Economic Mathematics

Em

经济数学 上册

Economic Mathematics

谭元发 徐沈新 方逵 编著

湖南科学技术出版社

经济数学

（上册）

谭元发　徐沈新　方　逵　编　著
方　逵　周世命　审　定

湖南科学技术出版社

经 济 数 学(上册)

主　　编:谭元发　徐沈新
责任编辑:陈一心
出版发行:湖南科学技术出版社
社　　址:长沙市湘雅路 280 号
http://www.hnstp.com
印　　刷:湘潭县人民印刷厂
厂　　址:湘潭市城正街 250 号
邮　　编:411100
(印装质量问题请直接与本厂联系)
出版日期:2002 年 7 月第 2 版第 4 次
开　　本:850mm × 1168mm　1/32
印　　张:7.125
字　　数:352000
书　　号:ISBN 7 - 5357 - 1629 - 6/O·133
定　　价:23.80 元(上、下册套价)

内 容 提 要

本书的编写依据重视基础、强调应用的原则，在体系编排上具有循序渐进，由浅入深的特点，特别注重数学在经济和管理中的应用，着眼于为经济和管理类专业的专业课程学习打下良好的数学基础．

全书分上下两册，本书为上册，主要内容有：函数、极限、连续；导数与微分；导数及应用；不定积分；定积分；二元函数的微积分；常微分方程初步．

本书可作为一般本科院校、高等专科学校、高职院校和成人高校经济、管理类专业的教材，也可供科技人员和经济工作者使用．

编者的话

随着我国加入WTO,各个领域对数学素质的要求越来越高.数学在经济管理、社会科学、甚至文化艺术等领域都逐渐得到了广泛的应用,数学已成为联系不同学科之间的纽带,是一些边缘学科发展的工具.特别是学习数学,可以培养人的逻辑思维能力,从而有效地发展创新能力.现代社会的人们已开始重视数学技术和数学文化.

在当今社会主义市场经济体制下,经济研究非常注重定量分析.而定量分析,自然离不开数学,譬如,经济学中的边际、弹性、均衡、消费者剩余,经济预测和控制理论等等,都涉及到经济数学中相应的理论.因此,经济数学已逐步成为经济、管理、社会、政治等专业和其他学科的必修科目,随着计算机和信息技术的迅速发展,经济数学理论已成为研究专业课程的基础.

根据形势的要求,在湖南省教育厅有关部门的领导下,我们组织编写了这本《经济数学》.本书的宗旨在于通过让学生学习经济数学理论,培养学生对事物的归纳和抽象的思维能力、从理论到实际的联想能力、建立实际问题的数学模型的能力、正确的演绎推理和动手运算能力,为今后从事专业工作打下良好的基础.

教材的编写尽量做到深入浅出,讲究内容丰富,同时针对不同的学科安排了不同类型的应用实例,以扩大学生的视野和提高学生的学习兴趣.

根据不同的培养目标,教师在教学过程中可针对专业的需要进行选择性教学.教材中凡带"*"的内容以及定理的证明专科教育不作要求.

本教材分上下册，上册由湖南机电职工大学谭元发副教授、中国保险管理干部学院徐沈新副教授编著．下册由长沙大学方逵教授、谭坚副教授编著．

全书由方逵教授、谭元发副教授负责总纂，方逵教授、周世命教授负责审定．在编写过程中，长沙大学给予了资助，中国保险管理干部学院、湖南机电职工大学给予了大力支持，在此，我们深表谢意．

由于我们水平有限，书中缺点错误难免存在，敬请广大师生和读者批评指正．

编　者

2002年6月

目　　录

第一篇　微积分

第一篇　微积分

第一章　函数　极限　连续

函数是微积分研究的主要对象，极限是研究函数的基本工具，连续是函数的重要性态．本章介绍函数、极限与连续的基本知识，为以后的学习奠定必要的基础．

§1.1　函数的概念

函数的基本知识在中学里已学过，只简略介绍如下：

一、　实数、数轴、区间、邻域

$$1.\ \text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数(正整数、零、负整数)}\\ \text{分数(正分数、负分数)}\end{cases}\\ \text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

今后无特别说明，我们研究的数的范围是实数．

2. 数轴　数轴指规定了长度单位、原点、方向的直线．如图1—1.

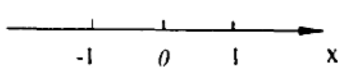


图 1—1

实数与数轴上的点成一一对应关系．

实数 a 的绝对值是实数 a 在数轴上对应的点到原点的距离．

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

实数集合常用 R 表示．设 $a \in R$，则

$a^{2n} \geqslant 0$,(n 为自然数).$\sqrt{a^2} = |a| \geqslant 0$.

3. 区间 (a、$b \in R$,$a < b$)

区间		不等式表示	含义	附注
有限区间	$[a,b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	大于或等于 a 且小于或等于 b 的全体实数	闭区间
	(a,b)	$a < x < b$	大于 a 且小于 b 的全体实数	开区间
	$[a,b)$	$a \leqslant x < b$	大于或等于 a 且小于 b 的全体实数	半开半闭区间
无穷区间	$(-\infty,+\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	全体实数	R
	$(a,+\infty)$	$a < x < +\infty$	大于 a 的全体实数	
	$(-\infty,b]$	$-\infty < x \leqslant b$	小于或等于 b 的全体实数	

此外,还有$(a,b]$、$[a,+\infty)$、$(-\infty,b)$等,上述有限区间称 a、b 分别为区间的左、右端点,$|b-a|$称为区间的长度.

4. 邻域 设 a、$\delta \in R$,且 $\delta > 0$,区间$(a-\delta,a+\delta)$,即满足不等式$|x-a| < \delta$ 的实数 x 的全体称为点 a 的 δ **邻域**,点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.显然,满足不等式 $0 < |x-a| < \delta$ 的点的集合是邻域$|x-a| < \delta$ 去掉中心 a 的其余点组成的集合,即$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.称为 a 的**去心邻域**.

二、 函数的概念

1. 常量与变量

在研究某问题的过程中,始终保持定值的量叫**常量**,可取不同数值的量叫**变量**.

常量与变量不是绝对的,例如销售单价,在某段时间内是常量,在较长时间中却是变量.

一般地,常量用 $a,b,c,\cdots$表示,变量用 $x,y,z,\cdots$表示.

2. 函数的定义

定义 1.1 在某一变化过程中,有两个变量 x、y,如果对于 x

在某实数集 D 中的每一个值,变量 y 按照一定的对应规律总有确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,x 叫自变量,y 叫因变量,f 表示 x 与 y 之间的对应规律(也可用 φ, F, f_1, f_2 等字母表示).

如果自变量 x 取某数值 $x_0\in D$,函数有确定的值和它对应,称函数在 x_0 处有定义,其对应的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.全体函数值的集合称为函数的**值域**.

表示函数关系的方法通常有:解析法(公式法)、表格法和图象法.

3. 函数的定义域

自变量 x 的取值范围称为函数的**定义域**.

对于反映实际问题的函数,其定义域要由所给问题的实际意义来确定.对于用解析法表示的函数,确定定义域应注意以下几点:

(1) 分式中,分母的值不能为零.

(2) 偶次根式中,被开方数必须大于或等于零.

(3) 对数式中,真数必须大于零,底数大于零且不等于 1.

(4) 正切或余切函数中,正切、余切符号下的式子分别不能等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$、$k\pi$(k 为整数).

(5) 反正弦或反余弦函数中,反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值不能大于 1.

(6) 若函数式由若干项组成,定义域是各项可取值的公共部分(交集).

确定函数关系有两个要素:定义域和对应规律.当且仅当两个要素完全相同时,两个函数被认为是相同的函数.例如 $y=x+1$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$,因定义域不同,故为不同的函数.而 $y=x$ 和 $y=$

$\sqrt{x^2}$,定义域虽然相同,但对应规律不相同,故也不是相同函数.然而 $y=x^2$ 和 $u=v^2$ 却是两个相同的函数.函数关系的确定与自变量和因变量采用何种字母无关.

例 1 求 $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$的定义域.

解 x 取值应满足 $\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0,\\ x-2>0.\end{cases}$

解不等式组,得 $2<x\leqslant 3$. 定义域为$(2,3]$.

例 2 求 $y=\dfrac{1}{x}+\arcsin\dfrac{3x-1}{5}$的定义域.

解 x 取值应满足 $\begin{cases}x\neq 0,\\ \left|\dfrac{3x-1}{5}\right|\leqslant 1.\end{cases}$

解不等式组,得定义域为$[-\dfrac{4}{3},0)\cup(0,2]$.

三、 函数的特性

1. 函数的奇偶性

设 $y=f(x)$. 对任意的 $-x$、$x\in D$,

(1)若 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$为偶函数.

(2)若 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$为奇函数.

若 $f(x)$既非奇函数又非偶函数,则称 $f(x)$为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称,偶函数的图形关于 y 轴对称.

2. 函数的单调性

设 $y=f(x)$. 对任意的 x_1、$x_2\in$区间 I,且 $x_1<x_2$,

(1)若有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,称 $f(x)$在 I 内单调增加.

(2)若有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,称 $f(x)$在 I 内单调减少.

区间 I 称为单调递增(或减少)区间.

单调增加(或减少)的函数的图形是沿 x 轴的正向逐渐上升(或下降)的.

3. 函数的周期性

设 $y=f(x)$，常数 $T>0$. 对任意的 x、$x+T\in I$，若

$$f(x+T)=f(x),$$

称 $f(x)$为**周期函数**，称 T 为$f(x)$的**周期**，显然 $2T$、$3T$、…、nT $(n\in N)$也是 $f(x)$的周期 通常我们所说的周期函数的周期是指它的最小正周期．

一个周期函数的图形在每个周期内有相同的形状．

4. 函数的有界性

设 $y=f(x)$，对任意的 $x\in I$，若存在常数 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$在 I 内有界．否则，称 $f(x)$在 I 内无界．

函数 $f(x)$在 I 内有界，则曲线 $y=f(x)$在 I 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间．

例 3 判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=|x|-e^{x^2}$，　　　(2) $\varphi(x)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

解 (1) 定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$$f(-x)=|-x|-e^{(-x)^2}=|x|-e^{x^2}=f(x),$$

所以，$f(x)$为偶函数．

(2) 定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

$$\varphi(-x)=\ln\frac{-x-1}{-x+1}=\ln\frac{x+1}{x-1}=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}=-\ln\frac{x-1}{x+1}$$
$$=-\varphi(x).$$

所以，$\varphi(x)$为奇函数．

例 4 求 $y=\sin^2x$ 的周期．

解 $y=\sin^2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos2x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2x$.

因为 $\cos2x$ 的周期为π，所以 $y=\sin^2x$ 的周期为π.

例 5 考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$和$(1,+\infty)$上的有界性．

解 在$(0,1)$内，函数 $y=\dfrac{1}{x}$单调减少，同时，$0<x<1$ 时，只

要 x 充分小，$y=\frac{1}{x}$ 的值就可以变得充分地大，即对预先给定的无论多么大的 $M>0$，只要 x 满足 $x\leqslant\frac{1}{M}$，就有 $\frac{1}{x}\geqslant M$，所以 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的．而在 $(1,+\infty)$ 内 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$，取 $M=1$，所以函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是有界的．

四、 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W．若对于任意一个 $y\in W$，由 $y=f(x)$ 能唯一确定 $x\in D$，则 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$．或称它们互为反函数，习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，$x=f^{-1}(y)$ 中 x、y 互换，得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$．显然 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 W，值域为 D．

例 6 求 $y=2x+3$ 的反函数，并作图．

解 由 $y=2x+3$ 求出

$$x=\frac{y-3}{2},$$

习惯写成 $y=\frac{x-3}{2}$.

$y=2x+3$ 的反函数为

$y=\frac{x-3}{2}$．如图 1—2．

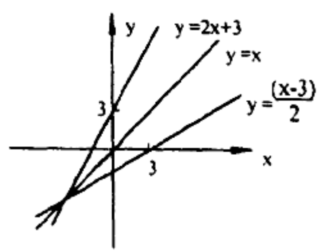


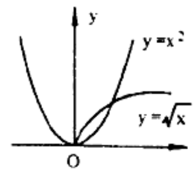
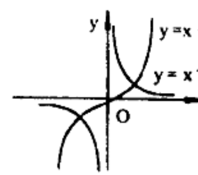
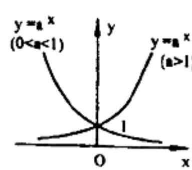
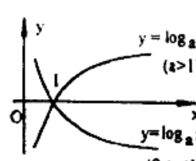
图 1—2

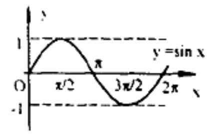
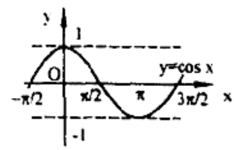
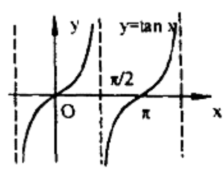
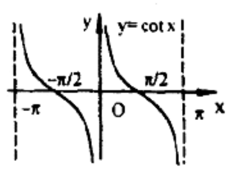
互为反函数的 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称．

五、 基本初等函数

基本初等函数包括常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数六大类．它们的定义域、值域以及图象见下表．

基本初等函数(除 $y=c$ 外)总表

<table>
<tr><th></th><th>函　数</th><th>定义域</th><th>值　域</th><th>图　　象</th></tr>
<tr><td rowspan="2">幂函数</td><td>$y=x^2$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>$[0,+\infty)$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=x^{\frac{1}{2}}$</td><td>$[0,+\infty)$</td><td>$[0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">幂函数</td><td>$y=x^3$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=x^{-1}$</td><td>$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</td><td>$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td>指数函数</td><td>$y=a^x$
$a>0,a\neq 1$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>$(0,+\infty)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>对数函数</td><td>$y=\log_a x$
$a>0,a\neq 1$</td><td>$(0,+\infty)$</td><td>$(-\infty,+\infty)$</td><td>
</td></tr>
</table>

	函　数	定义域	值　域	图　　象
三角函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$	$(-\infty,+\infty)$	
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k\in Z)$	$(-\infty,+\infty)$	
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$