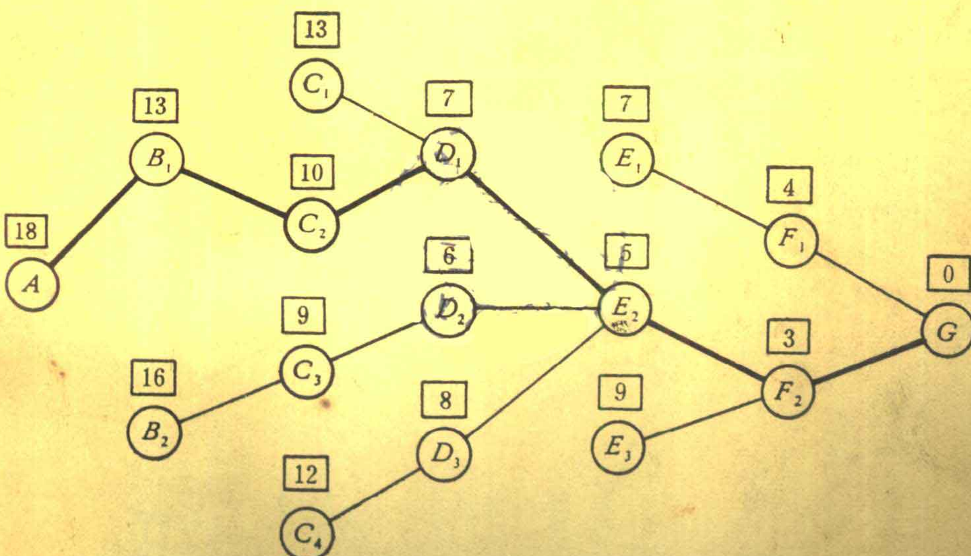
普通高等教育测绘类规划教材

数学规划在测绘学中应用

郑肇葆 编著



测绘出版社

普通高等教育测绘类规划教材

数学规划在测绘学中应用

郑肇葆　编著

测绘出版社

(京)新登字 065 号

数学规划在测绘学中应用
郑肇葆　编著
*
测绘出版社出版
北京大兴星海印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行
*
开本 787×1092　1/16・印张 15・字数 335 千字
1993 年 6 月第一版・1993 年 6 月第一次印刷
印数 0 001—1 500 册・定价 7.00 元
ISBN 7-5030-0563-7/P・214

前　言

数学规划已被国民经济各部门广泛采用，而且效果显著，在重大的决策课题中，发挥了它巨大的作用。将数学规划的理论和方法应用到测绘学中，在我国还是80年代的事，引用的时间虽然不长，然而最优估计的稳键性质，使这种方法应用在测量数据的粗差定位、解求病态方程中已经取得明显的效果。特别是近几年，动态规划的理论和方法在图像匹配、特征提取、模式识别等图像处理过程中，正在推广使用，效果显著。可以看出数学规划在信息学科中应用是很有潜力的，作为信息学科的测绘学当然是不能例外。编写这本教材的目的就是为了使数学规划的基本理论和方法与测绘学中的具体问题结合起来，让数学规划寻求最优解的理论在测绘学中得到更广泛的应用。

本教材包括的主要内容是：线性规划、动态规划、非线性规划以及数学规划在测绘学中应用四大部分。教材着重于基本理论和方法的阐述，引用有关定理和结论，避免数学上严密的推证。对于各种方法的算法均有较详细的推演过程，便于读者掌握计算方法。每章后附有小结和习题，供读者练习使用。本书除了介绍一些经典的方法之外，在第四章介绍了在摄影测量中经常遇到的约束条件为大型稀疏矩阵的解算方法；第九章阐述了摹矩阵的应用，这是我国秦裕瑗教授提出的“嘉量原理”理论的一部分，这个原理使多阶段寻优的问题，用摹矩阵的表达方式变得简单明了，而且很容易程序化，便于在计算机上计算。

本教材适合测绘专业的大学本科生和研究生使用。对于本科生，书中第四章、第六章、第七章中§7-10以及第九章可以选读。

秦裕瑗教授、钱曾波教授审阅了本书原稿，并提出宝贵意见，编者表示衷心感谢。本书得到国家自然科学基金的资助。

这门课程在测绘专业中开设是第一次，数学规划在测绘学中应用时间还不长，加之编者水平有限，教材编写中错误难免，敬请读者、同事们、专家们批评、指正。

编　者

1991年12月

目　录

第一章　数学规划基础

§1-1　概　　述

数学规划是运筹学的一部分，它包括线性规划、非线性规划、动态规划等。早在第二次世界大战期间，英国军事管理部门邀请了一批科学家来研究与全国的空中和地面防御有关的战略与战术问题。由这些科学家组成的科学小组标志着第一次正式的运筹学活动，通过这个小组的活动，使英国作战研究小组获得可喜的成果，进而促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动。在美国小组有成效的应用中，包括复杂逻辑问题的研究，新的作战方案的发明，埋设水雷的计划以及电气设备的有效利用。

战后，工业管理家们注意到军事小组的成就，也想用来解决他们的问题。这些问题由于在商业机构中推行职能专门化而变得更加突出了。尽管最初建立专门的职能部门是为机构的整个目标服务，但是这些职能部门的个别目标常常和机构的总目标不一致，这样产生了复杂的决策问题，终于使商业机构要利用运筹学这个有效的工具。

虽然英国是运筹学这门新学科的创造者，但美国在这方面迅速取得了最快的发展速度。第一个在这方面被广泛公认的数学方法称为线性规划的单纯形法，它是1947年由美国数学家丹捷格（G.B. Dantzig）制定的。在这之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是能用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它的适用领域更广泛：从解决技术问题的最优化，到工业、农业、商业、交通运输业、军事的计划和管理及决策分析都可以发挥作用；从范围来看，小到一个小组的日常工作和计划的安排，大至整个部门，以至国民经济计划的最优化方案的提出，它都有用武之地。

把许多实际问题归结为线性规划问题时，其目标函数和约束条件都是自变量的线性函数。但是，还有另外一些问题，它的目标函数和约束条件很难用线性函数表达。如果目标函数或约束条件中，有一个或多个是变量的非线性函数，就称这种规划问题为非线性规划问题。解这种问题就要用非线性规划的方法。由于很多实际问题要求进一步精确化，以及电子计算机的发展，使非线性规划在近二三十年间得以长足进展。目前在最优设计、管理科学、质量控制等许多领域中都得到越来越广泛的应用。

一般说来，解非线性规划问题要比解线性规划问题困难得多。也不像线性规划有单纯形法这一通用方法，非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法，各个方法都有自己特定的适用范围。因而，这是需要人们更深入地进行研究的一个领域。

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。大约产生于50年代。1951年美国数学家贝尔曼（R. Bellman）等人，根据一类多阶段决策问题的特性，提出了解决这

类问题的“最优化原理”，并研究了许多实际问题，从而创建了解决最优化问题的一种新的方法——动态规划。他的名著《动态规划》于1957年出版，该书是动态规划的第一本著作。

动态规划的方法，在工业、经济、工程技术及军事等部门中都有广泛的应用，并且获得了显著的效果。近年来，又广泛用于最优控制方面。许多问题利用动态规划的方法去处理，常比线性规划或非线性规划更有成效。特别对于离散性问题，由于解析数学无法施展其技，而动态规划的方法，则成为解决它的一个非常有用的工具。但是，动态规划方法也存在两大弱点：一是利用“最优化原理”得出函数方程后，尚没有一种统一的处理方法，必须根据问题的各种性质结合其它数学技巧来求解。二是所谓“维数障碍”，即当问题中的状态变量个数（维数）太大时，由于计算机存贮器容量和计算速度的限制而无法解决。

我国的秦裕瑗教授提出的“嘉量原理”，为解决多阶段的决策问题作出贡献，应用摹矩阵方法，使多阶段的决策问题代数化，容易编成程序，由计算机完成大量的计算工作。

以上所介绍的数学规划的各类问题在国民经济各部门中的应用及所取得的效果是很明显的了，而在测绘中的应用还是80年代的事，开始在测量的数据处理中引用线性规划的单纯形法检测数据中存在的粗差，特别是当含有多个粗差时，粗差定位的效果比其它的方法更为有效。此外在摄影测量平差计算的问题中还能应用线性规划的方法改善病态方程求解的精度。近几年来动态规划在摄影测量数据处理中应用日益增加，目前已在影像特征的提取、边界影像匹配、数字影像相关、从数字立体像对提出一个地物的三维坐标等方面应用，取得确有成效的结果。数学规划中寻求最佳解、获取最优方案或对某实际生产过程寻求最优控制的方法和理论在测量中的应用还刚刚起步，在测量中更加广泛的应用，有待于从事数学规划和测量的工作者进一步开拓和研究。

§1-2 集合与集合符号

我们把具有某种特征的对象的全体叫做集合。最简单的对象称作元，是几何点。我们这里考虑的集合限于点集合。例如，在三维线性空间中，用有序的三个实数(x_1, x_2, x_3)表示“点”，在n维线性空间中，用有序的n个数$(x_1, x_2, \cdots x_n)$表示“点”。数组中的每个数有时称为点的分量。

通常我们用一些条件规定点的集合，例如，在某个圆内所有点是一个集合。我们可以研究二维线性空间中的位于直线$x_1+x_2=10$上的全部点的集合P，

$$P=\{(x_1, x_2)|x_1+x_2=10\} \tag{1-1}$$

式（1-1）读作 **“P是由使得$x_1+x_2=10$成立的全部点（x_1，x_2）所组成的集合”**。竖线读作**“使得”**。竖线左方我们标记了点的一般本质或形式，竖线右方我们阐明P的成员所满足的限制或条件。

我们记任意点$(x_1, x_2, \cdots x_n)$为x。为了指明点x是某集合P的元，写作

$$x\in P \tag{1-2}$$

式（1-2）读作“**x是集合P的元**”，若x不是集合P的元，写作$x\notin P$.

式（1-2）给出的关系是点与集合的关系。还可以给出集合间的关系。两个集合相等是指它们包含有相同的元。一个集合可以是另一集合的一部分。例如，集合 P 可以包含于集合 S 中。这种情况下，称 P 为 S 的子集。这种关系记为

$$P \subseteq S \tag{1-3}$$

读作“**P 为 S 的子集**”。如果 P 是 S 的真子集(即在式（1-3）中 $P \neq S$），则记为

$$P \subset S$$

交集：二集合 S_1 和 S_2 的交集是一个集合，其点 x **同时是** S_1 和 S_2 的元。那么，二集合 S_1 和 S_2 的交集定义为一新集合 P，即

$$P = \{x \mid x \in S_1,\ x \in S_2\} \tag{1-4}$$

通常把表达式（1-4）所描述的集合用下面符号表示

$$P = S_1 \cap S_2 \tag{1-5}$$

式（1-5）读作“**P 等于 S_1 和 S_2 的交集**”。

式（1-5）的简单推广，可定义任意有限数目集合的交集。n 个集合 S_1，S_2，$\cdots S_n$ 的交集写作

$$P = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_i \tag{1-6}$$

或

$$P = \{x \mid x \in S_1,\ x \in S_2,\ \cdots x \in S_n\} \tag{1-7}$$

并集：二集合 S_1 和 S_2 的并集是这样的全部点 x 的集合，这里 x 或是 S_1 的元或是 S_2 的元。二集合 S_1 和 S_2 的并集定义一新集合 P，即

$$P = \{x \mid x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2\} \tag{1-8}$$

或

$$P = S_1 \cup S_2 \tag{1-9}$$

式（1-9）读作“**P 为 S_1 和 S_2 的并集**”。n 个集合 S_1，$S_2 \cdots S_n$ 的并集可定义为

$$P = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n = \bigcup_{i=1}^{n} S_i \tag{1-10}$$

或写作

$$P = \{x \mid x \in S_1 \text{ 或 } x \in S_2 \text{ 或} \cdots \text{或 } x \in S_n\} \tag{1-11}$$

二集合的交集和并集的图示见图 1-1 和图 1-2。

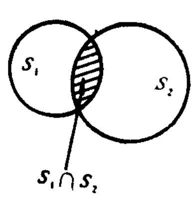


图 1-1

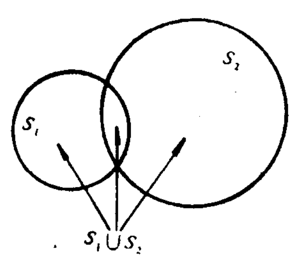


图 1-2

§ 1-3 n 维几何与集合

若我们研究全部点（x_1，x_2）的集合，并给出任意两个这样的数对之间距离的定义，则这个集合称为二维欧几里德空间，并用 E^2表示。若有两个点 $x_1=(a_1,b_1)$和 $x_2=(a_2,b_2)$，则距离 d 为

$$d=[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1-12}$$

同理，一个三维欧几里德空间 E^3，其距离定义为

$$d=[(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{1-13}$$

（a_1，b_1）或（a_1，b_1，c_1）这样的点，与向量一一对应。通过向量符号，式（1-12）、式（1-13）可写为

$$d=[x_2-x_1)(x_2-x_1)^T]^{\frac{1}{2}} \tag{1-14}$$

这是通过两个向量的数量积表示。

定义全部有 n 个分量的点或向量的集合为一个 n 维线性空间。

我们将距离定义为

$$d=[(x-y)(x-y)^T]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{1-15}$$

其中，$x=(x_1，x_2\cdots x_n)$，$y=(y_1，y_2\cdots，y_n)$。这样的线性空间称为 n 维欧几里德空间，记作E^n。

从二维空间、三维空间中的两点间的距离到 n 维空间中两点间“距离”的扩展，启示我们，可以将二维、三维空间中某些几何概念或图形，作类似的扩展。

例如，E^3中的一平面可表示为

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b \tag{1-16}$$

或

$$ax^T=b \tag{1-17}$$

这里$a=(a_1，a_2，a_3)$，$x=(x_1，x_2，x_3)$。推广到E^n，下式给出

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b \tag{1-18}$$

或
$$H=\{X=(x_1，x_2，\cdots x_n)|ax^T=b\} \tag{1-19}$$

的点集合称为超平面，甚至简称为平面。其中，$a=(a_1，a_2，\cdots a_n)$，$X=(x_1,x_2，\cdots x_n)$。可以看出，当 $n=3$ 时，超平面变成了E^3中的平面。超平面只不过是一个点集合。

例如在E^2或E^3中，通过两点X_1和X_2的直线是由下面的集合来表示

$$L=\{X|X=\lambda X_1+(1-\lambda)X_2\} \tag{1-20}$$

同理，我们用上式来定义通过E^n中的两个点X_1和X_2的直线，其中 λ 为任意数量。

如果我们希望定义 x_1和 x_2间的线段，我们将用下式：

$$L_1=\{x|x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2，0\leqslant\lambda\leqslant1\} \tag{1-21}$$

由于当 $\lambda=1$ 时，$x=x_1$和当 $\lambda=0$ 时，$x=x_2$。

再例如，在E^2中以点 a 为中心，r 为半径的圆周（或球面）或圆内（或球内）概念

也可推广到E^n中来，我们把这种圆（球）内的点所组成的集合称作r—圆（或r—球），还称做中心a的r—邻域。

现在我们在欧几里德空间里讨论点集的“边界”的概念。若我们参考图 1-3，看到边界线包围的部分称作S，诸如点a、b或c是集合S的边界上的点，另外，点d、e、f则是S的内部的点；g则是在S之外。但是，需要使这个概念更严谨些。若我们考虑一个点，例如，点d，绕它划一个圆，若令圆的半径足够地小，全部位于这圆内部的点均是集合S的点。但是，若我们选择一个点，例如b，绕其划一个圆，无论我们使这个圆怎样小，圆内总有某些点位于集合S的外部，而某些点位于集合S之内。以这个讨论做为基础，我们作下述定义。

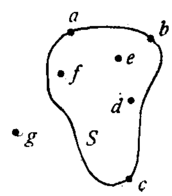


图 1-3

内点：若x存在一个ε—邻域，它仅包含集合S的点，则x是集合S的内点。

边界点：若x的每个ε—邻域，不论ε怎样小，总含有集合S的某些点，以及不属集合S的点，则点x是集合S的边界点。

开集：若集合S只包含内点，则说集合S是开的。

闭集：若集合S包含它的全部边界点，则说集合S是闭的。

边界：全部边界点组成的集合称作边界。

应注意，包含某些但不是全部边界点的集合，即不是开的，也不是闭的。

§1-4 凸集

若对于集合X_c中的任意两个点，连接它们的线段仍位于该集合中，则集合X_c定义为**凸集**。更严谨地说，对每个点对x_1，$x_2 \in x_c$，集合S_L将为X_c的子集，其中S_L定义为

$$S_L=\{x|x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ 0\leqslant\lambda\leqslant1\} \tag{1-22}$$

表达式$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$称为点$x_1$和$x_2$的**凸组合**。对于任意的一个$\lambda$值，$x_1$和$x_2$的凸组合给出一个由式（1-22）定义的线段上的点。由单个点构成的集合是一个特殊情况($\lambda=0$，$x=x_2$)，所以依定义亦是凸的。为了方便起见，**空集**（不包含任何点的“集合”）规定为凸的。

在图 1-4 的图形A、B、C中，我们可看到，在图中或点集中，连接任何两个点的线段，完全位于图形之内。因此，这些是凸集。然而，对于图形D、E和F，可立刻看出，连接某些点对的线段，将部分地或完全地位于集合之外。因此，这些不是凸集。

平面、半平面、直线、直线段、圆面、球都是凸集。我们规定，空集合是凸的。

一个与凸集有关的重要结果如下，我们仅阐述而不证明。

定理 1-1 任意数目凸集的交集是凸集。

图 1-5 表示两凸集及其交集。

凸集同其它任何集合一样，也具有内点和边界点。凸集的边界点中，有些具有一种有意义的性质，这种点称为顶点。

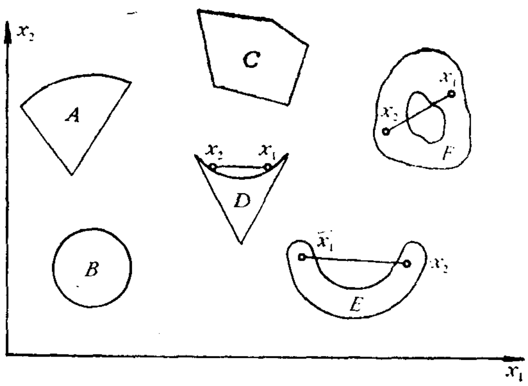


图 1-4　一些凸集和凹集的例子

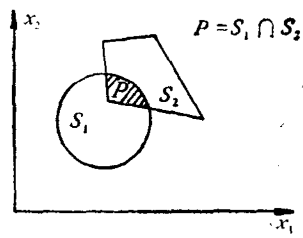


图 1-5　凸集的交集

顶点：设 k 是凸集，$X\in k$；若 X 不能用不同的两点 $X^{(1)}$，$X^{(2)}\in k$ 的线性组合表示为

$$\lambda X^{(1)}+(1-\lambda)X^{(2)},\ (0<\lambda<1)$$

则称 X 为 k 的一个顶点(或极点)。

上述定义的几何意义是，一个顶点不能位于集合中连接其它两点的线段上。换言之，一个顶点不能表示成集合中某两个不同点的凸组合。

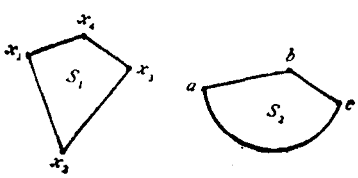


图 1-6　凸集与庭点

图 1-6 中集合 S_1 有四个顶点，记为 x_1,x_2,x_3,x_4。集合 S_2 有无限数目的顶点。除点 a，b，c 外，下边界的圆弧包括有无限数目的点，它们均为顶点。

由顶点的定义和例子，有两个事实应该阐明：①顶点都是边界点，但不是所有的边界点都是顶点；②内点不可能是顶点。

我们定义有限数目点的凸组合如下：

有限点集 x_1，$x_2\cdots$，x_p 的凸组合是

$$x=\sum_{i=1}^{p}a_i x_i \tag{1-23}$$

其中，$a_i\geqslant0$，$i=1$，2，$\cdots p$，且

$$\sum_{i=1}^{p}a_i=1 \tag{1-24}$$

定理 1-2　有限数目点 x_1，x_2，$\cdots$，x_p 的全部凸组合 S_c 是凸集。

例如，图 1-6 中，凸集 S_1 可以视为四个顶点 x_1，x_2，x_3，x_4 的全部凸组合的集合。

对于非凸的任意给定集合 S，有包含 S 的凸集 C。很明显，有许多（有限个或无限个）包含 S 的凸集。这就导出包含 S 的“最小”凸集的概念，定义如下：

凸包：包含给定集合 S 作为其子集的所有凸集的交集称为 S 的凸包。

定理 1-3　有限点集的凸包是这些点的全部凸组合的集合。

在 E^2 中点 x_1，x_2，$\cdots x_p$ 的集合的凸包是多边形。类似地，在 E^n 中，有限点集的凸

包为凸多面体。

定理 1-4　凸多面体中的任意点，能够表示为凸多面体的顶点的凸组合。

§ 1-5　凸函数和凹函数

凸函数：设 $f(x)$为定义在 n 维欧几里德空间 E^n 中某个凸集 R 上的函数，若对任何实数 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant1)$以及 R 中任意两点 x_1 和 x_2，恒有

$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\leqslant\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \tag{1-25}$$

则称 $f(x)$为定义在 R 上的凸函数。

若对每一个 $\alpha(0<\alpha<1)$和 $x_1\neq x_2\in R$ 恒有

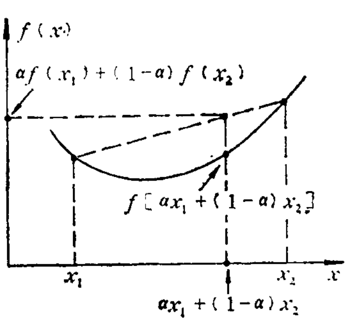
$$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)<\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2) \tag{1-26}$$

则称 $f(x)$为定义在 R 上的严格凸函数。

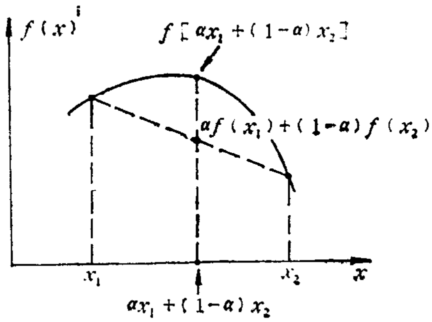
将式 (1-25) 和 (1-26) 中不等号反向，即可得到**凹函数**和**严格凹函数**的定义。

若函数图形上两点的联线处处都不在这个函数图形的下方，它是下凸的，如图 1-7 (a) 所示，凹函数则是下凹的，如图 1-7 (b)所示。

凸函数的性质：



(a) 凸函数



(b) 凹函数

图 1-7

1. 设 $f(x)$为定义在凸集 R 上的凸函数，则对任意实数 $\beta\geqslant0$，函数 $\beta f(x)$是定义在 R 上的凸函数。

2. 设 $f_1(x)$和 $f_2(x)$为定义在凸集 R 上的两个凸函数，则其和 $f_1(x)+f_2(x)$是定义在 R 上的凸函数。

3. 设 $f(x)$为定义在凸集 R 上的凸函数，则对每一实数 β，集合

$$S_\beta=\{x\mid x\in R,\ f(x)\leqslant\beta\} \tag{1-27}$$

是凸的。

定理 1-5　若 $f(x)$为定义在凸集 R 上的凸函数，则它的任一极小点就是它在 R 上的最小点(全局极小点)；而且，它的所有最小点形成一个凸集。

定理 1-6　设 $f(x)$是定义在凸集 R 上的可微凸函数，若存在点 $x^*\in R$，使得对于所

有的 $x \in R$ 有

$$\nabla f(x^*)^T(x-x^*) \geqslant 0 \tag{1-28}$$

则 x^*是 $f(x)$在R上的最小点(全局极小点)。

如果R是E^n中某一区域，$\nabla f(x^*)$表示函数 $f(x)$在点x^*处的梯度。它可用下式表示

$$\nabla f(x^*) = \left(\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_n}\right)^T \tag{1-29}$$

小　结

本章介绍了本教材所应用到的一些数学基础，主要有：

1. 集合

子集：P为S的子集，记为$P \subset S$

交集：P为S_1和S_2的交集，记为

$$P = S_1 \cap S_2$$

并集：P为S_1和S_2的并集，记为

$$P = S_1 \cup S_2$$

2. n维几何

n维欧几里德空间记为E^n.

超平面是E^n中满足式（1-19）的点集合。

3. 点集的概念

内点；边界点；开集；闭集；边界。

4. 凸集

凸集中的一些概念与线性规划中寻求的最优解有密切的关系，应当很好地掌握它。

凸集；空集；凸集的顶点；有限点集的凸组合；凸包。

5. 凸函数和凹函数

凸函数与严格凸函数；凹函数与严格凹函数；凸函数的性质；凸函数 $f(x)$ 在凸集R上的最小点的概念；凸函数 $f(x)$的梯度。

第二章　线性规划的单纯形法

§2-1　概　　述

在生产管理中经常提出如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，以便得到最好的经济效果。例如：

例 2-1-1　某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品，这些产品分别需要在A、B、C、D四种不同的设备上加工。按工艺规定，产品Ⅰ和Ⅱ在各设备上所需要的加工时数示于表 2-0 中。已知各设备在计划期内最大加工时数分别是12，8，16和12，该工厂每生产一单位（如吨）产品Ⅰ可得利润2元，每生产一单位产品Ⅱ可得利润3元。问应如何安排生产计划，才能得到利润最多？

表 2-0

加工时数　设备 产品	A	B	C	D
Ⅰ	2	1	4	0
Ⅱ	2	2	0	4

这个问题可以用以下的数学语言来描述。

设x_1，x_2分别表示在计划期内产品Ⅰ和Ⅱ的产量。设备A需要加工$2x_1+2x_2$小时，但是它的最大加工时数是12，这是一个限制产量的条件。所以在确定产品Ⅰ和Ⅱ产量时，要考虑不能超出设备A的最大加工时数，即

$$2x_1+2x_2\leqslant 12$$

这是一个约束条件。类似地，对设备B、C、D得到以下的约束条件：

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$
$$4x_1\qquad\leqslant 16$$
$$4x_2\leqslant 12$$

$z=2x_1+3x_2$叫做目标函数。该工厂的目标是：在不超过所有设备加工能力的条件下，如何确定产量x_1，x_2，以便得到最大的利润。x_1，x_2叫做决策变量。另一方面，工厂可以得到利润$2x_1+3x_2$，用z表示这利润。

综上所述，把以上问题写成下列的形式*：

* s.t.是 subject to 的缩写，表示“受……的约束”。

$$
\left.\begin{aligned}
\max \quad & z=2x_1+3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1+2x_2\leqslant 12 \\
& x_1+2x_2\leqslant 8 \\
& 4x_1 \qquad\ \leqslant 16 \\
& \qquad 4x_2\leqslant 12 \\
& x_1,\ x_2\geqslant 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}0)
$$

这里x_1，x_2的非负性是不言而喻的。这也是约束条件。

在这个实例中，目标函数是线性的，约束条件的左端也是线性的，这种求最大最小问题属于线性规划问题。

数学规划研究求解在一定目标下（例如使利润最大或使成本最小）将有限资源有效地分配到已知活动上去的问题。数学规划模型的要素是（1）变量或未知数；（2）目标函数；（3）约束条件以及（4）目标最大或最小。约束条件可以是（$\leqslant$）、（$=$）或（$\geqslant$）的类型。而变量可以是非负的或符号不受限制。因此一般的线性规划模型通常定义如下：

求 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$的最大或最小值满足约束条件

$$
\begin{aligned}
& a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n(\leqslant,\ =,\ \text{或}\geqslant)b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n(\leqslant,\ =,\ \text{或}\geqslant)b_2 \\
& \quad\vdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n(\leqslant,\ =,\ \text{或}\geqslant)b_m \\
& \qquad x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\geqslant 0
\end{aligned}
$$

这里a_{ij}，b_i和c_j($i=1,\ 2,\ \cdots m$；$j=1,\ 2,\ \cdots n$)是由问题的生产技术情况所确定的常数，而x_j是决策变量。每一个约束条件只持有一个符号($\leqslant$，$=$或$\geqslant$)。为了讨论方便，在本书中，我们规定线性规划问题的标准形式为：

$$
\left.\begin{aligned}
\max \quad & z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\
& x_1,\ x_2\cdots x_n\geqslant 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}1)
$$

而且严格规定所有的b_i非负：$b_i\geqslant 0$。在讨论理论问题与方法时，写成以下两种形式是方便的：

一种是

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad i=1,\ 2\cdots m \\
& \qquad x_i\geqslant 0 \quad j=1,\ 2,\ \cdots n
\end{aligned}
$$

另一种是矩阵向量形式。我们写

$$C=(c_1,\ c_2,\ \cdots c_n)$$
$$A=[a_{ij}]$$
$$X=(x_1,\ x_2\cdots x_n)^T$$
$$b=(b_1,\ b_2\cdots b_m)^T$$

于是式（2-1）成为

$$\max\quad z=CX$$
$$\text{s.t.}\quad AX=b$$
$$X\geqslant 0$$

实际的线性规划的数学模型是各种各样的，它们都可以化成标准形式，其办法如下：

1．若要求目标函数实现最小化，即

$$\min\quad z=CX$$

采用以下的变换即将求原目标函数最小变为求目标函数最大的问题：

$$\max\quad z'=-CX$$

2．若有某个 $b_i<0$，则用（-1）乘该约束条件的两端，并记为 $b'_i=-b_i$.

3．约束条件为不等式时有两种情况，一种是约束条件为"$\leqslant$"形式的不等式，则可在"$\leqslant$"号的左端加入非负的**松弛变量**，使"$\leqslant$"形式变为等式；另一种是约束条件为"$\geqslant$"形式的不等式，则可在"$\geqslant$"号的左端减去一个非负的**剩余变量**（也可称松弛变量），使之变为等式。

4．变量不是非负的有三种情况。例如变量 x_1，如果它是$\leqslant 0$则可作变换 $x_1=-x'_1$，这时 $x'_1\geqslant 0$；如果它是$\geqslant d$，则可作变换 $x_1=x'_1+d$，这时 $x'_1\geqslant 0$；如果 x_1是任意的，则可作变换

$$x_1=x'_1-x''_1,$$

这时 x'_1，$x''_1\geqslant 0$.

§2-2　线性规划问题的解和它的几何意义

一般线性规划问题的标准形式为

$$\begin{cases}\max\quad z=\sum\limits_{j=1}^{n}c_jx_j & (2\text{-}2)\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m & (2\text{-}3)\\ x_j\geqslant 0\quad j=1,\ 2,\ \cdots n & (2\text{-}4)\end{cases}$$

可行解：满足约束条件(2-3)，(2-4)的解　$X(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。所有这些解的集合称为可行域。

最优解：满足式（2-2）的可行解称为线性规划问题的最优解。

基：设A是约束方程组（2-3）的$m\times n$阶系数矩阵，其秩为m. B是矩阵A中m阶非奇异方阵($|B|\neq 0$)，则称B是线性规划问题的一个基。设B就是A的前m列向量所构成