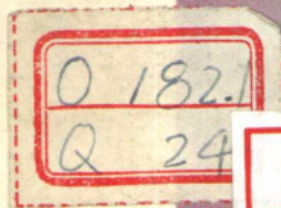


# 曲线的光顺 和圆弧拟合

国防工业出版社

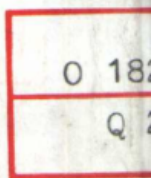
0.1

4



统一书号  
15034·1748

定价0.47元



0 182.1

Q 24

# 曲线的光顺和圆弧拟合

祁欣 陆容 编

国防工业出版社

204/26

曲线的光顺和圆弧拟合

祁欣 陆容 编

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092<sup>1</sup>/<sub>32</sub> 印张 4<sup>3</sup>/<sub>8</sub> 102千字

1978年12月第一版 1978年12月第一次印刷 印数：00,001—14,000册

统一书号：15034·1748 定价：0.47元

## 前 言

在计算机辅助设计和辅助制造中，经常需要将实测的近似外形曲线处理成准确的数学表达式。现有的各种数控加工和绘图设备，绝大多数都采用直线和圆弧插补指令，因此将列表点曲线拟合成光滑衔接的多段圆弧，在实际使用中最感方便。本书提供了试用效果较好的两种圆弧拟合方法和一种三次样条光顺方法。为了便于参考应用，文中附有程序清单和详细的算法说明。实践证明，一个稍复杂的计算程序，从设计算法，经过上机调试和试用修改，达到初步定型，一般都要化费相当的人力和周期。为了加快计算机技术在科研生产中的应用步伐，有必要广泛交流各种现有的通用性程序，以便集思广益，加速积累经验，提高水平。本书是这方面的初步尝试，请读者批评指正。

# 目 录

|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 一、列表点曲线的一种拟合方法                    |     |
| ——圆弧样条函数.....                     | 1   |
| 二、用样条函数平滑数据方法.....                | 26  |
| 三、用圆弧拟合任意参数方程给定之非圆曲线计算方法...       | 67  |
| 附录 I 圆弧样条曲线程序.....                | 77  |
| 附录 II PH3程序.....                  | 83  |
| 附录 III FY1程序.....                 | 125 |
| 附录 IV 6912机所用 BD-200 语言的简单说明..... | 133 |
| 参考文献.....                         | 136 |

# 一、列表点曲线的一种拟合方法

## ——圆弧样条函数

利用多段圆弧来拟合列表点曲线，国内外已有较长的历史，具体方法很多（例如〔1〕—〔3〕）。这里介绍的是科学院计算中心孙家昶同志提出的一种具体计算方法（〔4〕，〔5〕），试用效果较好。为了进一步检验和完善这种方法，我们整理了以下材料。

### 1. 问题的提出

圆弧是生产实践和工程设计中经常要用到的数学工具。它具有一系列简单而重要的性质，随着数控显示、绘图和加工等技术的发展，应用范围日益广泛。

所谓圆弧样条，就是使用圆弧这个最简单的二次多项式的数学表达式来模拟样条，分段组合成一阶导数连续的函数。

首先，我们说明圆弧样条是怎样提出的。

#### （1）几何方面

用三次样条函数拟合列表点曲线，目前应用很广。它属于分段的代数多项式，方法简单易行，而且拟合效果好，可保证二阶连续。但它存在一个根本的问题，即其图形不具有几何不变性。

所谓几何不变性，就是图形不随座标选择而变化。

如图1所示，通常三次样条函数是几何可变的，它的图形会随座标的选择而变化。因为改变了座标系，就相当于在新的座标系下重新给出了一组新的型值点，因而插值出来的样条曲线与原来的样条曲线不完全重合（虽然在型值点处是

重合的)。这样,就有可能产生不协调。

而圆弧样条则不同,由于采取了局部坐标系,每段圆弧的圆心和半径是几何不变值,故其图形不随坐标选择而变化。

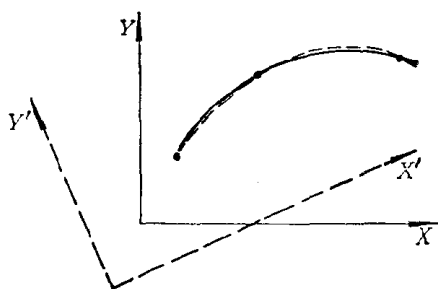


图 1

同时,由于圆弧样条采用局部坐标系,也可以克服大挠度问题。如图 2 所示,在局部坐标系下,大挠度变成了小挠度。

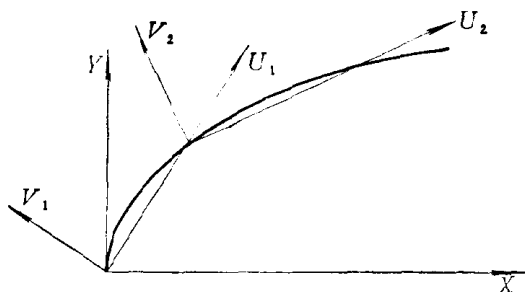


图 2

## (2) 工艺方面

现有数控机床(包括绘图机)的控制器广泛采用圆弧插补器。列表点曲线用圆弧样条拟合后就可将圆弧参数直接用于加工或绘图。而三次样条函数则必须进行二次拟合处理将其变成分段的圆弧和直线后,方能用以加工(或绘图)。这样,会增加计算的工作量,又降低拟合精度。

## (3) 计算方面

圆弧样条的计算比其他样条曲线简单、准确。例如,欲

求三次样条曲线与直线的交点, 需要解一个三次方程, 一般直接求解不便。而圆弧样条求交点的方程归结为解一个二次方程, 它可以直接求出精确解。

可见应用圆弧样条函数有其独特的优越性, 下面我们进一步叙述基本算法, 并列用 FORTRAN 语言书写的程序。

## 2. 圆弧样条的作法

给定  $N$  个型值点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_i(x_i, y_i), \dots, P_n(x_n, y_n)$ , 要求过每一个点作一段圆弧, 且使相邻圆弧在相邻节点的弦平分线上相交并相切, 如图 3。这样构成的曲线总体上是一阶光滑, 分段是等曲率的圆弧。

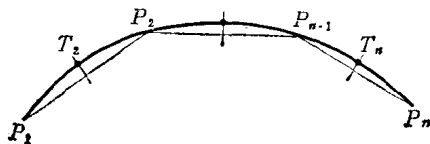


图 3

图 4 中设已给定两点  $A, B$ , 其弦切角分别为  $\alpha, \beta$ , 要求作两段圆弧使之相交并相切。作图步骤如下:

取一适当长度  $a$ , 在  $BM$  上截取  $BD = a$ , 并在  $MA$  的延长线上截取  $AE = a$ , 连接  $ED$ 。作  $ED$  的中垂线, 交  $AM$  于  $C$ , 交  $ED$  于  $F$ 。连接  $CD$ 。过  $A$  作  $AM$  的垂线交  $CF$  的延长线于  $O_1$ , 过  $O_1$  作  $CD$  的垂线  $O_1T$ ,  $T$  为垂足。过  $B$  作  $BM$  的垂线与  $O_1T$  的延长线交于  $O_2$ 。分别以  $O_1, O_2$  为圆心,  $O_1A, O_2B$  为半径作圆弧, 则此二圆弧必相切于  $T$  点。我们可作下述证明:

● 只需  $a$  的长度小于  $BH$ , 其中  $H$  是等腰三角形  $AHB$  的顶点。



$$\text{直角}\triangle O_2TD \equiv \text{直角}\triangle O_2BD$$

$$\therefore O_2T = O_2B$$

故以  $O_2$  为圆心, 以  $O_2B$  为半径作圆弧, 必过  $T$  点且与  $CD$  相切于  $T$ 。

可见, 上面所作的双圆弧是相切的。同时还可得出如下两个结论:

(1) 公切点有无穷多个

上述证明中  $a$  在很大程度上是任意的, 因此给出一个适当长度  $a$ , 就可对应地求出一个切点  $T$ 。所以, 从已知弦切角  $\alpha$ 、 $\beta$  作两个圆相切, 公切点可有无穷多个。我们规定作圆弧样条时公切点  $T$  取在相邻节点连线的中垂线上。

(2) 公切点  $T$  的轨迹是一个圆

图 5 中设  $T$  为任一切点, 过  $T$  作切线  $\overline{A_1B_1}$ 。

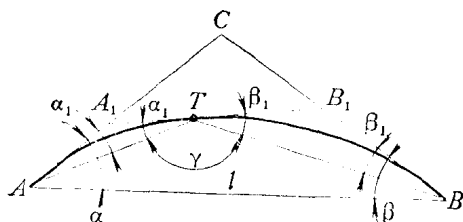


图 5

则

$$\overline{A_1T} = \overline{A_1A}, \quad \overline{B_1T} = \overline{B_1B}$$

$$\therefore \alpha_1 + \gamma + \beta_1 = \pi \quad (1)$$

$$(\alpha - \alpha_1) + \gamma + (\beta - \beta_1) = \pi \quad (2)$$

(1) + (2) 得

$$\alpha + 2\gamma + \beta = 2\pi$$

$$\therefore \gamma = \pi - \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \quad (3)$$

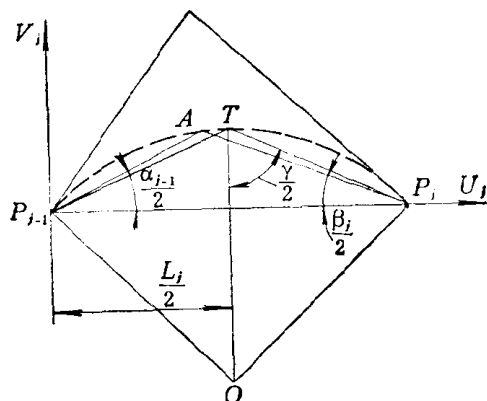
由(3)式可看出,  $\gamma$ 角与  $T$  点位置无关, 而只与  $\alpha$ 、 $\beta$  角有关。只有圆才具有这个性质, 所以  $T$  点的轨迹必为一圆。

而当  $a = \frac{l \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$  时,  $T$  点就是三角形  $ABC$

的内心。

### 3. 局部坐标系下公切点 $T$ 的座标

上已述及, 我们规定公切点  $T$  取在相邻节点连线的中垂线上。这样规定的好处是计算简单, 而且各段圆弧比较均匀。



· 图 6

在局部坐标系下, 公切点  $T$  的座标 (图 6) 为:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_T = \frac{L_j}{2} \\ V_T = \frac{L_j}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \end{array} \right. \quad (4)$$

证明如下

$$\therefore \overline{P_{j-1}T} = \overline{P_jT}$$

$$\therefore \angle P_{j-1}TO = \angle P_jTO = \frac{\gamma}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{由式 (3)} \therefore V_T &= -\frac{L_j}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{L_j}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \right) \\ &= \frac{L_j}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \end{aligned}$$

图 6 中  $A$  为角平分线的交点, 用以确定公切点的轨迹圆。

下面我们提一下  $\alpha$ 、 $\beta$  角的取法。

$\alpha$ 、 $\beta$  都规定取锐角, 一般情况下按照图 7 取正负号, 图 (a) 中  $\alpha$ 、 $\beta$  均取正值, 图 (b) 中  $\alpha$ 、 $\beta$  均取负值。

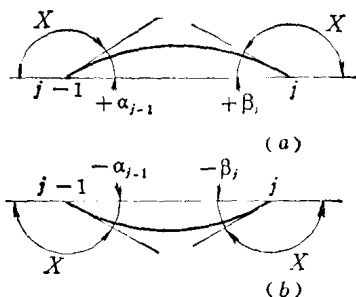


图 7

#### 4. 圆心、曲率及半径

我们进一步推导圆心、曲率及半径的计算公式。过相邻型值点  $P_{j-1}$ 、 $P_j$  及公切点  $T$  分别作两段圆弧, 各有给定的弦切角  $\alpha_{j-1}$  和  $\beta_j$ , 并相切于  $T$  点。

1)  $P_j$  点处左边圆弧的圆心、曲率及半径

为区别型值点左边或右边的圆弧, 加下标 (+)、(-) 予以注明。如图 8, 型值点左边加下标 (-), 右边加下标 (+)。

由图 8 可得

$$\overline{P_jT} = \frac{L_j}{2} / \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{L_j}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4}}$$



据此, 可得圆心座标  $Uc_{j(-)}$ 、 $Vc_{j(-)}$  和曲率  $\rho_{j(-)}$  为

$$\begin{cases} Uc_{j(-)} = L_j - R_{j(-)} \sin \beta_j \\ Vc_{j(-)} = -R_{j(-)} \cos \beta_j \\ \rho_{j(-)} = -\frac{4}{L_j} \cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \sin \frac{3\beta_j - \alpha_{j-1}}{4} \end{cases} \quad (5)$$

2)  $P_{j-1}$  点处右边圆弧的圆心、曲率及半径

同样可求得  $P_{j-1}$  点处右边圆弧的圆心、曲率及半径, 应注意此时  $\delta = -\frac{3\alpha_{j-1} - \beta_j}{4}$ 。

$$\begin{cases} Uc_{j-1(+)} = R_{j-1(+)} \sin \alpha_{j-1} \\ Vc_{j-1(+)} = -R_{j-1(+)} \cos \alpha_{j-1} \\ \rho_{j-1(+)} = -\frac{4}{L_j} \cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \sin \frac{3\alpha_{j-1} - \beta_j}{4} \\ R_{j-1(+)} = -\frac{1}{\rho_{j-1(+)}} \end{cases} \quad (6)$$

## 5. 节点弦切角关系式

计算节点弦切角的工作相当于建立第二类样条函数曲线, 即系数用给定点处的一阶导数表示的样条函数。对这类样条曲线, 我们是利用一阶连续及端点条件来形成方程组, 用追赶法解出未知数, 亦即解出各节点处的一阶导数值, 从而获得整个样条函数的表达式。

对圆弧样条取同样的思想, 用系数为给定型值点处的弦切角  $\alpha$ 、 $\beta$  (一阶导数) 来表示圆弧样条。也是利用了一阶连续条件及端点条件来形成方程组以解出各节点的  $\alpha$ 、 $\beta$ , 从而得到任一段相邻节点之间的二段圆弧的圆心和半径。

假定分段圆弧已经形成, 如图 9。

过  $P_j$  点圆的切线与弦线  $\overline{P_{j-1}P_j}$ 、 $\overline{P_jP_{j+1}}$  之间的夹角分

别记为  $\beta_j, \alpha_j$ , 两弦线之间的夹角为  $\varphi_j$ 。由切线的连续性, 可得

$$\alpha_j + \beta_j = \varphi_j \quad (7)$$

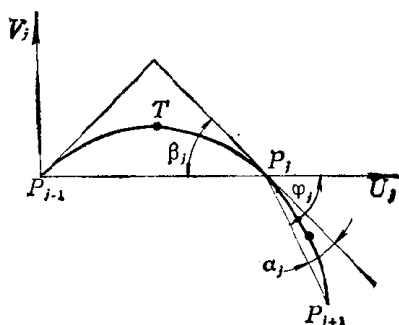


图 9

由于我们要求过节点两侧应是同一个圆, 故

$$\rho_{j(-)} = \rho_{j(+)}$$

由 (5)、(6) 两式得

$$\begin{aligned} & -\frac{4}{L_j} \cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \sin \frac{3\beta_j - \alpha_{j-1}}{4} \\ & = -\frac{4}{L_{j+1}} \cos \frac{\alpha_j + \beta_{j+1}}{4} \sin \frac{3\alpha_j - \beta_{j+1}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{令步长比 } \lambda_j = \frac{L_{j+1}}{L_j + L_{j+1}}, \mu_j = 1 - \lambda_j = \frac{L_j}{L_j + L_{j+1}}$$

两边同乘  $\frac{L_j \times L_{j+1}}{L_j + L_{j+1}}$ , 得

$$\begin{aligned} & -4\lambda_j \cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \sin \frac{3\beta_j - \alpha_{j-1}}{4} \\ & + 4\mu_j \cos \frac{\alpha_j + \beta_{j+1}}{4} \sin \frac{3\alpha_j - \beta_{j+1}}{4} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

仿照样条函数, 建立以下恒等式 (图 10):

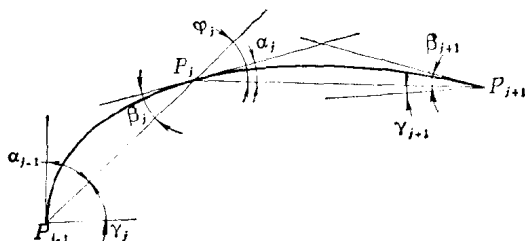


图 10

$$\begin{aligned}
 & \lambda_j \alpha_{j-1} + 3 \alpha_j + \mu_j \alpha_{j+1} \\
 &= \lambda_j \alpha_{j-1} + 3(\lambda_j + \mu_j) \alpha_j + \mu_j (\varphi_{j+1} - \beta_{j+1}) \\
 &= \lambda_j \alpha_{j-1} + 3\lambda_j (\varphi_j - \beta_j) + 3\mu_j \alpha_j + \mu_j (\varphi_{j+1} - \beta_{j+1}) \\
 &= 3\lambda_j \varphi_j + \mu_j \varphi_{j+1} + \mu_j (3\alpha_j - \beta_{j+1}) + \lambda_j (\alpha_{j-1} - 3\beta_j) \\
 &= b_j + G_j
 \end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$b_j = 3\lambda_j \varphi_j + \mu_j \varphi_{j+1}$$

$$G_j = \mu_j (3\alpha_j - \beta_{j+1}) + \lambda_j (\alpha_{j-1} - 3\beta_j)$$

引入式 (8) 后, 得

$$\begin{aligned}
 G_j = & \mu_j \left[ (3\alpha_j - \beta_{j+1}) - 4 \cos \frac{\alpha_j + \beta_{j+1}}{4} \sin \frac{3\alpha_j - \beta_{j+1}}{4} \right] \\
 & + \lambda_j \left[ (\alpha_{j-1} - 3\beta_j) - 4 \cos \frac{\alpha_{j-1} + \beta_j}{4} \sin \frac{\alpha_{j-1} - 3\beta_j}{4} \right] \tag{10}
 \end{aligned}$$

自  $j = 2 \sim (n-1)$ , 可得方程组

$$\lambda_j \alpha_{j-1} + 3 \alpha_j + \mu_j \alpha_{j+1} = b_j + G_j \tag{11}$$

式中  $b_j$  为线性部分, 系主要项;  $G_j$  为非线性部分, 系修正项。 $b_j$  是已知量, 它大约是  $\varphi$  的数量级。 $G_j$  包含未知量, 它大约是  $\varphi^3$  的数量级, 起一修正的作用, 使节点左右两边的圆弧为同一个圆。当节点无限加密时,  $G_j$  为一高阶无穷小量。

可以利用幂级数的展开来估计  $G_j$  的数量级。因