中学生课外读物

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 3, \\ 2x + y - 3z = 11, \\ x + y + z = 12. \end{cases}$$

TONGJIE FANGCHENG

同解方程

程志国 编

河北人民出版社

中学生课外读物

同解方程

河北人民出版社

中学生课外读物

同 解 方 程

程志国编

河北人民出版社出版（石家庄市北马路45号）
唐山市印刷厂印刷　　　河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32 6印张 121,000字 印数：1-13,750 1985年3月第1版
1985年3月第1次印刷　统一书号：7086·1173　定价：0.62元

前　　言

方程是中学数学的主要内容之一，也是数学的基础知识。方程同解问题是解方程的理论根据，但在中学数学教材中不可能详细介绍。针对这种情况，本书结合中学数学教材中方程的内容，比较系统地介绍了方程（组）的同解理论，给出了有关方程（组）同解问题的若干定理。根据这些定理，结合方程（组）的常用解法和一些特殊解法，对代数方程和简单超越方程的同解、增根和失根等情况进行了分析。

掌握这方面的知识，不仅能了解一些方程常用解法的同解性依据，还可以加深对方程各种解法的深刻理解，从而提高解题能力。本书可作为初、高中学生课外阅读材料，也可供中学数学教师及学生家长参考。

由于水平所限，难免出现缺点和错误，请读者批评指正。

编　　者

一九八四年一月

目　　录

一、同解方程的基本概念

方程是中学数学的主要内容之一，也是数学的基础知识.中学阶段研究方程的目的之一，在于求解.这就要解方程，将方程进行一系列的变形，最后使方程变为易于看出其解的形式.如果变形后新方程的解和原方程的解相同，这就找到了原方程的解；否则，就可能产生多余的解或丢掉原方程的解.

方程经过变形，其解的变化规律如何，这正是研究同解所要解决的问题. 如解分式方程

$$\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}=1. \tag{1}$$

两边同乘以各分式的最简公分母

$$(x+2)(x-2),$$

得

$$\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}\right)(x+2)(x-2)$$
$$=(x+2)(x-2). \tag{2}$$

约去分母，得

$$(x-2)+4x-2(x+2)=(x+2)(x-2). \tag{3}$$

去括号，合并同类项，得

$$3x-6=x^2-4. \tag{4}$$

移项，得

$$x^2-3x+2=0. \tag{5}$$

分解因式，得

$$(x-1)(x-2)=0. \tag{6}$$

由$x-1=0$，得

$$x_1=1; \tag{7}$$

由$x-2=0$，得

$$x_2=2. \tag{8}$$

通过检验知道，$x_2=2$不是原方程的解，原方程的解是1.

本题是求方程（1）的解，将方程（1）变形为方程（2），通过求方程（2）的解求出方程（1）的解。方程(2)和方程(1)的左边显然是不相同的，因此，方程(2)和方程(1)是不相同的两个方程。方程（2）的解是否一定是方程（1）的解，这是值得研究的问题。方程（2）的解无法直接求，只好把方程（2）变形为方程（3），再将方程(3)变形为方程(4)、……、方程（7）和方程（8）。

方程（7）和方程（8）的解，分别是1和2．通过检验，1是方程(1)的解，2不适合方程(1)。除此之外，方程(1)还有没有其它解？这就需要了解变形前后两个方程解的变化情况，这正是本书所要研究的问题。

1.代数式

（1） 代数式

$2\pi r$，$3x+1$，$a-b$，

$\frac{m}{n}$，$\sqrt{x+y}$，$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$.

它们都是用有限的运算符号把数或表示数的字母连结而成的．这样的式子便叫做代数式．这里的运算符号是指加、减、乘、除、乘方（指数是有理数）和开方，运算的顺序是

规定的，即在一个式子里，如果没有括号，那就先算乘方、开方（三级运算），然后乘、除（二级运算），最后加、减（一级运算）．当然，式子中的运算不能是无限次的．

一般还约定，单独一个数字或表示数的字母如2，0，a，x也叫做代数式．

代数式里的字母，有的只代表一个确定的数（如公式$2\pi r$中的π）；有的可以表示某一允许值范围内不同的数，如$2\pi r$中的r可以取任意正数，$\frac{m}{n}$中的n可以取不为零的任何数。这种可以在一定范围内取值的字母，一般称为变数字母或自变数。

指数是无理数的乘方运算、对数运算和三角运算等统称为超越运算．在式子

$$a^{2x+1}-b^{x},\ \sin x+2\cos x,\ \lg x^{2}+\lg(x+1)$$

中，都是对变数字母实施有超越运算的式子，这种式子便称为超越式．

平时把含有字母为x的式子记为$f(x)$，$\varphi(x)$，……，含有两个字母x和y的式子记为

$$f(x,y),\ \varphi(x,y),\ \cdots\cdots.$$

（2）代数式的值

用数值代替代数式里的字母，并按着指定的顺序进行指定的运算，所得到的结果叫做代数式的值．代数式里的字母取各种不同的数值时，不应当使代数式失掉意义．

如果$f(x)$表示关于字母x的代数式，那么，当$x=a$时，代数式$f(x)$的值就表示为$f(a)$。例如，当$x=5$时，代数式

$$f(x)=2x+1$$

的值为

$$f(5)=2\times5+1=11.$$

对于超越式的值和其表达方法，与此完全类似。

（3）允许值集合

在一个式子中，一个变数总是有它的取值范围，使得在这个范围内，只要变数任意取定一个值，就可得到式子的一个确定值。这种能够使式子$f(x)$有确定值的变数x值的集合，便叫做式子$f(x)$的变数x的允许值集合，也叫做$f(x)$的定义域，它是$f(x)$中变数x允许值的全体。

例如：①$2x^2+1$和$\frac{2}{x^2+1}$

变数x的允许值集合是实数集（实数集记为R）；

②$\frac{2}{x^2-1}$变数x的允许值集是

$$\{x|\ x\in R,\ x\neq\pm1\};$$

③$\sqrt{1-x^2}$变数x的允许值集是

$$\{x|x\in R,\ -1\leqslant x\leqslant1\}.$$

单独一个数，如0和1变数x的允许值也可以看作是任意实数。因为可以认为

$$0=0\cdot x+0,\ 1=0\cdot x+1.$$

其中的x显然可以取任意实数。

一般说来，整式中的变数允许值是任意实数；分式中的变数允许值为不使分母为零的任意实数；在偶次根式中，变数的允许值是不使被开方数为负数的实数；奇次根式中变数的允许值是任意实数。

含有两个以上字母的代数式，其中的变数允许值是由两

个以上的数来组成的。

练 习 一

在实数集合内，指出下列各式中变数x的允许值集合。

（1） $\frac{1}{x^2+2}$，　　（2） $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$，

（3） $\sqrt{x-5}$，　　（4） $x+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$，

（5） $\frac{2x}{x^2-2}$，　　（6） $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}$，

（7） $\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{x+1}}$，　　（8） $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$。

2.方程

（1）等式

用等号表示相等关系的式子叫做等式．例如

$$1+2=3;\quad x=x;\ \sqrt{x-3}=5;$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1;\quad x+1=x+2;$$

$$4+x=7;\quad \frac{1}{x-1}=2;\quad \sin^2x+\cos^2x=1.$$

等式的左边和右边可以是代数式，也可以是超越式。

用等号把两个式子连结起来，就能得到一个等式．至于这个等式从内容上是不是真正相等，需要进一步研究。

在上面不含字母的等式中，

$$1+2=3$$

是真正相等的．在含有字母的等式中，等式成立与否就不明显，这就要根据字母所表示的值来决定。如

$$(x+1)^2=x^2+2x+1,\quad x=x,\quad \sin^2x+\cos^2x=1,$$

对字母x在允许值的范围内取任意实数值，两边都相等；

$$4+x=7,\quad \sqrt{x-3}=5,\quad \frac{1}{x-1}=2,$$

只对x在允许值的范围内取个别值，才相等；

$$x+1=x+2,$$

对x在允许值的范围内取任何数值，都不相等。由此看来，对于一个具体的等式来说，两边并不一定真正相等．实际上等式是一个判断，或者说是一个命题，如

$$1+2=3,$$

就表示1加上2等于3．命题有真有假，所以等式也有真有假．如

$$x=x$$

是真等式；

$$x+1=x+2$$

是假等式；

$$4x+7=0,$$

当$x=-\frac{7}{4}$时是真等式，否则是假等式．

如果用$f(x)$和$\varphi(x)$表示含有变数x的式子，那么，等式一般地可以表示为

$$f(x)=\varphi(x).$$

对于一个等式中所含的变数字母，我们经常要研究它取什么值时，等式才是一个真正的等式，或者等式不成立．在

这种情况下，等式中的那些变数字母就叫做未知数。

等式性质

①如果$A=B$成立，那么$B=A$。即等式两边可以对调。这里A、B表示算式。

②如果$A=B$，$B=C$成立，那么$A=C$。即相等关系可以传递。

③如果$A=B$成立，那么$A+m=B+m$。即在等式两边都加上同一个数，等式仍然成立。这里m表示数。

④如果$A=B$成立，那么$A-m=B-m$。即在等式两边都减去同一个数，等式仍然成立。

⑤如果$A=B$成立，那么$Am=Bm$。即在等式两边都乘以同一个数，等式仍然成立。

⑥如果$A=B$成立，那么$\frac{A}{m}=\frac{B}{m}(m\neq 0)$。即在等式两边都除以同一个非零数，等式仍然成立。

利用等式的性质，根据需要可以对等式进行变形，从而得出新的等式。

（2）方程

含有未知数的等式叫方程。只含有一个未知数的方程，一般可以表示为

$$f(x)=\varphi(x).$$

$f(x)$叫方程的左边，$\varphi(x)$叫方程的右边。例如，方程

$$2x^2+1=3x$$

的左边是

$$f(x)=2x^2+1,$$

右边是

$$\varphi(x)=3x.$$

又如方程

$$\sqrt{1-x^2}=0$$

的左边是

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},$$

右边是

$$\varphi(x)=0.$$

也可以把$f(x)$和$\varphi(x)$看作x的函数。

方程和等式这两个概念之间的关系叫做从属关系，全体方程是全体等式的一部分。所以方程除具有一般等式的属性外，还有它特有的本质属性，就是含有未知数。要判断一个等式是不是方程，就要看它是否含有未知数。

由前面等式中所举之例，可以看出，对于一个方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

来说，它可以对某些数值是成立的，也可能对任何数值都不成立或都成立。

当$f(x)$和$\varphi(x)$为代数式（或者说是代数函数）时，方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

便叫做代数方程。如果$f(x)$，$\varphi(x)$含有对未知数的超越运算（或者说$f(x)$，$\varphi(x)$包含有超越函数），方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

就叫做超越方程。

含有两个未知数x和y的方程，可以表示为

$$f(x,y)=\varphi(x,y).$$

（3）方程的解

由于方程中未知数的值没有确定，所以一个方程能否真

正成为等式也没有确定，它是一个有待研究的等式。能够使方程两边的值相等的未知数的值，就叫做方程的解。只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根。所以，求方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

解的意思，就是当x取什么数时，$f(x)$和$\varphi(x)$的值才相等。

例如方程

$$2x^2+1=3x$$

的解是1和$\frac{1}{2}$；方程

$$x+y=2$$

可变形为

$$y=2-x,$$

因为每给x一个数，都可以通过$y=2-x$求得一个y的值，因此这个方程有无穷多解；方程

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

的解为任何实数。

（4）解方程

求方程的解或者确定方程无解的过程，叫做解方程。

一个方程可能有解，也可能无解。如果有解，可能是一个解、几个解，也可能是无穷多解。解方程的含意应当首先判断在指定数的范围内是否有解。如果有解，有几个解，全部把它找出来。无特别说明，这里研究解方程，仅在实数范围内。

例如，解方程 $\sqrt{x-12}-\sqrt{6-x}=0$。

因为 $x-12\geqslant 0$，$x\geqslant 12$；

$6-x\geqslant 0$，$x\leqslant 6$，

所以原方程无解，这也是解方程。

（5）方程的未知数允许值集合

在给定的数域内，使得方程的两端都有意义的一切数值所构成的集合叫方程的未知数允许值集合。显然，它是方程两边未知数允许值集合的公共部分。具体地说，设方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

中，$f(x)$和$\varphi(x)$的未知数允许值集合分别为A和B，那么，集合$A\cap B$便是方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

的未知数允许值集合。$A\cap B$也叫做方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

的定义域。可记作M（即$A\cap B$）。例如，方程

$$\frac{3}{x^2-4}=\frac{2}{x-1}$$

的定义域是除去1和±2的实数集合；方程

$$\sqrt{x-2}=1$$

的定义域是实数集。

如果$x=\alpha$是方程

$$f(x)=\varphi(x)$$

的一个解，即$f(\alpha)=\varphi(\alpha)$，一定有$\alpha\in M$，这就是说，方程的解一定属于该方程的未知数允许值集合。

有些方程通过分析就可以断定无解。例如，方程

$$\sqrt{x-4}=3\sqrt{x-1}$$

的未知数允许值集合是

$$\{x|\quad x\in R,\ x\geqslant 4\},$$

此时永远有

$$\sqrt{x-4}<\sqrt{x-1},$$

所以这个方程无解。方程

$$\sqrt{2-x-x^2}+\sqrt{x-3}=3$$

的未知数允许值集合为

$$\{x|2-x-x^2\geqslant 0\}\cap\{x|x-3\geqslant 0\},$$

即 $$\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}\cap\{x|x\geqslant 3\}.$$

这是一个空集，因此这个方程也无解。

解方程时，先判断一下未知数的允许值范围，然后再确定方程是否有解，这对解方程是有好处的。

（6）两个式子的恒等

设A和B分别为$f(x)$和$\varphi(x)$的变数x的允许值集合，如果对$A\cap B$中的一切数x，均有

$$f(x)=\varphi(x),$$

便称$f(x)$和$\varphi(x)$恒等，常用符号"$\equiv$"表示，如

$$f(x)\equiv\varphi(x).$$

两个式子的恒等不是无条件的，是相对的。当$\alpha\in A\cap B$时，才有

$$f(\alpha)=\varphi(\alpha).$$

例如，在实数范围内

$$(x+1)^2\equiv x^2+2x+1;$$

当$x\neq 0$时，

$$\frac{x^2}{x}\equiv x\ ;$$

当$x\neq y$时，

$$\frac{x^2-y^2}{x-y}\equiv x+y;$$

在正实数范围内，

$$\lg\sqrt{x} \equiv \frac{1}{2}\lg x;$$

在$x \neq n\pi$时，

$$\frac{\cos x}{\sin x} \equiv \operatorname{ctg} x.$$

（7）式子的恒等变形

把一个式子$f(x)$，用另一个与它恒等的式子$\varphi(x)$代替时，便叫做式子的恒等变形．

对代数式进行恒等变形时，经常用的方法有：将式子展开；合并同类项；因式分解；分式的通分与整理；根式的分母有理化；根据根式的性质进行的变形以及有关式子运算的基本定律．例如，将式子

$$\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4}+\frac{2}{2-x}\right)(x+2)(x-2),$$

变为

$$(x-2)+4x-2(x+2),$$

再变为

$$3x-6,$$

都是式子的恒等变形．

（8）方程的恒等变形

如果在方程的一边或两边进行式子的恒等变形，从而得到一个新方程，这种变形便叫做方程的恒等变形．它是对方程两边的式子而言的，是将原方程中的式子变换成与其恒等的另一个式子．例如，由方程