加大信息量；教学指导书则加深理解、开拓视野、扩大知识面，并介绍有关新概念、新方法和新知识.

使用这套教材时，应以主教材为蓝本.主教材的各讲内容，原则上是两学时的教学内容，使用时可更换和补充证法和例题；有些讲编入的内容较多，可从中挑选、讲授主要内容；其余内容或简单

例题可留给学生自学.有些讲的内容比较简单，可以合并两讲为一讲，可节约教学时数，加强习作课或另补本专业建模等教学内容.教材中所配习题，可点半数左右作为课后作业，其余由学生选做.

教学指导书中所列习作课，应纳入教学日历、作为教学内容的一个重要组成部分.习作课也是一种数学实验课，应引起重视，以便培养学生解题、思考、应用等各种能力.上习作课应注意引导，启发思维，做到讲练结合.至于教学指导书中所列复习课，各专业可视教学时数是否充裕，或者纳入教学计划，或者由学生自学.教学指导书中的其余内容，均可留给学生自学.

习题解答书与教学指导书是学生自学的两根拐杖，出版时我们将它们编在一起了.应让学生学习“摸着石头过河”，应教育学生先自做习题，先自思考；遇有困难，再看解答，并读懂弄通.不要怕学生照抄解答，反正这几门数学课程的考试一般是闭卷考试，在考场上是抄袭不到的.不要“因噎废食”——不准学生看习题解答书.习题解答书全由学生自学.

新编这套教材是改革现行高校数学教材的一种尝试.由于我们水平有限、资料有限、见识有限，加上时间仓促，书中可能存在一些错误、缺点或不妥之处，恳请各位同行和读者多提宝贵意见，以便再版时修改.

编写这套书，得到武汉科技学院、华中理工大学出版社等单位的大力支持和关心，在此我们表示衷心的感谢！

本书编委还有黄光谷、王洪山、李美珍、黄宗东、蔡晓英、杜立等同志，唐强、杜宗林做了部分工作，特此致谢！

编　者

1998年11月于武汉

目　录

第七章　向量代数　空间解析几何

本章内容比较容易，本书将教材中的七讲合并成三讲进行复习，有关空间直角坐标系与距离公式等预备知识详见教材或下一讲.

第一讲　向量代数

一、内容提要

1. 向量的概念

向量又名矢量，是指既有大小(长短)又有方向的量，向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小又叫做向量的模，记为 $|\boldsymbol{a}|$. 有关概念还有：向量的值 a，单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，零向量 $\mathbf{0}$，负向量 $-\boldsymbol{a}$，基本向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，向径 $\boldsymbol{r}$，向量相等，自由向量，向量的坐标(即投影) a_x、a_y、a_z，向量的方向角与方向余弦，向量的共线与共面，等等，此不赘述.

2. 向量的线性运算(加减与数乘)

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$：用平行四边形或三角形法则求和；

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$：用三角形法则求差；

$\lambda\boldsymbol{a}$：$\boldsymbol{a}$ 的 λ 倍，λ 为正(负)决定了 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向(反向)，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

向量加减法满足交换律与结合律，数乘运算满足结合律与分配律.

3. 方向余弦与投影定理

设 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴的夹角(即方向角)依次为 α、β、γ,则

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos\alpha = a_x/|\boldsymbol{a}|, \quad \cos\beta = a_y/|\boldsymbol{a}|, \quad \cos\gamma = a_z/|\boldsymbol{a}|;$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

定理 1 $\mathrm{Prj}\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos(\boldsymbol{u} \hat{,} \overrightarrow{AB})$.

定理 2 $\mathrm{Prj}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Prj}\boldsymbol{a}_i$.

4. 向量的乘法运算

根据解决实际问题的需要,向量的乘法有多种形式.常用的有数量积、向量积、混合积三种形式.

向量的线性运算与乘法运算都是代数运算,它们是关于数(或函数)的代数运算的推广,本讲是研究向量及其代数运算的,故名曰"向量代数".所用的方法有矢算法与坐标法两种,本书以坐标法为主.此处的矢量,其大小与方向都保持不变,称为常矢,否则称为变矢.在"向量分析"中,再研究变矢及其函数、极限、连续、微分与积分等问题,而在《线性代数》课程中,还将三维向量$\{a_x, a_y, a_z\}$拓广到 n 维空间的 n 维向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

(1) 数量积(或称点积、内积)是数,定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) \triangleq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta, \quad \theta = (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b}),$$

它有如下性质和计算公式:

1° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$ (投影表示式)

$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (坐标表示式);

2° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \triangleq \boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$;

3° $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (交换律);

4° $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ (分配律);

5° $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b}) = \lambda\mu(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (数乘结合律).

(2) 向量积(或称叉积、外积)与数量积不同,它是向量

$$c = a \times b = [ab] = |a||b|\sin\theta c^{\circ},$$

其中 $\theta = (a\hat{,}b)$，$c \perp a$、b 且指向服从右手法则. $|c|$ 的几何意义是以 a、b 为邻边的平行四边形的面积. 向量积有如下计算公式和法则：

1° $a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ （分量表示式）；

2° $a \times a = 0$, $i \times j = k$, $j \times k = i$, $k \times i = j$；

3° $a \times b = - b \times a$（反交换律）；

4° $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$（分配律）；

5° $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$ （数乘结合律）.

(3) 两向量间的关系（设 a、b 为非零向量）

1° 夹角 $\cos\theta = \dfrac{a \cdot b}{|a||b|}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$；

2° 垂直 $\Longleftrightarrow a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$；

3° 平行 $\Longleftrightarrow a \times b = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

(4) 混合积 $(a \times b) \cdot c \triangleq [abc]$，或 (abc)，或 abc. 设 $c = \{c_x, c_y, c_z\}$，有

$$[abc] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

混合积是数，其绝对值的几何意义是以 a、b、c 为相邻侧棱的平行六面体的体积 V，即

$$[abc] = \pm V, \quad 或 \quad V = |abc|.$$

三个向量 a、b、c 共面 $\Longleftrightarrow [abc] = 0$.

由互换行列式两行变号得（轮换性）：

$$abc = bca = cab = - acb = - bac = - cba.$$

二、答疑辅导

1. 设 a、b 为非零向量，指出它们具有什么几何特征，才能使

下列各式成立？

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；　　(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；

(3) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

答　(1) 由向量加、减法的平行四边形法则知，当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=90°$，即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，(1) 式成立(图 7-1(1)).

(2) 与(1) 同理，当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})>90°$ 时，(2) 式成立(见图 7-1(2)).

(3) 由三角形法则知，一般有 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；当且仅当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=180°$ 时，(3) 式才成立(图 7-1(3)).

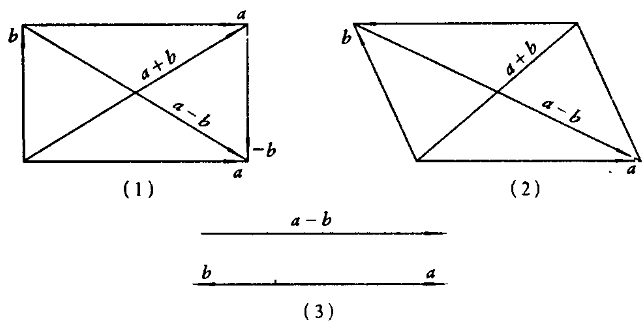

图 7-1

2. 设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，回答下列问题，并说明理由：

(1) $\boldsymbol{b}\perp Oz$ 吗？　　(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel\boldsymbol{c}$ 吗？

(2) $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$ 吗？　(4) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面否？

答　(1) $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 面内(或 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{k}=0$)，故 $\boldsymbol{b}\perp Oz$.

(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}\neq\lambda\boldsymbol{c}$，或$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，故$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\nparallel\boldsymbol{c}$.

(3) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\{1,-2,3\}\cdot(3,0,-1)=0$，故$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

(4) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\{1,-2,3\}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&1&0\\-1&1&1\end{vmatrix}=\{1,-2,3\}$

$\cdot \{1, -2, 3\} \neq 0$，故 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共面.

3. 下列命题是否成立？为什么？

(1) 若 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$；

(2) 若 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$；

(3) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$；

(4) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$；

(5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$；

(6) $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$；

(7) 若 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面；

(8) 若 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是互不平行的单位向量，且它们构成一个三角形，则 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$.

答 (1) 不成立. 当 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，对任意 $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{c}$，都有 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ 不成立；当 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ 时，由 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} \Longrightarrow |\boldsymbol{a}| \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{c} \Longrightarrow \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{b} = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}} \boldsymbol{c}$，显见两向量 $\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影相等，不一定有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$，当且仅当这时还有 $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{c}$ 时，才有 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$.

(2) 类似(1) 讨论，命题不成立.

注 由(1)、(2) 知，点积与叉积不满足消去律！

(3) 不成立. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 共线的向量；而 $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不一定平行，可见命题不成立.

(4) 不成立，可用反例说明，取 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{c} = \{1, 1, 0\}$，则

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j};$$

但
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{j} \neq -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}.$$

注 由(3)、(4) 知，点积与叉积不满足结合律！

(5) $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$.

(6) 由 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow$ 三个向量 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}$ 构成三角形，它们共面，故混合积

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$$

(7) 当 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共线亦共面，命题成立；当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 不共线时，由题设

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \Longrightarrow$$

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \Longrightarrow \boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}),$$

又 $$\boldsymbol{a} \perp (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}), \quad \boldsymbol{c} \perp (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}),$$

故 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，命题也成立.

(8) 不成立，由题设，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 构成三角形 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = -1.$$

同理 $$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = -1, \quad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = -1,$$

故 $$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = -3/2 \neq 0.$$

三、典 型 例 题

1. 向量及其运算

例 1 设已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模，方向余弦，方向角及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平行的单位向量.

解 $$\overrightarrow{M_1M_2} = \{3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\};$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2;$$

从而 $$\overrightarrow{M_1M_2}^{\circ} = \overrightarrow{M_1M_2} / |\overrightarrow{M_1M_2}| = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right\};$$

于是 $$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{2},$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{3\pi}{4}, \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

而与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 平行的单位向量为 $\pm \overrightarrow{M_1M_2}^{\circ}$，即为

$$\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right\} \quad 与 \quad \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}.$$

例 2 设 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 2$，则 $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})] \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})$ = ________. (1995，一)

解 原式 $= [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b}] \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a}) + [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}] \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})$

$= (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a}$