高等学校教学用书

线性代数学习指导

●全国化工石化系统高校数学协作组 编
● 杨永愉 甘 泉 主编

化学工业出版社
教材出版中心

高 等 学 校 教 学 用 书

线性代数学习指导

全国化工石化系统高校数学协作组 编

杨永愉 甘 泉 主编

化学工业出版社

教 材 出 版 中 心

·北 京·

(京)新登字039号

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导/杨永愉，甘泉主编．—北京：化学工业出版社，2001.8

高等学校教学用书

ISBN 7-5025-3360-5

Ⅰ．线…　Ⅱ．①杨…②甘…　Ⅲ．线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第044789号

高等学校教学用书

线性代数学习指导

全国化工石化系统高校数学协作组　编

杨永愉　甘　泉　主编

责任编辑：唐旭华

责任校对：蒋　宇

封面设计：于　兵

*

化学工业出版社
教材出版中心　出版发行

（北京市朝阳区惠新里3号　邮政编码100029）

发行电话：(010)64918013

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京市昌平振南印刷厂印刷

三河市宇新装订厂装订

开本850×1168毫米1/32　印张10¼　字数274千字

2001年8月第1版　2001年8月北京第1次印刷

印　数：1—8000

ISBN 7-5025-3360-5/G·913

定　价：17.00元

前　言

数学是培养和造就各类高层次理工人才的共同基础，是工科大学生重要的基础理论课。传统的工科数学教育曾对培养高级工程技术人才发挥了重要作用。随着科学技术、信息和知识的迅猛发展，传统的数学观念和教学体系受到冲击，工程技术对现代数学观点、方法及基础数学内容需求量的不断膨胀与有限的计划学时之间的矛盾日益突出。在当前工科数学教育中，迫切需要转变重继承、轻创造的教育思想和更新重传统、轻现代的数学内容，以适应高等工程教育面向21世纪人才培养模式的需要。在教学内容、课程体系及教学方法的改革中，教学内容的改革首当其冲。为此，全国化工石化系统高校数学协作组在成员校多年教学实践与改革探索的基础上，充分发挥各院校的优势，组织各校专家、教授编写了一套具有鲜明特点，又符合教学改革新形势需要的教材及教学参考书。

本套教材包括《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等；教学参考书包括《高等数学学习指导》、《线性代数学习指导》、《概率论与数理统计学习指导》等。

本套教材编委会成员如下：主编　黄金坤；副主编　刘慧、韩芝隆、李生训、郭金吉；编委　黄晋阳、蒋逢海、刘彬、仇计清、赵璧、战学秋、李志林。

全国化工石化系统高校数学协作组

2000年1月

编 者 的 话

本书是根据《高等学校工科本科线性代数课程教学基本要求》（1995年修订版）和2001年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）至数学（四）中线性代数部分的考试内容与考试要求，结合编者多年来讲授线性代数课程的实践经验而编写的。

线性代数的核心内容是研究有限维线性空间的结构和理论，以及线性空间上的线性变换。它的基本概念、基本理论具有较强的逻辑性和抽象性，因而具有广泛的应用价值。作为一本辅导教材，它是以各种类型的例题为基础，通过解题思路的分析与解题手法的介绍，强调基本概念与基本理论的深刻内涵与灵活运用。

本书详尽解答了不同类型、不同层次的例题180多道。其内容循序渐进，既有基本题型，也有综合性题目，其中包括近10年来，硕士研究生入学统一考试各类数学试卷中有关线性代数内容的绝大部分试题。本书选材广泛，兼顾了有不同要求读者的需求，它既可以作为学习线性代数课程时的参考书，也可以作为参加硕士研究生入学统一考试的辅导书。

全书由北京化工大学杨永愉、南京工业大学甘泉担任主编，郑州大学成立社任副主编。第一章由甘泉、杨永愉编写。第二、五章由成立社编写，第三、四章由郭敏茹编写，第六章由郭敏茹、杨永愉编写。第七章由杨永愉编写。全书由杨永愉修改并定稿。

本书在编写过程中，得到了有关单位的许多同志的热心帮助，同时也参考了有关作者的书籍。在此，一并向他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，不妥或错误之处在所难免，恳请读者和使用本书的教师批评指正。

编 者

2001年5月

内 容 提 要

本书共分七章，包括行列式，矩阵，n 维向量空间，线性方程组，矩阵特征值与特征向量，二次型，线性空间与线性变换。每章分为四部分：基本要求和重点要求；内容提要，概括了每章的主要知识点；例题分析，收录了近十年来的各种题型和绝大部分考研试题；最后为习题，供读者练习。附录给出四套考试样题和解答，以及各章的习题答案和提示。

本书适用于工科，经管等专业的本、专科学生，电大、职大学员。可作为报考研究生的考生及自学线性代数者的辅导教材，也可供工科线性代数课程的教师，非数学专业的研究生参考。

目　　录

第一章　行　列　式

一、基本要求和重点要求

基本要求：

（1）了解行列式的定义和性质；

（2）掌握二阶、三阶行列式的计算法；

（3）会计算简单的 n 阶行列式。

重点要求：

二阶、三阶、简单的 n 阶行列式的计算。

二、内容提要

1. 排列和逆序

定义 1　由 n 个数 1，2，3，…，n 组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$，称为一个 n 级排列。

n 级排列共有 $n!$ 个。

定义 2　在一个排列 $j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$ 中，若数 $j_s>j_t$（即前面的数大于后面的数），则称这两个数组成一逆序；一个排列中逆序的总数，称为该排列的逆序数，记作 $\tau(j_1\cdots j_n)$。

定义 3　逆序数是奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列。

定义 4　将一排列中的某两个数互换位置，而其余的数不动，就得到另一个排列，这种对排列的变换方法称作对换。

定理 1　任一排列经过一次对换后必改变该排列的奇偶性。

2. 二、三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

3. n 阶行列式的定义

定义 5 n 阶行列式 D 表示下面的数

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j}a_{2j}\cdots a_{nj_n}$$

这里 $j_1\cdots j_n$ 为 1，2，…，n 的任一 n 级排列，$\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和。

4. 转置行列式

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 D^{T} 为 D 的转置行列式，记作 D^{T}(或 D' 或 D^{τ})。

5. n 阶行列式的性质

①行列式与它的转置行列式的值相等，即

$$D=D^{\mathrm{T}}$$

②互换行列式的任意两行(或列)，行列式的值改变符号。

③若行列式中有两行(或列)元素对应相等，则此行列式的值为零。

④行列式中某一行(或列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外面。

推论　行列式中有一行(或列)的元素全为零，则行列式的值为零。

⑤若行列式中有两行(或列)元素成比例，则此行列式的值为零。

⑥如果行列式的某一行(或列)是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除了这一行(或列)外，其余行(或列)与原来行列式对应的行(或列)完全一样，且该行(或列)元素则由原行列式对应的行(或列)中两组数中的一组数构成。

⑦若在行列式的某一行(或列)元素上加上另一行(或列)的对应元素的 k 倍，所得行列式的值不变。

6. n 阶行列式的展开定理

定义 6　在 n 阶行列式 D

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，任取 k 行 k 列($1\leqslant k\leqslant n$)，将位于这些行、列相交处的元素按原来的相对位置排成一个 k 阶行列式 N，称 N 是 D 的一个 k 阶子式。把 N 所在的行、列划去，剩下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-k$ 阶行列式 M，称 M 为 N 的余子式。如果 N 所含行、列分别是 i_1，i_2，…，i_k；j_1，j_2，…，j_k，则称

$$A=(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}\cdot M$$

为 N 的代数余子式。

特别地：当 $k=1$ 时，N 即为一元素，设为 a_{ij}，此时 N 的余子式和代数余子式也即是元素 a_{ij} 的余子式和代数余子式，记作 M_{ij}

和 A_{ij}。

定理2 n 阶行列式 D 等于它的任意一行(或列)的所有元素与它们对应的代数余子式的乘积之和。即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

或
$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

$$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

定理3 行列式的某一行(或列)的元素与另一行(或列)的对应元素的代数余子式的乘积之和为零。即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

综合定理2、3，可以得到下列重要结论

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

这里
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

定理4(拉普拉斯定理) 设在行列式 D 中任意取定 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 行，则由这 k 行元素所组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式乘积之和等于行列式 D。

7. 克莱姆法则

定理5 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

当其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ 时}$$

有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 为

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & b_n & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \text{第 } j \text{ 列} \end{array}$$

三、例题分析

例 1 求下列排列的逆序数：

(1) 642135；(2) $n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1$，

解 (1) 逆序为：64，62，61，63，65，(5 个)

42，41，43，(3 个)

21，(1 个)

所以 $$\tau(642135)=5+3+1=9$$

(2) 逆序为：

$n(n-1)$，　$n(n-2)$，　$\cdots$，$n3$，　$n2$，　$n1$

$(n-1)(n-2)$，$(n-1)(n-3)$，$\cdots$，$(n-1)2$，$(n-1)1$

$\cdots$

32，　31

21

所以 $$\tau[n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 2 选择 i 与 k，使得 $1274i56k9$ 成偶排列。

解 排列$1274i56k9$中缺数 3，8。

若令 $i=3$，$k=8$。则排列为127435689。而

$$\tau(127435689)=5$$

所以 127435689 为奇排列。

故 $i=8$，$k=3$，则排列 127485639 由排列 127435689 经过一次对换而成，所以 127485639 为偶排列。

而实际 $\tau(127485639)=8$。

这也间接验证了定理1的正确性。

n 阶行列式的计算是线性代数课程的一个重点，方法较多，常用的方法有以下几种：

①行列式的定义；

②行列式按一行(或列)展开；

③利用行列式的性质，将行列式化成特殊形式，如三角行列式或对角行列式；

④拆项(将行列式一行或一列拆成二项之和的形式)计算法；

⑤数学归纳法；

⑥递推关系法；

⑦拉普拉斯展开定理；

⑧“加边”(或“升阶”)计算法。

以下通过各种例子介绍这些方法的具体使用。

1. 行列式定义

利用行列式定义计算行列式的方法，适用于特殊形式的行列式，如对角行列式，三角行列式等。

例 3 计算：(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

解 (1) 这是一个 4 阶行列式，由行列式的定义可知，其展开式中应有 4! 共 24 项，但其中有 23 项都是零。只有一项

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}\text{不为零，而该项前符号为}(-1)^{\tau(4321)}=1$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

这里 $\tau(4321)=6=\dfrac{4(4-1)}{2}$。

(2) 由上例可知，所求行列式共有 $n!$ 项，但只有一项不为零，故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\,2} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}$$

（由例 1 知）

注 对角形行列式是指主对角线以外的所有元素均为零，其中主对角线是指从行列式的左上角到右下角的对角线。对角形行列式的值等于其主对角线上元素的乘积。即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

本例中的二个行列式并非对角形行列式，其结果与对角形行列式有所不同，即前面有一个符号项$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。本例中的(2)是这种行列式的一般结果，可当公式使用。

2. 行列式按一行(或列)展开

将行列式按一行(或列)展开计算行列式，是行列式计算的常用方法之一。

例 4 设 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$是元素 a_{ij}的代数余子式，试求：$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$。

分析 本例的目的是为了对行列式按一行(或列)展开定理有准确而深刻的认识，并非是机械地求出 A_{31}，A_{32}，A_{33}，A_{34}后得出结果。

解 将原式变形为

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{34}$$

上式的右边可视为将原行列式中的第三行元素都换成数 1 而得到的新行列式的值，故有

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

由于新行列式的第二行与第三行元素对应相等，由行列式性质可知，此行列式值为零，即

$$A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=0$$

注 本例也可由定理 3 得此结果。

例 5 计算下列行列式

$$(1)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};\quad (2)\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析 这两个行列式分别称为上三角行列式和下三角行列式，并统称为三角行列式。三角行列式的计算除了利用行列式定义之外，还可以利用展开定理计算，这后者是行列式计算的最重要方法之一。

解 将行列式(1)连续地按第一列或最后一行展开

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

同理可得行列式(2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

注 三角行列式的值等于其主对角线上元素的乘积，这个结论是行列式计算中最常用的公式之一。