

Economic Mathematics

Em

经济数学

上册

Economic Mathematics

▶ 谭元发 徐沈新 方远 编著



湖南科学技术出版社

经济数学

(上册)

谭元发 徐沈新 方 逵 编 著
方 逵 周世命 审 定

湖南科学技术出版社

经济数学(上册)

主 编:谭元发 徐沈新

责任编辑:陈一心

出版发行:湖南科学技术出版社

社 址:长沙市湘雅路 280 号

http://www.hnstp.com

印 刷:湘潭县人民印刷厂

厂 址:湘潭市城正街 250 号

邮 编:411100

(印装质量问题请直接与本厂联系)

出版日期:2002 年 7 月第 2 版第 4 次

开 本:850mm × 1168mm 1/32

印 张:7.125

字 数:352000

书 号:ISBN 7 - 5357 - 1629 - 6/O·133

定 价:23.80 元(上、下册套价)

(版权所有·翻印必究)

内 容 提 要

本书的编写依据重视基础、强调应用的原则,在体系编排上具有循序渐进,由浅入深的特点,特别注重数学在经济和管理中的应用,着眼于为经济和管理类专业的专业课程学习打下良好的数学基础。

全书分上下两册,本书为上册,主要内容有:函数、极限、连续;导数与微分;导数及应用;不定积分;定积分;二元函数的微积分;常微分方程初步。

本书可作为一般本科院校、高等专科学校、高职院校和成人高校经济、管理类专业的教材,也可供科技人员和经济工作者使用。

编者的话

随着我国加入 WTO,各个领域对数学素质的要求越来越高.数学在经济管理、社会科学、甚至文化艺术等领域都逐渐得到了广泛的应用,数学已成为联系不同学科之间的纽带,是一些边缘学科发展的工具.特别是学习数学,可以培养人的逻辑思维能力,从而有效地发展创新能力.现代社会的人们已开始重视数学技术和数学文化.

在当今社会主义市场经济体制下,经济研究非常注重定量分析.而定量分析,自然离不开数学,譬如,经济学中的边际、弹性、均衡、消费者剩余,经济预测和控制理论等等,都涉及到经济数学中相应的理论.因此,经济数学已逐步成为经济、管理、社会、政治等专业和其他学科的必修科目,随着计算机和信息技术的迅速发展,经济数学理论已成为研究专业课程的基础.

根据形势的要求,在湖南省教育厅有关部门的领导下,我们组织编写了这本《经济数学》.本书的宗旨在于通过让学生学习经济数学理论,培养学生对事物的归纳和抽象的思维能力、从理论到实际的联想能力、建立实际问题的数学模型的能力、正确的演绎推理和动手运算能力,为今后从事专业工作打下良好的基础.

教材的编写尽量做到深入浅出,讲究内容丰富,同时针对不同的学科安排了不同类型的应用实例,以扩大学生的视野和提高学生的学习兴趣.

根据不同的培养目标,教师在教学过程中可针对专业的需要进行选择性教学.教材中凡带“*”的内容以及定理的证明专科教育不作要求.

本教材分上下册,上册由湖南机电职工大学谭元发副教授、中国保险管理干部学院徐沈新副教授编著,下册由长沙大学方逵教授、谭坚副教授编著。

全书由方逵教授、谭元发副教授负责总纂,方逵教授、周世命教授负责审定。在编写过程中,长沙大学给予了资助,中国保险管理干部学院、湖南机电职工大学给予了大力支持,在此,我们深表谢意。

由于我们水平有限,书中缺点错误难免存在,敬请广大师生和读者批评指正。

编者

2002年6月

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数 极限 连续	(1)
§ 1.1 函数的概念	(1)
§ 1.2 复合函数 初等函数 分段函数	(9)
§ 1.3 常用经济函数	(12)
§ 1.4 极限的概念	(14)
§ 1.5 无穷小量与无穷大量	(22)
§ 1.6 极限运算法则	(25)
§ 1.7 极限存在准则 两个重要极限	(28)
§ 1.8 函数的连续性	(32)
本章小结	(37)
习题一	(38)
第二章 导数与微分	(45)
§ 2.1 导数的概念	(45)
§ 2.2 导数的四则运算法则及基本公式	(50)
§ 2.3 复合函数求导法则	(56)
§ 2.4 隐函数的求导法则	(59)
§ 2.5 高阶导数	(61)
§ 2.6 函数的微分	(63)
本章小结	(66)

习题二	(67)
第三章 导数的应用	(71)
§ 3.1 中值定理	(71)
§ 3.2 罗比塔法则	(76)
§ 3.3 函数的单调性	(81)
§ 3.4 函数的极值	(84)
§ 3.5 曲线的凹向与拐点	(89)
§ 3.6 曲线的渐近线及函数作图	(91)
§ 3.7 导数在经济问题中的应用	(94)
本章小结	(102)
习题三	(104)
第四章 不定积分	(107)
§ 4.1 不定积分的概念与性质	(107)
§ 4.2 换元积分法	(113)
§ 4.3 分部积分法	(121)
本章小结	(125)
习题四	(126)
第五章 定积分	(130)
§ 5.1 定积分概念及性质	(130)
§ 5.2 积分学基本公式	(135)
§ 5.3 定积分的换元积分法与分部积分法	(139)
§ 5.4 无穷区间上的广义积分	(143)
§ 5.5 定积分的应用	(147)
本章小结	(156)
习题五	(157)
第六章 二元函数的微积分	(161)
§ 6.1 空间解析几何简介	(161)
§ 6.2 二元函数	(163)

§ 6.3	二元函数的极限与连续	(169)
§ 6.4	偏导数和全微分	(171)
§ 6.5	二元复合函数和隐函数的微分法	(174)
§ 6.6	二阶偏导数	(178)
§ 6.7	二元函数的极值	(179)
§ 6.8	条件极值及拉格朗日乘数法	(182)
§ 6.9	二重积分	(184)
本章小结		(192)
习题六		(195)
第七章	常微分方程初步	(198)
§ 7.1	微分方程的基本概念	(198)
§ 7.2	一阶微分方程	(200)
§ 7.3	可降为一阶的高阶微分方程	(205)
本章小结		(207)
习题七		(208)
第一篇习题参考答案		(210)

第一篇 微积分

第一章 函数 极限 连续

函数是微积分研究的主要对象,极限是研究函数的基本工具,连续是函数的重要性态.本章介绍函数、极限与连续的基本知识,为以后的学习奠定必要的基础.

§ 1.1 函数的概念

函数的基本知识在中学里已学过,只简略介绍如下:

一、实数、数轴、区间、邻域

1. 实数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{有理数} \left\{ \begin{array}{l} \text{整数(正整数、零、负整数)} \\ \text{分数(正分数、负分数)} \end{array} \right. \\ \text{无理数(无限不循环小数)} \end{array} \right.$

今后无特别说明,我们研究的数的范围是实数.

2. 数轴 数轴指规定了长度单位、原点、方向的直线.如图 1-1.

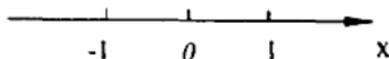


图 1-1

实数与数轴上的点成一一对应关系.

实数 a 的绝对值是实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

实数集合常用 R 表示. 设 $a \in R$, 则

$$a^{2n} \geq 0, (n \text{ 为自然数}). \sqrt{a^2} = |a| \geq 0.$$

3. 区间 ($a, b \in R, a < b$)

区 间	不等式表示	含 义	附 注	
有限区间	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	大于或等于 a 且小于或等于 b 的全体实数	闭区间
	(a, b)	$a < x < b$	大于 a 且小于 b 的全体实数	开区间
	$[a, b)$	$a \leq x < b$	大于或等于 a 且小于 b 的全体实数	半开半闭区间
无穷区间	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	全体实数	R
	$(a, +\infty)$	$a < x < +\infty$	大于 a 的全体实数	
	$(-\infty, b]$	$-\infty < x \leq b$	小于或等于 b 的全体实数	

此外,还有 $(a, b]$ 、 $[a, +\infty)$ 、 $(-\infty, b)$ 等,上述有限区间称 a 、 b 分别为区间的左、右端点, $|b - a|$ 称为区间的长度.

4. 邻域 设 $a, \delta \in R$, 且 $\delta > 0$, 区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 即满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ 邻域, 点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 显然, 满足不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的点的集合是邻域 $|x - a| < \delta$ 去掉中心 a 的其余点组成的集合, 即 $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. 称为 a 的去心邻域.

二、函数的概念

1. 常量与变量

在研究某问题的过程中, 始终保持定值的量叫常量, 可取不同数值的量叫变量.

常量与变量不是绝对的, 例如销售单价, 在某段时间内是常量, 在较长时间中却是变量.

一般地, 常量用 a, b, c, \dots 表示, 变量用 x, y, z, \dots 表示.

2. 函数的定义

定义 1.1 在某一变化过程中, 有两个变量 x, y , 如果对于 x

在某实数集 D 中的每一个值, 变量 y 按照一定的对应规律总有确定的值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, x 叫自变量, y 叫因变量, f 表示 x 与 y 之间的对应规律(也可用 φ, F, f_1, f_2 等字母表示).

如果自变量 x 取某数值 $x_0 \in D$, 函数有确定的值和它对应, 称函数在 x_0 处有定义, 其对应的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数的值域.

表示函数关系的方法通常有: 解析法(公式法)、表格法和图象法.

3. 函数的定义域

自变量 x 的取值范围称为函数的定义域.

对于反映实际问题的函数, 其定义域要由所给问题的实际意义来确定. 对于用解析法表示的函数, 确定定义域应注意以下几点:

(1) 分式中, 分母的值不能为零.

(2) 偶次根式中, 被开方数必须大于或等于零.

(3) 对数式中, 真数必须大于零, 底数大于零且不等于 1.

(4) 正切或余切函数中, 正切、余切符号下的式子分别不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi$ (k 为整数).

(5) 反正弦或反余弦函数中, 反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

(6) 若函数式由若干项组成, 定义域是各项可取值的公共部分(交集).

确定函数关系有两个要素: 定义域和对应规律. 当且仅当两个要素完全相同时, 两个函数被认为是相同的函数. 例如 $y = x + 1$ 和 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, 因定义域不同, 故为不同的函数. 而 $y = x$ 和 $y =$

$\sqrt{x^2}$, 定义域虽然相同, 但对应规律不相同, 故也不是相同函数. 然而 $y = x^2$ 和 $u = v^2$ 却是两个相同的函数. 函数关系的确定与自变量和因变量采用何种字母无关.

例 1 求 $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2} + \ln(x-2)$ 的定义域.

解 x 取值应满足
$$\begin{cases} 3+2x-x^2 \geq 0, \\ x-2 > 0. \end{cases}$$

解不等式组, 得 $2 < x \leq 3$. 定义域为 $(2, 3]$.

例 2 求 $y = \frac{1}{x} + \arcsin \frac{3x-1}{5}$ 的定义域.

解 x 取值应满足
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \left| \frac{3x-1}{5} \right| \leq 1. \end{cases}$$

解不等式组, 得定义域为 $[-\frac{4}{3}, 0) \cup (0, 2]$.

三、函数的特性

1. 函数的奇偶性

设 $y = f(x)$. 对任意的 $-x, x \in D$,

(1) 若 $f(-x) = f(x)$, 称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$, 称 $f(x)$ 为奇函数.

若 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数, 则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

设 $y = f(x)$. 对任意的 $x_1, x_2 \in$ 区间 I , 且 $x_1 < x_2$,

(1) 若有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 内单调增加.

(2) 若有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在 I 内单调减少.

区间 I 称为单调递增(或减少)区间.

单调增加(或减少)的函数的图形是沿 x 轴的正向逐渐上升(或下降)的.

3. 函数的周期性

设 $y = f(x)$, 常数 $T > 0$. 对任意的 $x, x + T \in I$, 若

$$f(x + T) = f(x),$$

称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期, 显然 $2T, 3T, \dots, nT$ ($n \in N$) 也是 $f(x)$ 的周期. 通常我们所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

一个周期函数的图形在每个周期内有相同的形状.

4. 函数的有界性

设 $y = f(x)$, 对任意的 $x \in I$, 若存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$, 称 $f(x)$ 在 I 内有界. 否则, 称 $f(x)$ 在 I 内无界.

函数 $f(x)$ 在 I 内有界, 则曲线 $y = f(x)$ 在 I 内被限制在 $y = -M$ 和 $y = M$ 两条水平直线之间.

例 3 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = |x| - e^{x^2}, \quad (2) \varphi(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}.$$

解 (1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$f(-x) = |-x| - e^{(-x)^2} = |x| - e^{x^2} = f(x),$$

所以, $f(x)$ 为偶函数.

(2) 定义域为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \ln \frac{-x-1}{-x+1} = \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-1} = -\ln \frac{x-1}{x+1} \\ &= -\varphi(x). \end{aligned}$$

所以, $\varphi(x)$ 为奇函数.

例 4 求 $y = \sin^2 x$ 的周期.

$$\text{解 } y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x.$$

因为 $\cos 2x$ 的周期为 π , 所以 $y = \sin^2 x$ 的周期为 π .

例 5 考察函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上的有界性.

解 在 $(0, 1)$ 内, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 单调减少, 同时, $0 < x < 1$ 时, 只

要 x 充分小, $y = \frac{1}{x}$ 的值就可以变得充分地大, 即对预先给定的无论多么大的 $M > 0$, 只要 x 满足 $x \leq \frac{1}{M}$, 就有 $\frac{1}{x} \geq M$, 所以 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的. 而在 $(1, +\infty)$ 内: $\left| \frac{1}{x} \right| < 1$, 取 $M = 1$, 所以函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内是有界的.

四、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若对于任意一个 $y \in W$, 由 $y = f(x)$ 能唯一确定 $x \in D$, 则 x 是 y 的函数, 称此函数为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$. 或称它们互为反函数, 习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, $x = f^{-1}(y)$ 中 x, y 互换, 得 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$. 显然 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域为 W , 值域为 D .

例 6 求 $y = 2x + 3$ 的反函数, 并作图.

解 由 $y = 2x + 3$ 求出

$$x = \frac{y-3}{2},$$

习惯写成 $y = \frac{x-3}{2}$.

$y = 2x + 3$ 的反函数为

$$y = \frac{x-3}{2}. \text{ 如图 1-2.}$$

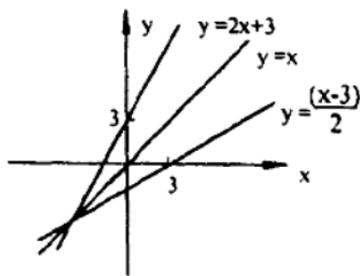


图 1-2

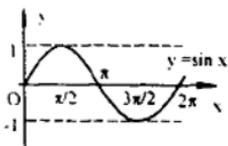
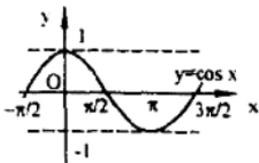
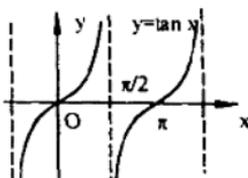
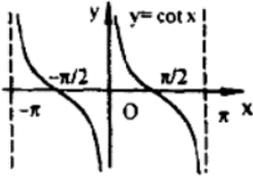
互为反函数的 $y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

五、基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类. 它们的定义域、值域以及图象见下表.

基本初等函数(除 $y = c$ 外)总表

	函 数	定义域	值 域	图 象
幂 函 数	$y = x^2$	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	<p>The graph shows two curves in the first quadrant of a Cartesian coordinate system. One is a parabola opening upwards, labeled $y = x^2$. The other is a curve starting at the origin and increasing with a decreasing slope, labeled $y = \sqrt{x}$. The origin is marked with 'O'.</p>
	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$[0, +\infty)$	$[0, +\infty)$	
幂 函 数	$y = x^3$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	<p>The graph shows two curves in a Cartesian coordinate system. One is a cubic curve passing through the origin, labeled $y = x^3$. The other is a hyperbola with two branches, one in the first quadrant and one in the third quadrant, labeled $y = x^{-1}$. The origin is marked with 'O'.</p>
	$y = x^{-1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$	
指 数 函 数	$y = a^x$ $a > 0, a \neq 1$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	<p>The graph shows two exponential curves in a Cartesian coordinate system. Both curves pass through the point (0, 1) on the y-axis. One curve is increasing and labeled $y = a^x (a > 1)$. The other curve is decreasing and labeled $y = a^x (0 < a < 1)$. The origin is marked with 'O'.</p>
对 数 函 数	$y = \log_a x$ $a > 0, a \neq 1$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	<p>The graph shows two logarithmic curves in a Cartesian coordinate system. Both curves pass through the point (1, 0) on the x-axis. One curve is increasing and labeled $y = \log_a x (a > 1)$. The other curve is decreasing and labeled $y = \log_a x (0 < a < 1)$. The origin is marked with 'O'.</p>

	函 数	定 义 域	值 域	图 象
三 角 函 数	$y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
	$y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, 1]$	
三 角 函 数	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$	$(-\infty, +\infty)$	
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi$ $(k \in Z)$	$(-\infty, +\infty)$	
反 三 角 函 数	$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	